ПРОГРАММА ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО КУРСУ
«ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»
ЗА ВТОРОЙ СЕМЕСТР 2021/22 УЧЕБНОГО ГОДА

Евклидова геометрия. Вычисление расстояний, углов, объёмов и ортогональных проекций. Разложение ортогонального оператора в прямую ортогональную сумму поворотов и одномерных собственных подпространств с собственными числами ± 1, а также в композицию отражений. Движения в $\mathbb{R}^3$.

предполагает умение: *вычислять расстояние между аффинными подпространствами (в частности, в уме находить расстояние от точки до гиперплоскости), угол между вектором и подпространством (в частности, между двумя векторами) и ортогональную проекцию вектора на подпространство, евклидов объём параллелепипеда; находить общий перпендикуляр к набору векторов; определять тип движения в* $\mathbb{R}^3$, *описывать композиции движений разного типа и для поворотов находить ось и угол, а для отражений — зеркало; умение выписывать канонический вид ортогонального оператора в виде блочно-диагональной матрицы из поворотов.*

Линейные отображения евклидовых пространств. Канонический вид самосопряжённых и антисамосопряжённых операторов в ортонормальном базисе, SVD-разложение операторов между евклидовыми пространствами и полярное разложение невырожденного линейного оператора.

предполагает умение: *находить диагональный вид самосопряжённого оператора и ортонормальный базис, в котором матрица оператора имеет такой вид; находить сингулярные числа, сингулярные направления и SVD-разложения линейных отображений; находить полярные разложения линейных преобразований; определять, когда операторы сопряжены ортогональным преобразованием.*

Выпуклая геометрия. Выпуклость внутренности и замыкания. Грани и крайние точки. Замкнутая выпуклая фигура является пересечением своих опорных полупространств. Перечисление граней выпуклых многогранников. Лемма Фаркаша и теоремы Фаркаша – Минковского – Вейля.

предполагает умение: *пользоваться свойствами выпуклых фигур, перечислять грани многогранников и многогранных конусов и применять различные описания как для них, так и для их граней.*

Билинейные формы. Операторы корреляции, матрицы Грама, ранг, разложение произвольной формы в сумму симметричной и кососимметричной. Невырожденные билинейные формы: биекция между формами и операторами, двойственные базисы, ортогоналы и ортогональные проекции, размерность изотропного подпространства невырожденной формы на V не превышает $\dim V \,/\, 2$, две невырожденные формы над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль изометричны если и только если их канонические операторы подобны.

предполагает умение: *находить ранг и ядра билинейной формы; преобразовывать взаимную матрицу Грама двух наборов векторов при линейной замене этих векторов; связать матрицу Гама с матрицами левой и правой корреляций; находить левый и правый двойственные базисы к данному; вычислять ортогональные проекции вектора на подпространство, куда форма ограничивается не вырождено, и на его ортогональные дополнения; выяснять, изометричны ли две данные невырожденные билинейные формы над полем* $\mathbb{C}$.

Симметричные билинейные и квадратичные формы. Невырожденность ограничений симметричной формы на дополнительное подпространство к ядру и на фактор по ядру. Существование базиса с диагональной матрицей Грама (ортогонализация). Поляризация квадратичной формы, приведение квадратичной формы к сумме квадратов и его специализации над полями $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{F}_p$. Гиперболические формы: всякий базис в изотропном пространстве половинной размерности дополняется до гиперболического базиса, изометрии двумерного гиперболического пространства. Невырожденные формы: отражения в гиперплоскостях, лемма Витта, разложение невырожденной формы в ортогональную сумму гиперболической и анизотропной форм, описание анизотропных форм над полями $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{F}_p$, группа изометрий порождается отражениями и транзитивно действует на изотропных и на гиперболических подпространствах заданной размерности. Независимость сигнатуры вещественной формы от выбора ортогонального базиса.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *выписывать матрицу Грама квадратичной формы и преобразовывать её при замене базиса, предъявлять ортогональный базис и находить его матрицу Грама; определять сигнатуру вещественных форм по последовательности главных угловых миноров и путём отыскания собственных значений отвечающего форме евклидово самосопряжённого оператора; находить размерности максимального изотропного подпространства и гиперболической составляющей форм над полями $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{F}_p$; находить образ вектора при отражении в ортогонале к данному анизотропному вектору.*

КОСОСИММЕТРИЧНЫЕ БИЛИНЕЙНЫЕ И ГРАССМАНОВЫ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ. Невырожденность ограничения кососимметричной формы на дополнительное подпространство к ядру и на фактор по ядру. Нормальная форма Дарбу. Всякий базис лагранжева подпространства невырожденной формы дополняется до симплектического базиса. Симплектическая группа транзитивно действует на лагранжевых и на симплектических подпространствах заданной размерности. Приведение грассмановой квадратичной формы к виду Дарбу, критерий разложимости грассмановой квадратичной формы на два линейных множителя. Пфаффиан кососимметричной матрицы. Грассмановы многочлены, линейная замена переменных в грассмановом многочлене.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *находить базис, в котором матрица Грама имеет нормальный вид Дарбу; приводить грассманову квадратичную форму к каноническому виду и выяснять, разложима ли она; вычислять пфаффиан; свободно вычислять с грассмановыми многочленами.*

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. Проективизация векторного пространства, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \simeq S^1$, $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \simeq S^2$, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \simeq$ лента Мёбиуса с заклееной диском границей, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}(\Bbbk^{n+1}) = \Bbbk^n \sqcup \ldots \sqcup \Bbbk^0$. Аффинные карты и локальные аффинные координаты. Однородные координаты и задание фигур однородными уравнениями, проективное замыкание аффинной гиперповерхности. Пространство гиперповерхностей данной степени, пример: $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U)$ как множество неупорядоченных наборов из d точек на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$, нормальные рациональные кривые. Словарик «Линейная алгебра – проективная геометрия»: проективные подпространства, размерности пересечений и линейных соединений, дополнительные подпространства и проекции. Проективная двойственность: соответствие $\mathbb{P}(U) \leftrightarrow \mathbb{P}(\operatorname{Ann} U)$ задаёт оборачивающую включение биекцию между подпространствами размерности k и $n-k-1$ в пространствах $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(V^*)$ и переводит пересечения в линейные соединения.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *переходить от однородных координат к локальным аффинным и от одних локальных аффинных координат к другим, выписывать однородное уравнение для проективного замыкания аффинной гиперповерхности и его аффинные уравнения в других картах; переформулировать геометрические утверждения в двойственные; вычислять проекцию из подпространства на дополнительное подпространство.*

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. Проективное преобразование пространства $\mathbb{P}_n$ однозначно задаётся действием на $n+2$ точки, никакие $n+1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости, группа $\mathrm{PGL}(V)$. Гомографии между проективными прямыми: разложение гомографии в композицию проекций, инволюции, построения одной линейкой, перспективные треугольники, теоремы Дезарга. Двойное отношение, гармонические пары точек, четырёхвершинник и эпиморфизм $S_4 \twoheadrightarrow S_3$, группа Клейна, гармонические пары прямых в четырёхвершиннике.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *вычислять двойные отношения; находить образы и прообразы точек при гомографиях, заданных действием на три точки; находить неподвижные точки гомографий; использовать проективные преобразования (в частности, гомографии) для анализа и решения задач на построение одной линейкой.*

ПРОЕКТИВНЫЕ КВАДРИКИ. Гладкие и особые точки, касательные прямые и касательное пространство, всякая квадрика является линейным соединением пространства особых точек и гладкой квадрики в дополнительном подпространстве. Пересечение гладкой квадрики гиперплоскостью и планарность гладкой квадрики. Полярное преобразование относительно гладкой квадрики, сопряжённость точек и сопряжённость гиперплоскостей, сопряжённые точки прямой гармоничны точкам пересечения этой прямой с квадрикой. Двойственная квадрика. Гармонически описанные квадрики. Классификация проективных квадрик над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, важные примеры: коника Веронезе на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2\Bbbk^2)$, квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\operatorname{End}\Bbbk^2)$, квадрика Плюккера в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2\Bbbk^4)$ и пучки и связки прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\Bbbk^4)$.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *находить пространство особых точек; выяснять, касается ли заданная гиперплоскость заданной квадрики и выписывать уравнение гиперплоскости, касающейся заданной квадрики в заданной гладкой точке; находить ранг и планарность квадрики и её гиперплоских сечений; вычислять образы и прообразы точек и гиперплоскостей при полярном преобразовании; выписывать уравнение двойственной квадрики; подсчитывать число точек на квадратичной поверхности над конечным полем.*

ПУЧКИ КВАДРИК. Базисное множество, спектр и характеристический многочлен, коранг особой квадрики пучка не меньше кратности соответствующего корня характеристического многочлена. Классификация невырожденных пучков коник. Ассоциированный треугольник четырёхвершинника, вписанного в конику, автополярен относительно этой коники. Инволюция Дезарга. Линейные системы коник, проходящих через данную точку, и коник, относительно которых данная точка имеет данную поляру.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *выписывать уравнение коники, обладающей заданными свойствами, путём отыскания подходящей коники в пучке; пользоваться пучками при решении задач о пересечениях коник, об общих касательных, а также для построения примеров и контрпримеров к существованию коник или конфигураций коник с заданными свойствами.*

КОНИКИ. Проективная конгруэнтность и рациональная параметризация непустых гладких коник. Задание коникой гомографии между прямыми. Двойное отношение и гомографии на конике. Трассировка коники линейкой, построение одной линейкой поляр, касательных и неподвижных точек гомографии, теоремы Паскаля и Брианшона. Конформная структура на $\mathbb{R}^2$ и конформная теория аффинных коник: эллипсы, гиперболы, параболы, асимптоты, центр, фокусы, директрисы, главные оси, конфокальные семейства и фокальные свойства гладких коник.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *написать рациональную параметризацию непустой гладкой коники и знать число точек на такой конике над конечным полем; строить одной линейкой касательные, поляры и полюсы, а также неподвижные точки гомографии на конике; быстро и эффективно находить тип, центр и главные оси, асимптоты, фокусы и директрисы аффинной коники на евклидовой плоскости; применять конформную теорию коник для решения задач евклидовой планиметрии.*

АФФИННЫЕ КВАДРИКИ. Вложение аффинной группы в проективную, аффинные квадрики аффинно конгруэнтны если и только если проективно конгруэнтны их проективные замыкания и асимптотические квадрики. Зоология аффинных квадрик: гладкие центральные квадрики, параболоиды, простые конусы и цилиндры, их явное описание над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$. Планарность вещественных аффинных квадрик и их асимптотических квадрик. Полуоси гладких квадрик в евклидовом аффинном пространстве, теоремы Аполлония, ортооптические сфера и плоскость.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *определять тип, планарность и топологическое устройство аффинной квадрики; находить центр (или вершину), главные оси и длины полуосей квадрики в евклидовом пространстве, а также выписывать каноническое уравнение такой квадрики; пользоваться перечнем «кривых» и «поверхностей» второго порядка в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}^3$ для решения задач; выяснять, касается ли заданная аффинная гиперплоскость заданной аффинной квадрики и выписывать уравнение аффинной гиперплоскости, касающейся заданной аффинной квадрики в заданной гладкой точке.*

СФЕРЫ И ИНВЕРСИИ. Касательное пространство и гиперплоское сечение сферы, полярное преобразование и инверсия пространства относительно сферы. Степень точки относительно сферы и радикальная ось. Пространство псевдосфер и пучки сфер. Конформные свойства инверсии пространства относительно сферы, стереографической проекции и инверсии сферы относительно точки. Группы Мёбиуса евклидова пространства и сферы, инверсии как отражения в пространстве псевдосфер.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: *находить радикальную ось двух сфер; вычислять образы точек, сфер и гиперплоскостей при инверсиях и стереографических проекциях; применять инверсии и стереографические проекции для решения задач евклидовой геометрии.*