Лекция 25 ноября (первая половина)

$V \qquad\qquad V^*$

конечномерные векторные пр-ва

$V^* = \{\varphi : V \to \Bbbk \mid \varphi \text{ линейно}\}$

$V = \{v : V^* \to \Bbbk \mid v \text{ линейно}\}$

$\shortparallel$

$V^{**} \quad v \in V \to ev_v : V^* \to \Bbbk$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \xi \mapsto \xi(v)$

$\langle \xi, v \rangle = \xi(v) = ev_v(\xi)$

для $\xi \in V^*$, $v \in V$

Двойственность между подпространствами

$V \supset U \rightsquigarrow \mathrm{Ann}\, U = \{\xi \in V^* \mid \xi|_U = 0\}$

Множество решений системы однородных уравнений с левыми частями из W

максим. систем линейных уравнений на V, задающая подпр-во U

$\mathrm{Ann}\, W \longleftarrow W < V^*$

$\shortparallel$

$\{v\in V \mid \forall \xi \in W\ \langle \xi, v\rangle = 0\}$

$\dim V = \dim V^* = n$

$$\begin{tikzcd} \text{подпр-ва размерности } k \text{ в } V \arrow[r, bend left, "U \to \mathrm{Ann}\,U"] & \text{подпр-ва коразмерности } \overline{\overline{k}} \text{ в } V^* \arrow[l, bend left, "\mathrm{Ann}\,W \leftarrow W"] \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\,U = U$ (инволютивность)

$\mathrm{Ann}(U_1+U_2) = \mathrm{Ann}\,U_1 \cap \mathrm{Ann}\,U_2$

$\mathrm{Ann}(U_1\cap U_2) = \mathrm{Ann}\,U_1 + \mathrm{Ann}\,U_2$

$U \subset V$ $\boxed{U^* \simeq V^*/\mathrm{Ann}\,U}$

$V^* \twoheadrightarrow U^*$ ограничение

$(\xi : V \to \Bbbk) \mapsto (\xi|_U : U \to \Bbbk)$

линейный эпиморфизм

с ядром $\mathrm{Ann}\,U$

Верен $\forall V$ в том числе бесконечномерного

$(V/U)^* \cong \mathrm{Ann}\,U$ тоже $\forall V$, в том числе бесконечномерных

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, two heads, "\pi"] & V/U \arrow[r, "\xi"] & \Bbbk \end{tikzcd}$$

факторизация

$\Big[\ \xi : V/U \to \Bbbk$

$\pi^*: (V/U)^* \to V^*$: $\xi\pi: V \to \Bbbk$

$\operatorname{im}\pi^* = \operatorname{Ann} U$ $\quad \pi^*: (V/U)^* \twoheadrightarrow \operatorname{Ann} U$

$\operatorname{Ann} U \to (V/U)^*$

$\varphi: V \to \Bbbk \quad \rightsquigarrow \quad \tilde\varphi: (V/U) \to \Bbbk$

$\varphi|_U = 0 \qquad [v] \longmapsto \varphi(v)$

$\underset{\overset{\uparrow}{U}}{v+u} \qquad \varphi(v+u) = \varphi(v) + \cancel{\varphi(u)} \to 0$

Сопоставление пространству двойственного

$V \rightsquigarrow V^*$

Векторные пр-ва
Векторные пространства
$V \rightsquigarrow V^*$

контравариантный функтор

отображениям тоже сопоставляет отображения

$V_1 \xrightarrow{F} V_2$ линейное отображение

$$V_1^* \xleftarrow{F^*} V_2^*$$ Двойственное линейное отображение.

$$\begin{tikzcd} & & k \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \arrow[ur, bend left, "f"] & \end{tikzcd}$$ отображение множеств

$\varphi^* : f \mapsto f\circ\varphi$ подъём функций? на Y до функций на X

$k^X \longleftarrow k^Y$ (pull back)

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "F"] & V_2 \arrow[d, "\varphi"] \\ & k \end{tikzcd}$$

$\varphi \mapsto \varphi\circ F$ линейная функция на V_1

$$V_1^* \xleftarrow{F^*} V_2^*$$

$$\varphi\circ F \longmapsfrom \varphi$$

На языке свёртки: $\forall \varphi \in V_2^*, \forall v \in V_1$

$$\langle \underset{\underset{V_1^*}{\cap}}{F^*\varphi}, \underset{\underset{V_1}{\cap}}{v} \rangle = \langle \underset{\underset{V_2^*}{\cap}}{\varphi}, \underset{\underset{V_2}{\cap}}{Fv} \rangle$$

$\varphi \in \ker F^* \iff \forall v \in V_1$

$$0 = \langle F^*\varphi, v\rangle = \langle \varphi, Fv\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi \in \operatorname{Ann} \operatorname{im} F$$

Факт: $\ker F^* = \operatorname{Ann} \operatorname{im} F$

Следствие: (берём Ann обеих частей):

$$\operatorname{Ann} \ker F^* = \operatorname{im} F$$

Наблюдение: $F^{**} = F$

$$\underline{\langle F^*\varphi, v\rangle = \langle \varphi, Fv\rangle}$$

$$\underline{\langle \varphi, F^{**}v\rangle = \langle F^*\varphi, v\rangle}$$

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[rr, "F"] & {} \arrow[d, squiggly] & V_2 \\
V_1^* & {} \arrow[d, squiggly] & V_2^* \arrow[ll, "F^*"'] \\
V_1^{**} \arrow[rr, "F^{**}"] \arrow[d, equal] & {} \arrow[d, equal] & V_2^{**} \arrow[d, equal] \arrow[d, bend left=60, leftrightarrow] \\
V_1 \arrow[rr, "F"'] & {} & V_2
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{V \hookrightarrow V^{**}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &a \in V^{**} \longleftrightarrow v \in V \\ &\langle a, \varphi\rangle = \langle \varphi, v\rangle \end{aligned}}$$

Устройство отождествления V^{**} с V

$$\ker F^{*} = \operatorname{Ann} \operatorname{im} F$$

$$\operatorname{Ann} \ker F^{*} = \operatorname{im} F$$

напишем для F^{*} вместо F

$$\ker \overset{F^{**}}{F''} = \operatorname{Ann} \operatorname{im} F^{*}$$

$$\operatorname{Ann} \ker \underset{F^{**}}{F} = \operatorname{im} F^{*}$$

→ вытекает теорема о ранге матрицы

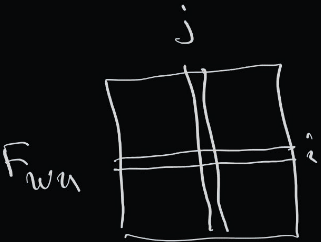
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "F"] & W \end{tikzcd}$$

$u=(u_1,\dots u_n)$ $\quad$ $w=(w_1,\dots,w_m)$

базисы

Пусть $(Fu_1,\dots,Fu_n)=(w_1,\dots,w_m)\cdot F_{wu}$

матрица F в базисах w и u



j-тый столбец это координаты Fu_j в базисе $w_1,\dots,w_n$

i-тая строка — это значение ковектора w_i^* на векторах $Fu_1, \dots, Fu_n$

Строка координат ковектора F^*w_i в базисе $u_1^*, \dots, u_n^*$

$$\langle w_i^*, Fu_1\rangle, \dots, \langle w_i^*, Fu_n\rangle$$

$$\to \langle F^*w_i, u_1\rangle, \dots, \langle F^*w_i, u_n\rangle$$

$\varphi : U \to \Bbbk$ её координаты в базисе $u_1^*, \dots, u_n^*$ — это значения φ на базисных векторах $u_1, \dots, u_n$

$$U^* \xleftarrow{F^*} W^*$$

$u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ $\quad$ $w^* = (w_1^*, \dots, w_m^*)$

$$\boxed{F^*_{u^*w^*} = F^t_{wu}}$$

имеет в j-том столбце координаты ковектора $F^*w_j^*$ в базисе $u_1^*, \dots, u_n^*$, т. е. значения w_j^* на $Fu_1, \dots, Fu_n$, что есть j-тая строка матрицы F_{wu}

Двойственный оператор имеет в двойственных базисах матрицу, транспонированную к матрице исходного оператора.

$m\ \underbrace{\boxed{\quad A \quad}}_{n}$ это матрица оператора

$$F_A : \mathbb{k}^n \longrightarrow \mathbb{k}^m$$
$$x \longmapsto Ax$$

A^t – это матрица двойственного оператора

$$F_A^* : (\mathbb{k}^m)^* \longrightarrow (\mathbb{k}^n)^*$$

$$\mathrm{rk}\,A = \dim \mathrm{im}\, F_A$$
$$\mathrm{rk}\,A^t = \dim \underbrace{\mathrm{im}\, F_A^*}_{\overset{\parallel}{\mathrm{Ann}\, \underbrace{\ker F_A}_{\overset{\cap}{\mathbb{k}^n}}}} = n - \dim \ker F_A$$

V – векторное пр-во

$\Pi \subset V$ наз. порождающим, если

$\forall v$ $\exists$ разложение

$$v = \underline{x_1 u_1 + \ldots + x_m u_m}$$

конечное!

где $\underline{x_i \in \mathbb{k}}$, $\underline{u_i \in \Pi}$, $m \in \mathbb{N}$

$L \subset V$ наз. линейно независимым,

если равенство $\underline{x_1 u_1 + \ldots + x_m u_m} = 0$

$x_i \in \mathbb{k}$, $u_i \in L$, $m \in \mathbb{N}$ конечное!

возможно только когда все $x_i = 0$

Базис $E \subset V$ – это такое порождающее подмножество, что любой вектор имеет единственное выражение $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$

$e_i \in E$, $x_i \in \mathbb{k}$,

$n \in \mathbb{N}$.

$$v = \sum_{e \in E} x_e \cdot e$$

где $x_e \in \mathbb{k}$ и только конечное число из них отлично от нуля