

Задачи для подготовки к контрольной № 6

ПК6♦1. Постройте рациональные параметризации аффинных коник

а) $-4x^2 + 28xy + 8x - 28y^2 - 12y - 1 = 0$

б) $-12x^2 - 44xy - 65y^2 + 10y - 1 = 0$

в) $-20x^2 - 36xy - 8x - 28y^2 - 4y - 1 = 0.$

ОТВЕТ: а) $x = \frac{1}{5} \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 + 1}, y = \frac{1}{5} \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 1}$; б) $x = \frac{1}{5} \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 + 1}, y = \frac{1}{5} \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 1}$; в) $x = \frac{1}{5} \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 + 1}, y = \frac{1}{5} \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 1}$

ПК6♦2. Доподлинно выясните, совпадают ли Ваши ответы к предыдущей задаче с указанными в ней ответами с точностью до дробно линейного преобразования параметра t .

ПК6♦3. Для гомографии $\varphi : \mathbb{P}_1(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$ найдите прообраз точки

а) $13/23$, если φ переводит $1/2$ в $4/7$, $4/7$ в $29/51$, а $5/8$ в $17/30$,

б) $-62/35$, если φ переводит $-1/3$ в $-7/4$, $-2/7$ в $-16/9$, а $-3/10$ в $-23/13$,

в) $-76/163$, если φ переводит $-1/3$ в $-1/2$, $-2/7$ в $-8/17$, а $-5/18$ в $-7/15$.

ОТВЕТ: а) $\frac{11}{12}$; б) $\frac{11}{12}$; в) $\frac{11}{12}$

ПК6♦4. Найдите неподвижные точки инволюции $\sigma : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \sigma^2 = \text{Id}$, если

а) $\sigma(-4) = \infty$, а $\sigma(-1) = 3/2$ б) $\sigma(2/3) = 3$, а $\sigma(-2/3) = 1/4$ в) $\sigma(2) = 1$, а $\sigma(4/3) = 4$.

ОТВЕТ: а) $1, -1$; б) $1, -1$; в) $1, -1$

ПК6♦5. Найдите косинус меньшего из двух смежных углов между касательными прямыми

а) опущенными на конику $-60x^2 - 52xy - 64x - 12y^2 - 28y - 17 = 0$ из точки $(0, -1)$

б) опущенными на конику $-5x^2 - 18xy - 6x + 7y^2 - 2y - 1 = 0$ из точки $(-1/3, -1/6)$

в) опущенными на конику $15x^2 + 56xy - 22x + 12y^2 - 28y + 7 = 0$ из точки $(2/5, 1/5)$

ОТВЕТ: а) $\frac{5}{13}$; б) $\frac{5}{13}$; в) $\frac{5}{13}$

ПК6♦6. Напишите уравнения касательных прямых, опущенных на конику

а) $20x^2 + 60xy + 4x - y^2 + 12y = 0$ из точки $(-\frac{3}{14}, \frac{1}{14})$

б) $-17x^2 + 66xy + 30x - 65y^2 - 58y - 13 = 0$ из точки $(0, -\frac{1}{2})$

в) $-24x^2 - 32xy - 12x - 9y^2 - 10y - 1 = 0$ из точки $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

ОТВЕТ: а) $x = -\frac{3}{14} + t, y = \frac{1}{14} - t$; б) $x = t, y = -\frac{1}{2} + t$; в) $x = -\frac{1}{2} + t, y = \frac{1}{2} - t$

ПК6♦7. Найдите точки, в которых касательные прямые, опущенные на конику

а) $-81x^2 + 64xy + 66x + 8y^2 - 20y - 13 = 0$ из точки $(\frac{5}{14}, -\frac{1}{7})$

б) $-13x^2 + 28xy + 4x - 16y^2 - 4y = 0$ из точки $(1, \frac{2}{3})$

в) $-32x^2 + 116xy + 8x - 160y^2 - 4y - 1 = 0$ из точки $(\frac{3}{11}, \frac{1}{11})$.

касаются коники.

ОТВЕТ: в (а) $(\frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{6}{1})$ и $(\frac{37}{5}, -\frac{37}{5}, \frac{74}{5})$; в (б) $(\frac{3}{2}, \frac{3}{1}, \frac{3}{1})$ и $(1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$; в (в) $(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3})$ и $(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{95}{5})$.

ПК6♦8. Напишите однородное уравнение проективной коники, проходящей через

- а) точки $(-3 : -2 : 1)$, $(16 : 9 : -6)$, $(-3 : -3 : 1)$, $(29 : 17 : -11)$, $(-28 : -19 : 10)$
- б) точки $(0 : 3 : 1)$, $(-1 : 1 : 1)$, $(-3 : 14 : 6)$ и касающейся прямой $6x_0 - 6x_1 + 20x_2 = 0$ в точке $(3 : -7 : -3)$.
- в) точку $(1 : 0 : 0)$ и касающейся прямых $2x_0 + 12x_1 + 6x_2 = 0$ и $2x_0 - 2x_2 = 0$ соответственно в точках $(9 : -4 : 5)$ и $(1 : 0 : 1)$.

ОТВЕТ: в (а) $-21x_0^2 + 24x_0x_1 - 74x_0x_2 - 4x_1^2 + 52x_1x_2 - 57x_2^2 = 0$;
 в (б) $8x_0^2 - 12x_0x_1 + 40x_0x_2 + 3x_1^2 - 22x_1x_2 + 39x_2^2 = 0$;
 в (в) $4x_0x_1x_2 + 4x_0x_2^2 - 4x_1x_2^2 - 4x_1^2x_2 = 0$.