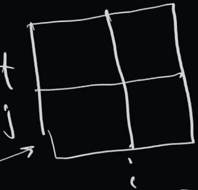
Лекция 2 декабря (первая половина)

$C = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$, K – коммутативное кольцо с 1.

$C^\vee = (c^\vee_{ij})$ – присоединённая матрица

$c^\vee_{\underline{ij}} = (-1)^{i+j} C_{\underline{ji}}$, где $C_{ji} = \det$



алгебраическое дополнение к элементу $c_{ji} \in C$

вычеркнуть из матрицы C крест с центром в клетке (ji)

Важное тождество: $CC^\vee = C^\vee C = \det C \cdot E$

Это тождество справедливо для матриц с элементами из кольца $\mathbb{Z}[c_{ij}]$

n^2 независимых переменных c_{ij}

$C = (c_{ij})$

Док-во: Нужно проверить n^2 равенств между многочленами из $\mathbb{Z}[c_{ij}]$.

Редукция 1: $f, g \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_N]$

равенство $f=g$ в $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_N] \Leftrightarrow$

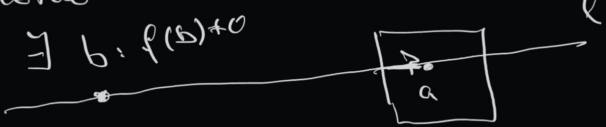
$f-g\equiv 0$ как функция на $\mathbb{R}^N$.

Редукция 2: $f\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_N]$

задаёт непрерывную функцию $\mathbb{R}^N\to\mathbb{R} \Rightarrow$ Достаточно проверить равенство $f=0$ на каком-нибудь всюду плотном подмножестве в $\mathbb{R}^N$.

Замечание: если $h\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_N]$ - ненулевой многочлен, то подмножество $D(h)=\{x\in\mathbb{R}^N \mid h(x)\neq 0\}$ всюду плотно в $\mathbb{R}^N$

$\exists\, b: f(b)\neq 0$



$\forall a\in\mathbb{R}^N\ \exists$ близкие точки $p: h(p)\neq 0$

ограничение $h\Big|_{(ab)}$ – это ненулевой? многочлен на прямой? (т.е. от одной переменной?)

$x = a + t\overrightarrow{ab}$

$f(x) = f(a + t\overrightarrow{ab}) =$

$= F(t)$

$\Downarrow$

На (ab) $\exists$ только конечное число точек x : $f(x) = 0$.

Итог: Для того, чтобы доказать равенство нулю многочлена $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_N]$ достаточно проверить, что f принимает нулевые значение всюду в $\mathbb{R}^N$ за исключением множества нулей какого-нибудь многочлена $h \neq 0$.

$$\underline{C \cdot C^\vee = C^\vee \cdot C = \det C \cdot E}$$

Достаточно доказать это равенство для всех $C \in Mat_n(\mathbb{R})$ и $\det C \neq 0$.

А это мы уже сделали: над любым полем $\Bbbk$ $\forall$ матрицы $C \in Mat_n(\Bbbk)$ и $\det C \neq 0$ матрица $C^\vee \cdot \frac{1}{\det C} = C^{-1}$

Следствие: разложение определителя по строке или столбцу:

$C \cdot C^{\vee} = \det C \cdot E$

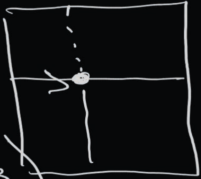
$$\det C = \sum_{j} \underset{\text{i-я строка } C}{c_{ij}} \cdot (-1)^{i+j} \underset{\text{i-й столбец } C^{\vee}}{C_{ij}}$$

$\boxed{\text{для любого } i}$

$C^{\vee} C = \det C \cdot E$

$$\det C = \sum_{i} (-1)^{i+j} C_{ij} c_{ij}$$

$\boxed{\forall j}$



$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & \vdots \\ - & + & - & \vdots \\ + & - & + & \vdots \\ - & + & - & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \end{array}$$

Умножение на чужие алгебраические

Дополнения?

$$\sum_j c_{ij} \cdot (-1)^{k+j} C_{kj} = 0$$

$$\forall i \neq k$$

Правило Крамера для решения систем из n однородных уравнений на $n+1$ переменных $\overbrace{(x_0, \dots, x_n)}^{n+1}$

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ - - - - - - \\ a_{n0}x_0 + a_{21}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Пространство решений — это $\operatorname{Ann} U$

$U < (K^{n+1})^*$ – линейная оболочка строк

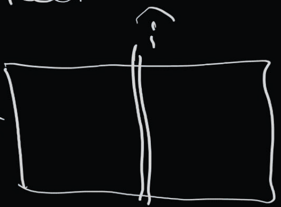
$$\left.\begin{matrix} (a_{10} \dots a_{1n}) \\ - - - \\ (a_{n0} \dots a_{nn}) \end{matrix}\right. \in K^{n+1}$$

- Если строки линейно независимы, то пространство решений одномерно

- Если строки линейно зависимы, то пр-во решений имеет dim ≥ 2.

$A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{k})\,\mathrm{Mat}_{n\times n+1}(\mathbb{k})$

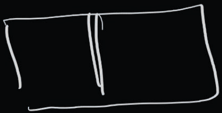
$A_i = \det$



вычеркнули i-ый столбец

$\alpha = (A_0, -A_1, +A_2, -A_3 \ldots) \in \mathbb{k}^{n+1}$

$\alpha_i = (-1)^i \det$



Факт! $\alpha = 0 \iff$ строки матрицы A линейно зависимы, и если $\alpha \neq 0$, линейно независимы можно дополнить до базиса в в$(\mathbb{k}^{n+1})^*$ каким-нибудь стандартным базисным вектором $e_i^* \in (\mathbb{k}^{n+1})^*$ (у лемме о замене).

i

$$\det \begin{pmatrix} 0 \dots 0 1 0 \dots 0 \\ A \end{pmatrix} \neq 0 \text{ это базис}$$

$n+1$ $n+1$

$$= (-1)^i A_i$$

$$\Downarrow$$

$$A_i \neq 0$$

Пример: Пусть прямая $l \subset \mathbb{R}^3$ задаётся уравнениями

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z = c_1 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z = c_2 \end{cases}$$

Как найти вектор скорости?

$\parallel$

Это решение однородной системы с матрицей $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$

$$v = \left(a_2 b_3 - b_2 a_3, -(a_1 b_3 - b_1 a_3), (a_1 b_2 - a_2 b_1) \right)$$

Тождество Гамильтона-Кэли

$Mat_n(\mathbb{k})$ — это конечномерное пр.во над $\mathbb{k}$

$\dim Mat_n(\mathbb{k}) = n^2$

$\forall$ матрицы $C \in Mat_n(\mathbb{k})$ матрицы

$$\underbrace{C^0 = E,\ C,\ C^2,\ C^3,\ \dots,\ C^{n^2}}_{n^2+1}$$

линейно зависимы. $\Rightarrow \exists\ \lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}$

$$\underbrace{\lambda_{n^2} C^{n^2} + \dots + \lambda_1 C + \lambda_0 E = 0}$$

матрица C является корнем многочлена $f(x) = \lambda_{n^2} x^{n^2} + \dots + \lambda_1 x + \lambda_0$

Всякая матрица удовлетворяет полиномиальному уравнению

(степени $\leq n^2$).

$f(x)\in \Bbbk[x] \qquad f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$

в f можно подставлять матрицы и линейные операторы.

$$f(C) := a_0\cdot E + a_1C + \ldots + a_nC^n$$

$$f(F) := a_0\cdot Id + a_1F + \ldots + a_nF^n$$

$$\begin{aligned} ev_C : \Bbbk[x] &\longrightarrow \mathrm{Mat}_n(\Bbbk) \\ f(x) &\longmapsto f(C) \end{aligned}$$

$\forall$ матрицы C есть такое отображение

$\forall$ оператора $F: V \to V$ есть отображение

$$\begin{aligned} ev_F : \Bbbk[x] &\longrightarrow \mathrm{End}(V) \\ f(x) &\longmapsto f(F). \overset{\shortparallel}{\mathrm{Hom}(V,V)} \end{aligned}$$

$\ker ev \neq 0$ т.к. $\dim \Bbbk[x] = \infty$ линейные эндоморфизмы.

$\ker ev = (\mu_F) \subset \Bbbk[x]$

множество многочленов, делящихся на некоторый многочлен μ_F

μ_F однозначно определяется как приведённый многочлен наименьшей положительной степени, такой что $\mu_F(F) = 0$. Он называется **минимальным многочленом** матрицы (или оператора) F.

$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ или $B = 0$

μ_F м.б. приводим!

(в отличие от минимальных многочленов алгебраических чисел.).