

## §17. Проективные преобразования

**17.1. Линейные проективные изоморфизмы.** Всякий линейный изоморфизм векторных пространств  $F : U \simeq W$  задаёт биекцию  $\bar{F} : \mathbb{P}(U) \simeq \mathbb{P}(W)$  между одномерными подпространствами в  $U$  и  $W$ , которая называется *линейным проективным преобразованием* или *проективным изоморфизмом*.

Пример 17.1 (перспектива между гиперплоскостями)

Покажем, что для любой пары проективных гиперплоскостей  $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  и произвольной точки  $p \notin L_1 \cup L_2$  центральная проекция гиперплоскости  $L_1$  из точки  $p$  на гиперплоскость  $L_2$  задаёт проективный изоморфизм между  $L_1$  и  $L_2$ , который мы будем обозначать  $p : L_1 \simeq L_2$  и называть *перспективой* с центром в  $p$ . Пусть  $L_1 = \mathbb{P}(U), L_2 = \mathbb{P}(W)$  и  $p = \mathbb{P}(\mathbb{k} \cdot e)$ . Тогда  $V = W \oplus \mathbb{k} \cdot e$ , ибо  $p \notin L_2$ , и центральная проекция из  $p$  задаётся ограничением линейной проекции  $V \rightarrow W$  вдоль одномерного подпространства  $\mathbb{k} \cdot e$  на подпространство  $U \subset V$ . Так как  $p \notin L_1$ , подпространство  $U$  имеет нулевое пересечение с ядром проекции и, стало быть, проектируется на  $W$  изоморфно.

ТЕОРЕМА 17.1

Для любых двух векторных пространств  $U, W$  одинаковой размерности  $\dim U = \dim W = n + 1$  и упорядоченных наборов из  $n + 2$  точек  $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{P}(U), q_0, q_1, \dots, q_{n+1} \in \mathbb{P}(W)$ , в каждом из которых никакие  $n + 1$  точек не лежат в одной гиперплоскости, существует единственный с точностью до пропорциональности линейный изоморфизм  $F : U \simeq W$ , такой что  $\bar{F}(p_i) = q_i$  при всех  $i$ .

Доказательство. Зафиксируем какие-нибудь ненулевые векторы  $u_i$  и  $w_i$ , представляющие точки  $p_i$  и  $q_i$ , и возьмём наборы векторов  $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_n)$  и  $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_n)$  в качестве базисов векторных пространств  $U$  и  $W$ . В силу наложенных на точки условий все коэффициенты в разложениях  $u_{n+1} = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$  и  $w_{n+1} = \beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n$  векторов  $u_{n+1}$  и  $w_{n+1}$  по этим базисам отличны от нуля, так как, к примеру, при  $\alpha_i = 0$  точка  $p_{n+1}$  оказывается в одной гиперплоскости  $x_i = 0$  с  $n$  базисными точками  $p_v$ , где  $v \neq i$ . Отображение  $\bar{F} : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  переводит  $p_i$  в  $q_i$  если и только если  $F(u_i) = \lambda_i w_i$  для некоторых ненулевых  $\lambda_i \in \mathbb{k}$ . Поэтому матрица  $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$  оператора  $F$  в базисах  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  диагональна с ненулевыми элементами  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  на диагонали, причём каждый диагональный элемент удовлетворяет равенству  $\lambda_i \alpha_i = \lambda_{n+1} \beta_i$ , выражающему равенство  $i$ -х координат векторов  $F(u_{n+1}) = \lambda_{n+1} w_{n+1}$ . Таким образом, набор диагональных элементов  $\lambda_i = \lambda_{n+1} \alpha_i / \beta_i$  матрицы оператора  $F$  определяется однозначно с точностью до умножения на произвольную ненулевую константу  $\lambda_{n+1}$ .  $\square$

Следствие 17.1

Два линейных изоморфизма тогда и только тогда задают равные проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны.  $\square$

Пример 17.2 (четырёхвершинник и эпиморфизм  $S_4 \rightarrow S_3$ )

Любые четыре точки  $a, b, c, d \in \mathbb{P}_2$ , никакие три из которых не коллинеарны, задают конфигурацию из трёх пар прямых, соединяющих пары точек для каждого из трёх различных способов разбить эти точки на две пары, см. рис. 17◊1. Эта конфигурация называется *четырёхвершинником  $abcd$* , а каждая из трёх пар прямых — парой его *противоположных сторон*. Точки пересечений пар противоположных сторон  $z = (ab) \cap (cd), y = (ac) \cap (bd), x = (ad) \cap (bc)$

и проходящие через них три прямые называют *ассоциированным треугольником*  $xyz$  четырёхвершинника  $abcd$ . Согласно [теор. 17.1](#), каждая перестановка точек  $a, b, c, d$  однозначно задаёт проективное преобразование  $\mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$ , переводящее четырёхвершинник  $abcd$  в себя, а значит, как-то переставляющее вершины  $x, y, z$  ассоциированного с ним треугольника.

Таким образом возникает гомоморфизм групп  $\pi : S_4 \rightarrow S_3$ . Поскольку транспозиции  $(ab)$  и  $(bc)$  переходят при этом в транспозиции  $(xy)$  и  $(yz)$ , гомоморфизм  $\pi$  биективно отображает подгруппу  $S_3 \subset S_4$ , образованную всеми оставляющими на месте вершину  $d$  перестановками вершин  $a, b, c$ , на группу перестановок вершин  $x, y, z$ , переводя каждую перестановку вершин  $a, b, c$  в точно такую же перестановку вершин  $x, y, z$ . Ядро  $\ker \pi$  состоит из тождественной перестановки и трёх пар независимых транспозиций  $(b, a, d, c)$ ,  $(c, d, a, b)$ ,  $(d, c, b, a)$ . Эта подгруппа называется *четвертной группой Клейна* или *группой двуугольника* и обозначается, соответственно, через  $V_4$  или  $D_2$ .

УПРАЖНЕНИЕ 17.1. Убедитесь в том, что  $V_4 \simeq \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ , а  $S_4 \simeq V_4 \rtimes S_3$  является полупрямым нормальной подгруппы  $V_4 \triangleleft S_4$  и дополнительной подгруппы  $S_3 = \text{Stab}(d) \subset S_4$ .

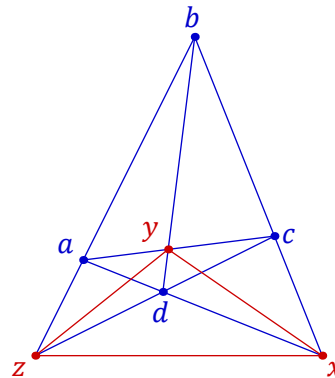


Рис. 17.1. Четырёхвершинник  $abcd$  и его  $\Delta xyz$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17.1 (линейные проективные группы)

Согласно [теор. 17.1](#) группа линейных проективных автоморфизмов пространства  $\mathbb{P}(V)$  изоморфна фактору полной линейной группы  $GL(V)$  по подгруппе  $H = \{\lambda \cdot \text{Id} \mid \lambda \neq 0\} \subset GL(V)$  скалярных гомотетий. Этот фактор обозначается  $PGL(V) = GL(V)/H$  и называется *проективной линейной группой* векторного пространства  $V$ . Если фиксировать базис в  $V$  и отождествить  $GL(V)$  с группой невырожденных матриц  $GL_{n+1}(\mathbb{k})$ , то группа  $PGL(V)$  отождествится с группой  $PGL_{n+1}(\mathbb{k})$  классов пропорциональности невырожденных матриц.

ПРИМЕР 17.3 (дробно линейные преобразования прямой)

Группа  $PGL_2(\mathbb{k})$  состоит из классов пропорциональности невырожденных матриц  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

Такая матрица действует на  $\mathbb{P}_1$  по правилу  $(x_0 : x_1) \mapsto ((ax_0 + bx_1) : (cx_0 + dx_1))$ . В стандартной аффинной карте  $U_1 \simeq \mathbb{A}^1$  с аффинной координатой  $t = x_0/x_1$ , это действие имеет вид дробно линейного преобразования  $t \mapsto (at + b)/(ct + d)$ . Единственное дробно линейное преобразование, переводящее три различные точки  $a, b, c$  в точки  $\infty, 0, 1$  имеет вид

$$t \mapsto \frac{t-b}{t-a} \cdot \frac{c-a}{c-b}. \quad (17-1)$$

Образ точки  $d \in \mathbb{P}_1$  при таком преобразовании называется *двойным отношением* упорядоченной четвёрки точек  $a, b, c, d$  и обозначается

$$[a, b, c, d] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}.$$

ТЕОРЕМА 17.2

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристики нуль всякое биективное отображение

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\},$$

которое может быть задано в некоторой аффинной карте с координатой  $t$  формулой

$$\varphi(t) = g(t)/h(t), \quad \text{где } g, h \in \mathbb{k}[t], \quad (17-2)$$

является ограничением некоторого линейного проективного изоморфизма  $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_1$ .

Доказательство. Переходя к однородным координатам  $(x_0 : x_1)$ , для которых  $t = x_0/x_1$ , и меняя при необходимости конечное множество точек неопределённости отображения  $\varphi$ , перепишем формулу (17-2) в виде  $\varphi : (x_0 : x_1) \mapsto (f(x_0, x_1) : g(x_0, x_1))$ , где  $f$  и  $g$  — взаимно простые однородные многочлены от  $(x_0, x_1)$  одинаковой степени  $\deg f = \deg g = d$ . Точка  $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1$  имеет при отображении  $\varphi$  ровно один прообраз если и только если однородный многочлен  $\vartheta_1 \cdot f(x_0, x_1) - \vartheta_0 \cdot g(x_0, x_1)$  имеет на  $\mathbb{P}_1$  ровно один корень  $\zeta = \varphi^{-1}(\vartheta)$ . Над алгебраически замкнутым полем такое возможно, только если этот корень  $d$ -кратный, т. е.

$$\vartheta_1 \cdot f(x) - \vartheta_0 \cdot g(x) = \det^d(x, \zeta).$$

Поскольку алгебраически замкнутое поле  $\mathbb{k}$  бесконечно, а отображение  $\varphi$  биективно вне конечного множества точек, прямая  $(fg)$  в пространстве  $\mathbb{P}_d$  однородных многочленов степени  $d$  от  $(x_0, x_1)$  имеет бесконечно много точек пересечения с кривой Веронезе<sup>1</sup>  $C_d \subset \mathbb{P}_d$ , состоящей из  $d$ -тых степеней линейных двучленов. Поскольку при  $d \geq 2$  никакие три точки кривой  $C_d$  не лежат на одной прямой<sup>2</sup>, мы заключаем, что  $d = 1$  и  $\varphi \in \text{PGL}_2(\mathbb{k})$ .  $\square$

**17.2. Гомографии.** Линейные проективные изоморфизмы между проективными прямыми называются *гомографиями*.

УПРАЖНЕНИЕ 17.2. Пусть точка  $p \in \mathbb{P}_2$  не лежит на прямой  $L \subset \mathbb{P}_2$ . Покажите, что отображение<sup>3</sup>  $p^\times \xrightarrow{\cong} L, \ell \mapsto \ell \cap L$ , является гомографией между прямыми  $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  и  $L \subset \mathbb{P}_2$ .

Следующим простейшим примером гомографии является перспектива<sup>4</sup>  $o : \ell_1 \xrightarrow{\cong} \ell_2$  между прямыми  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ , задаваемая проекцией из какой-нибудь точки  $o \notin \ell_1 \cup \ell_2$ , как на рис. 17◊2. Отметим, что перспектива является композицией гомографий  $\ell_1 \xrightarrow{\cong} o^\times \xrightarrow{\cong} \ell_2$  из упр. 17.2.

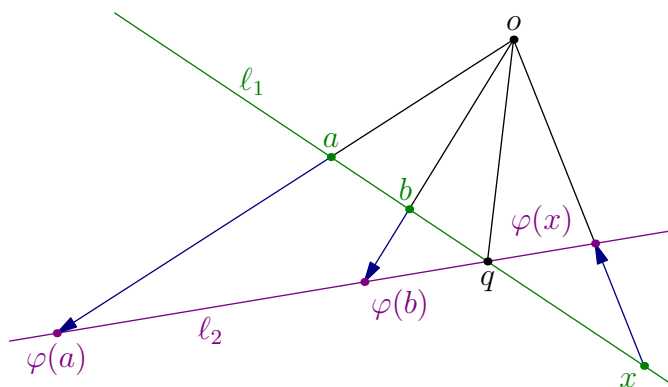


Рис. 17◊2. Перспектива.

<sup>1</sup>См. н° 16.5.1 на стр. 218.

<sup>2</sup>См. предл. 16.3 на стр. 219.

<sup>3</sup>Прямая  $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  состоит из всех проходящих через  $p$  прямых на  $\mathbb{P}_2$ , см. н° 16.2.2 на стр. 210.

<sup>4</sup>См. прим. 17.1 на стр. 222.

Согласно теор. 17.1, каждая гомография однозначно определяется своим действием на три различные точки.

ЛЕММА 17.1

Гомография  $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$  между прямыми  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$  является перспективой если и только если она переводит точку пересечения прямых  $\ell_1 \cap \ell_2$  в себя.

Доказательство. Обозначая через  $o$  точку пересечения прямых  $(a, \varphi(a))$  и  $(b, \varphi(b))$ , соединяющих произвольные точки  $a, b \in \ell_1 \setminus \ell_2$  с их образами  $\varphi(a), \varphi(b)$ , как на рис. 17◊2, видим, что перспектива  $o : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$  действует на три точки  $a, b$  и  $\ell_1 \cap \ell_2$  так же, как и  $\varphi$ .  $\square$

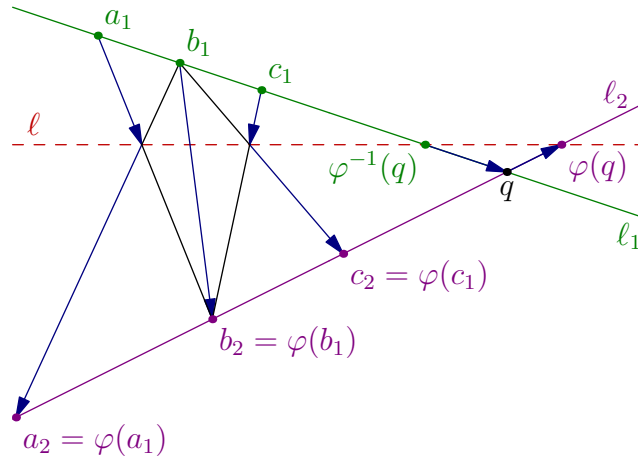


Рис. 17◊3. Перекрёстная ось.

Предложение 17.1 (перекрёстная ось гомографии)

Каждая гомография  $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$  между прямыми  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$  раскладывается в композицию  $\varphi = b_1 \circ b_2$  двух перспектив  $b_2 : \ell_1 \rightarrow \ell$  и  $b_1 : \ell \rightarrow \ell_2$  с центрами в точках  $b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2$ , см. рис. 17◊3. При этом точку  $b_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2$  можно выбрать любой отличной от  $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$ , точка  $b_2 = \varphi(b_1)$ , а прямая  $\ell$  не зависит от выбора  $b_1$ , проходит через точки  $\varphi(\ell_1 \cap \ell_2)$  и  $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$  и представляет собою ГМТ пересечения «перекрёстных прямых»  $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$ , где  $x \neq y$  независимо пробегает  $\ell_1$ . Более того, любое разложение гомографии  $\varphi$  в композицию  $b_1 \circ b_2$  перспектив с центрами  $b_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2, b_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$  имеет именно такой вид.

Доказательство. Пусть три различные точки  $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$  и их образы  $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$  при гомографии  $\varphi$  таковы, что ни одна из этих шести точек не совпадает с точкой  $q = \ell_1 \cap \ell_2$ . Обозначим через  $\ell$  прямую, проходящую через точки  $(a_1 b_2) \cap (b_1 a_2)$  и  $(c_1 b_2) \cap (b_1 c_2)$ . Так как композиция перспектив  $b_1 \circ b_2$  переводит точки  $a_1, b_1, c_1$  в  $a_2, b_2, c_2$ , она совпадает с  $\varphi$ , см. рис. 17◊3. Мы заключаем, что прямая  $\ell$  проходит через точки<sup>1</sup>  $\varphi(q), \varphi^{-1}(q)$  и представляет собою ГМТ пересечения прямых  $(b_1 \varphi(x)) \cap (x \varphi(b_1))$ , где  $x \in \ell_1 \setminus b_1$ . Повторяя это же рассуждение для тройки  $c_1, a_1, b_1$  вместо тройки  $a_1, b_1, c_1$ , как на рис. 17◊4, получим разложение  $\varphi = a_1 \circ a_2$  в композицию перспектив  $a_2 : \ell' \rightarrow \ell$  и  $a_1 : \ell' \rightarrow \ell_2$ , в котором прямая  $\ell'$  тоже проходит через точки  $\varphi(q), \varphi^{-1}(q)$  и представляет собою ГМТ пересечения прямых  $(a_1 \varphi(y)) \cap (y \varphi(a_1))$ , где  $y \in \ell_1 \setminus a_1$ . Поскольку обе прямые  $\ell$  и  $\ell'$  проходят через (возможно совпадающие) точки  $\varphi(q), \varphi^{-1}(q)$ , а также через отличную от них точку  $(b_1 a_2) \cap (a_1 b_2)$ , эти прямые совпадают. Так как точки  $a_1$  и  $b_1$

<sup>1</sup>Которые могут совпадать, если гомография  $\varphi$  перспектива.

выбирались произвольно, мы заключаем, что все разложения  $\varphi = (x : \ell \rightarrow \ell_2) \circ (\varphi(x) : \ell_1 \rightarrow \ell)$  имеют одну и ту же прямую  $\ell$ , которая является ГМТ пересечения прямых  $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$ , где  $x \neq y$  независимо пробегает  $\ell_1$ . Последнее утверждение предложения вытекает из того, что в любом разложении  $\varphi = b_1 \circ b_2$  с  $b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2$  точка  $b_2 = \varphi(b_1)$ .  $\square$

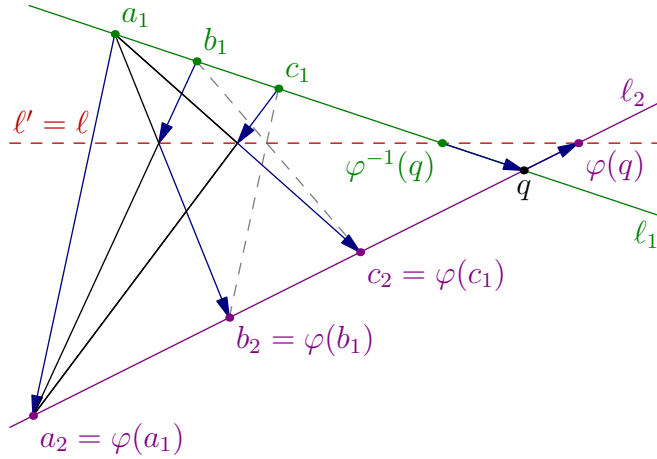


Рис. 17◊4. Равенство  $\ell' = \ell$ .

УПРАЖНЕНИЕ 17.3. Для заданной пары прямых  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$  и гомографии  $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ , переводящей заданные три точки  $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$  в заданные три точки  $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$ , одной линейкой постройте образ  $\varphi(x)$  данной точки  $x \in \ell_1$ .

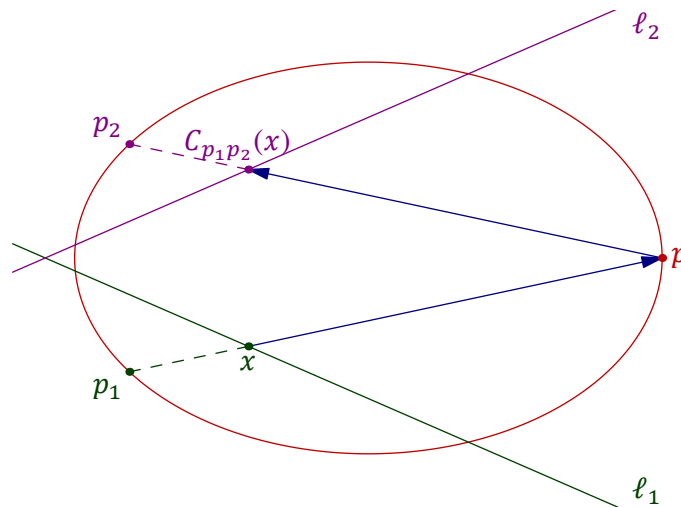


Рис. 17◊5. Гомография  $C_{p_2p_1} : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ .

ЛЕММА 17.2

Для любых двух различных прямых  $\ell_1, \ell_2$  на  $\mathbb{P}_2$ , гладкой коники  $C \subset \mathbb{P}_2$  и точек  $p_1 \in C \setminus \ell_1, p_2 \in C \setminus \ell_2$  отображение  $C_{p_2p_1} : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ , задаваемое композицией центральной проекции  $p_1 : \ell_1 \xrightarrow{\sim} C$  прямой  $\ell_1$  на конику  $C$  из точки  $p_1$  и центральной проекции  $p_2 : C \xrightarrow{\sim} \ell_2$  коники  $C$  на прямую  $\ell_2$  из точки  $p_2$ , является гомографией (см.рис. 17◊5).

Доказательство. Обе проекции  $p_1 : \ell_1 \xrightarrow{\simeq} C$  и  $p_2 : C \xrightarrow{\simeq} \ell_2$  биективны и задаются в однородных координатах на плоскости квадратичными многочленами<sup>1</sup>. Их композиция тоже биективна и задаётся многочленами. Согласно теор. 17.2 на стр. 223 она является гомографией.  $\square$

**17.2.1. Трассировка коники линейкой.** Через любые пять точек  $p_1, p_2, q_1, q_2, q_3$ , никакие три из которых не коллинеарны, проходит единственная гладкая коника<sup>2</sup>  $C$ . Точки этой коники эффективно строятся одной линейкой. Для этого проведём прямые  $\ell_1 = (q_1q_3), \ell_2 = (q_2q_3)$  и отметим какую-нибудь точку  $c \notin \ell_1 \cup \ell_2$ , см. рис. 17◊6. Перспектива  $c : \ell_1 \xrightarrow{\simeq} \ell_2$  действует на точки  $q_3, q_1$  и  $r = \ell_1 \cap (p_1q_2)$  прямой  $\ell_1$  точно также, как гомография  $C_{p_2p_1}$  из лем. 17.2. Поэтому каждая проходящая через точку  $c$  прямая  $\ell$  пересекает прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  в таких точках  $t_1$  и  $t_2$ , что точка  $x(\ell) = (p_1t_1) \cap (p_2t_2)$  лежит на конике  $C$ .

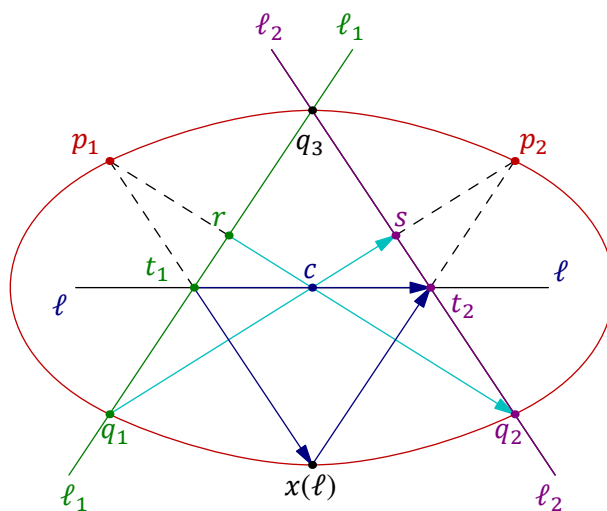


Рис. 17◊6. Трассировка коники линейкой.

Когда  $\ell$  пробежит пучок прямых с центром в  $c$ , точка  $x(\ell)$  нарисует конику  $C$ . Это наблюдение можно переформулировать следующим образом.

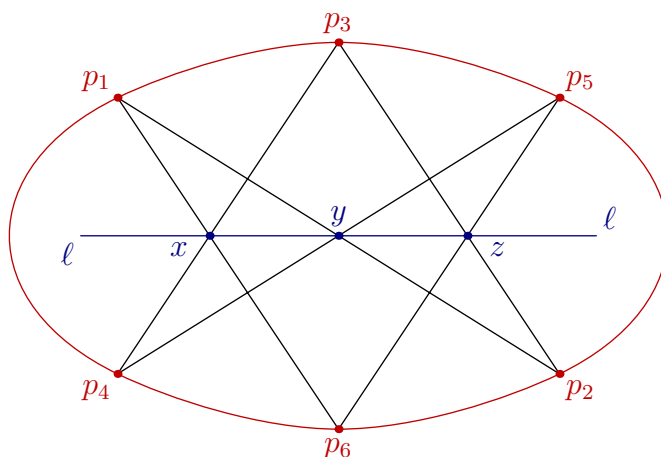


Рис. 17◊7. Гексограмма Паскаля.

<sup>1</sup>См. формулу (16-9) на стр. 214.

<sup>2</sup>См. предл. 16.4 на стр. 220.

**ТЕОРЕМА 17.3 (ТЕОРЕМА ПАСКАЛЯ)**

Точки  $p_1, \dots, p_6$ , никакие три из которых не коллинеарны, лежат на одной гладкой конике если и только если у «шестиугольника»  $p_1, \dots, p_6$  три точки  $x = (p_3p_4) \cap (p_6p_1)$ ,  $y = (p_1p_2) \cap (p_4p_5)$ ,  $z = (p_2p_3) \cap (p_5p_6)$  пересечений пар «противолежащих сторон» коллинеарны, см. рис. 17◊7.

Доказательство. Рассмотрим гладкую конику  $C$ , проходящую через первые пять заданных точек  $p_1, \dots, p_5$  и отождествим рис. 17◊7 с рис. 17◊6, полагая  $\ell_1 = (p_3p_4)$  и  $\ell_2 = (p_3p_2)$ . Если точки  $x, y, z$  коллинеарны, то  $z$  является образом  $x$  при перспективе  $y: (p_3p_4) \rightarrow (p_3p_2)$ , которая совпадает с гомографией  $C_{p_5p_1} = (p_5: C \xrightarrow{\simeq} (p_3p_2)) \circ (p_1: (p_3p_4) \xrightarrow{\simeq} C)$ . Поэтому  $p_6 = (p_5z) \cap (p_3x) \in C$ . Наоборот, если  $p_6 \in C$  и  $z = (p_3p_2) \cap (p_5p_6)$ , то  $z$  является образом  $x$  при гомографии  $C_{p_5p_1}$ , а значит, и при перспективе с центром в  $y$ , откуда  $z \in (xy)$ .  $\square$

**17.2.2. Гомографии между пучками прямых.** Пусть прямые  $\ell_1, \ell_2$  лежат на двойственной плоскости<sup>1</sup>  $\mathbb{P}_2^\times$ , т. е. представляют собою пучки прямых  $\ell_1 = p_1^\times, \ell_2 = p_2^\times$  с центрами в различных точках  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_2$ . Тогда лем. 17.1 и предл. 17.1 переформулируются в терминах исходной плоскости  $\mathbb{P}_2$  следующим образом.

**Следствие 17.2**

Пусть прямые  $\ell_1 \neq \ell_2$  независимо пробегают пучок прямых  $p_1^\times$  с центром в точке  $p_1 \in \mathbb{P}_2$ . Тогда для любой точки  $p_2 \neq p_1$  и любой гомографии  $\varphi: p_1^\times \xrightarrow{\simeq} p_2^\times$  все прямые, соединяющие пары точек вида  $\ell_1 \cap \varphi(\ell_2)$  и  $\ell_2 \cap \varphi(\ell_1)$  пересекаются в одной точке, которая называется *перекрёстным центром* гомографии  $\varphi$  и лежит на прямых  $\varphi(p_1p_2)$  и  $\varphi^{-1}(p_1p_2)$ , совпадающих если и только если гомография  $\varphi$  является перспективой, и в этом случае  $\varphi(p_1p_2) = \varphi^{-1}(p_1p_2) = (p_1p_2)$ .  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ 17.4.** Пусть гомография  $\varphi: p_1^\times \xrightarrow{\simeq} p_2^\times$  переводит заданные три различные прямые  $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3 \ni p_1$  в заданные прямые  $\ell''_1, \ell''_2, \ell''_3 \ni p_2$ . Одной линейкой постройте образ  $\varphi(\ell)$  произвольной прямой  $\ell \ni p_1$ .

**Предложение 17.2**

Пусть гомография  $\varphi: p_1^\times \xrightarrow{\simeq} p_2^\times$  переводит три различные прямые  $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3 \ni p_1$ , отличные от прямой  $(p_1p_2)$ , в прямые  $\ell''_1, \ell''_2, \ell''_3 \ni p_2$ , и пусть  $q_i = \ell'_i \cap \ell''_i$ , где  $i = 1, 2, 3$ . Тогда ГМТ пересечения соответственных прямых  $\ell \cap \varphi(\ell)$  представляет собою единственную конику, проходящую через пять точек  $p_1, p_2, q_1, q_2, q_3$ . Эта коника распадается если и только если гомография  $\varphi$  является перспективой<sup>2</sup>, а для неперспективной гомографии она гладкая:

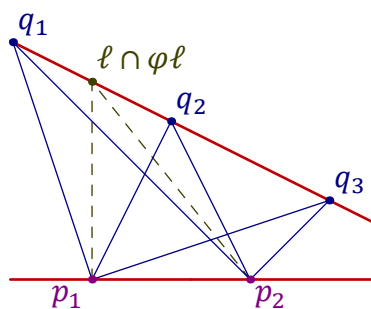


Рис. 17◊8. Перспектива  $\varphi: p_1^\times \rightarrow p_2^\times$ .

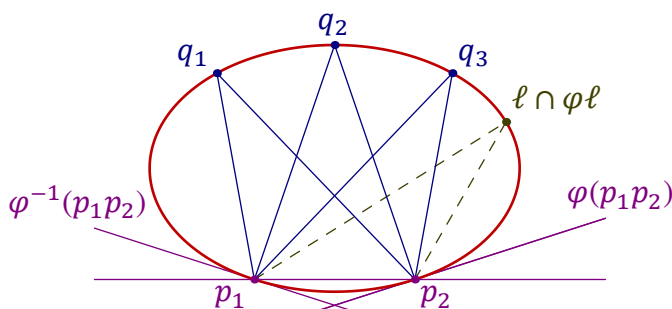


Рис. 17◊9. Неperспективная гомография  $\varphi: p_1^\times \rightarrow p_2^\times$ .

<sup>1</sup>См. п° 16.2.2 на стр. 210.

<sup>2</sup>Что равносильно тому, что гомография  $\varphi$  переводит прямую  $(p_1p_2) = p_1^\times \cap p_2^\times$  в себя.

Наоборот, каждая гладкая коника  $C$ , содержащая точки  $p_1, p_2$  (соотв. каждая прямая  $L$ , не проходящая через  $p_1$  и  $p_2$ ) задаёт гомографию  $C : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$  (соотв.  $L : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$ ), которая переводит прямую  $\ell \ni p_1$  в прямую, соединяющую точку  $p_2$  с точкой  $\ell \cap C$  (соотв.  $\ell \cap L$ ). Гомография  $L : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$  переводит прямую  $(p_1 p_2) = p_1^\times \cap p_2^\times$  в себя и является перспективой. Образом и прообразом прямой  $(p_1 p_2)$  при гомографии  $C : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$  являются касательные прямые  $T_{p_2} C$  и  $T_{p_1} C$  соответственно.

Доказательство. Из условия вытекает, что ни одна из точек  $q_i$  не лежит на прямой  $(p_1 p_2)$  и никакие четыре из пяти точек  $p_1, p_2, q_1, q_2, q_3$  не коллинеарны. По [предл. 16.4](#) на стр. 220 через них проходит единственная коника  $C$ . Если она гладкая, то отображение  $C : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$ , переводящее прямую  $(p_1 p_2)$  в прямую  $(p_2, p_2)$  для каждой точки  $p \in C$ , является гомографией.

УПРАЖНЕНИЕ 17.5. Убедитесь в этом.

Поскольку эта гомография действует на тройку прямых  $\ell'_i$  точно также, как  $\varphi$ , она совпадает с  $\varphi$ , что доказывает предложение в случае, когда  $\varphi$  не является перспективой. Если коника  $C$  распадается в объединение двух прямых, то одна из этих прямых проходит через все точки  $q_i$ , а другая — через  $p_1$  и  $p_2$ . Тем самым, точки  $q_i$  коллинеарны, и гомография  $\varphi$  действует так, как показано на [рис. 17◊8](#). В частности, она переводит прямую  $(p_1 p_2)$  в себя, т. е. является перспективой.  $\square$

**17.3. Двойное отношение.** Рассмотрим проективную прямую  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$  со стандартными однородными координатами  $(x_0 : x_1)$  и стандартную аффинную карту  $U_1$  на ней с координатой  $x = x_0 / x_1$ . Разность аффинных координат  $a = a_0 / a_1$  и  $b = b_0 / b_1$  любых двух точек, лежащих в карте  $U_1$ , с точностью до ненулевого множителя совпадает с определителем однородных координат  $(a_0 : a_1)$  и  $b = (b_0 : b_1)$  этих же точек, поскольку

$$a - b = \frac{a_0}{a_1} - \frac{b_0}{b_1} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_1 b_1} = \frac{\det(a, b)}{a_1 b_1}. \quad (17-3)$$

Для упорядоченной четвёрки различных точек  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_1$  число

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}{(p_1 - p_4)(p_2 - p_3)} = \frac{\det(p_1, p_3) \cdot \det(p_2, p_4)}{\det(p_1, p_4) \cdot \det(p_2, p_3)} \quad (17-4)$$

называется *двойным отношением*<sup>1</sup> этих четырёх точек. Как мы видели в [прим. 17.3](#) на стр. 223, оно равно аффинной координате образа точки  $p_4$  при единственной гомографии, переводящей точки  $p_1, p_2, p_3$  в  $\infty, 0, 1$  с сохранением порядка. Тем самым, двойное отношение четырёх различных точек может принимать любые значения кроме  $\infty, 0$  и  $1$ .

Предложение 17.3

Две упорядоченных четвёрки точек тогда и только тогда переводятся одна в другую гомографией, когда их двойные отношения одинаковы.

Доказательство. Пусть гомографии  $\varphi_p$  и  $\varphi_q$  переводят упорядоченные тройки точек  $p_1, p_2, p_3$  и  $q_1, q_2, q_3$  в тройку  $\infty, 0, 1$ . Если  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ , то  $\varphi_p(p_4) = \varphi_q(q_4)$  и гомография  $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$  переводит  $p_1, p_2, p_3, p_4$  в  $q_1, q_2, q_3, q_4$ . Наоборот, если существует гомография  $\psi$ , переводящая  $p_1, p_2, p_3, p_4$  в  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , то гомография  $\varphi_p \circ \psi^{-1}$  переводит четвёрку  $q_1, q_2, q_3, q_4$  в четвёрку  $\infty, 0, 1, [p_1, p_2, p_3, p_4]$ , откуда  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ .  $\square$

<sup>1</sup>По-английски *cross-ratio*.



Следствие 17.3

Правая часть равенства (17-4) не зависит от выбора однородных координат, а средняя часть, содержащая разности аффинных координат точек, не зависит ни от выбора аффинной карты, ни от выбора локальной аффинной координаты в ней, при условии, что эта карта содержит все четыре точки, т. е. значения  $p_1, p_2, p_3, p_4$  конечны.

Доказательство. Поскольку замена однородных координат является гомографией, первое утверждение следует из предл. 17.3. Второе утверждение является следствием первого.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 17.6. Докажите сл. 17.3 прямым вычислением и убедитесь, что в аффинной карте с нулём в  $b$  и бесконечностью в  $a$  для точек  $c = b + \gamma a$  и  $d = b + \delta a$  с аффинными координатами  $\gamma, \delta \in \mathbb{k}$  двойное отношение  $[a, b, c, d] = \delta/\gamma$ .

Предложение 17.4

Биекция  $\varphi : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_1$  является гомографией если и только если она сохраняет двойные отношения.

Доказательство. Пусть  $\varphi$  переводит точки  $a, b$  и  $c$  в  $\infty, 0$  и  $1$ . Если  $\varphi$  сохраняет двойные отношения, то каждая точка  $t \in \mathbb{P}_1 \setminus \{a, b, c\}$  переходит в точку

$$\varphi(t) = [a, b, c, t] = \frac{(t-b)(c-a)}{(t-a)(c-b)}.$$

Таким образом, преобразование  $\varphi$  дробно линейно.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 17.7. Убедитесь, что подгруппа Клейна<sup>1</sup>  $V_4 \subset S_4$  сохраняет двойное отношение:

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_2, p_1].$$

**17.3.1. Специальные четвёрки точек.** Из упр. 17.7 и прим. 17.2 на стр. 222 вытекает, что при перестановках точек  $p_i$  двойное отношение  $[p_1, p_2, p_3, p_4]$  может принимать самое большее 6 различных значений, и все их можно получить при помощи шести перестановок первых трёх точек. Пусть  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_2, p_1] = t$ . Это аффинная координата образа точки  $p_4$  при гомографии  $\varphi : (p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1)$ . Значение  $[p_2, p_1, p_3, p_4]$  равно координате образа точки  $p_4$  под действием композиции

$$(p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1) \mapsto (0, \infty, 1),$$

вторая стрелка которой действует по правилу  $t \mapsto 1/t$ . Тем самым,

$$[p_2, p_1, p_3, p_4] = [p_1, p_2, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_2, p_1] = [p_4, p_3, p_1, p_2] = 1/t \quad (17-5)$$

Аналогично,  $[p_3, p_2, p_1, p_4]$  и  $[p_1, p_3, p_2, p_4]$  суть образы  $p_4$  под действием композиций

$$(p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1) \mapsto (1, 0, \infty) \quad \text{и} \quad (p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1) \mapsto (\infty, 1, 0),$$

вторые стрелки в которых суть  $t \mapsto t/(t-1)$  и  $t \mapsto 1-t$ . Поэтому

$$\begin{aligned} [p_3, p_2, p_1, p_4] &= [p_2, p_3, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_3, p_2] = [p_4, p_1, p_2, p_3] = t/(t-1) \\ [p_1, p_3, p_2, p_4] &= [p_3, p_1, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_4, p_2, p_3, p_1] = 1-t. \end{aligned} \quad (17-6)$$

<sup>1</sup>См. прим. 17.2 на стр. 222.

Значения  $[p_2, p_3, p_1, p_4]$  и  $[p_3, p_1, p_2, p_4]$  получаются из  $[p_1, p_2, p_3, p_4]$  применением гомографий  $(\infty, 0, 1) \mapsto (1, \infty, 0)$  и  $(\infty, 0, 1) \mapsto (0, 1, \infty)$ , задаваемых правилами  $t \mapsto (t-1)/t$  и  $t \mapsto 1/(1-t)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} [p_2, p_3, p_1, p_4] &= [p_3, p_2, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_2, p_3] = [p_4, p_1, p_3, p_2] = (t-1)/t \\ [p_3, p_1, p_2, p_4] &= [p_1, p_3, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_3, p_1] = [p_4, p_2, p_1, p_3] = 1/(1-t). \end{aligned} \quad (17-7)$$

Формулы (17-5)-(17-7) описывают все возможные значения двойного отношения, возникающие при 24 перестановках точек  $p_1, p_2, p_3, p_4$ . Если  $t \in \mathbb{k}$  таково, что все шесть значений

$$t, \quad 1/t, \quad t/(t-1), \quad 1-t, \quad (t-1)/t, \quad 1/(1-t) \quad (17-8)$$

различны, то никакую перестановку точек  $p_i$  кроме четырёх перестановок из группы Клейна невозможно осуществить дробно линейным преобразованием проективной прямой. Такие четвёрки точек называются *общими*.

При  $t = -1, 2, 1/2$  выполняются равенства  $t = 1/t$ ,  $t = t/(t-1)$  и  $t = 1-t$  соответственно, и двойное отношение  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = t$  не меняется при транспозициях<sup>1</sup>  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$  и  $(1, 4)$ , принимая всего три различных значения при всевозможных перестановках точек. Если  $t^2 - t + 1 = 0$ , то  $t = (t-1)/t = 1/(1-t)$ , а двойное отношение не меняется при всех циклических перестановках точек  $p_1, p_2, p_3$ , принимая всего два различных значения при произвольных перестановках точек. Четвёрки точек с пятью только что перечисленными двойными отношениями называются *специальными*. Геометрически, специальность четвёрки точек означает существование гомографии, осуществляющей перестановку этих точек, отличную от четырёх клейновских перестановок. При перестановках точек, образующих специальную четвёрку, двойное отношение принимает либо три, либо два различных значения.

**17.3.2. Гармонические пары точек.** Четвёрка точек  $\{a, b, c, d\} \in \mathbb{P}_1$  называется *гармонической*, если двойное отношение  $[a, b, c, d] = -1$ . Геометрически это условие означает, что в аффинной карте, для которой точка  $a$  является бесконечностью, точка  $b$  является центром тяжести точек  $c$  и  $d$ . При его выполнении говорят также, что пары точек  $\{a, b\}$  и  $\{c, d\}$  *гармоничны* по отношению друг к другу. Выше мы видели, что гармоничность двух пар точек равносильна тому, что их двойное отношение не меняется при перестановке точек в одной из этих пар<sup>3</sup>. Так как двойное отношение не меняется при перестановке пар между собой как единого целого, гармоничность является симметричным бинарным отношением на множестве неупорядоченных пар точек на  $\mathbb{P}_1$ .

**Пример 17.4** (гармонические пары прямых в четырёхвершиннике, продолжение **прим. 17.2**)

Покажем, что в каждом из трёх пучков прямых с центрами в вершинах  $x, y, z$  треугольника, ассоциированного с четырёхвершинником  $abcd$ , пара сторон четырёхвершинника гармонична паре сторон треугольника  $xуz$ , см. **рис. 17.10** на стр. 232.

Для этого отождествим пучок прямых с центром в  $x$  с прямой  $(ad)$  и с прямой  $(bc)$  как в **упр. 17.2** на стр. 224. Мы должны проверить, что прямая  $(xy)$  пересекает прямые  $(ad)$  и  $(bc)$  по таким точкам  $x'$  и  $x''$ , что  $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = -1$ . Поскольку центральные проекции

<sup>1</sup>А также остальных восьми перестановках из подгруппы, порождённой такой транспозицией и четырьмя клейновскими перестановками.

<sup>2</sup>Т.е.  $t$  является отличным от  $-1$  кубическим корнем из  $-1$  в поле  $\mathbb{k}$ .

<sup>3</sup>См. формулу (17-5) на стр. 230.

из  $x$  и из  $y$  задают гомографии между прямыми  $(ad)$  и  $(bc)$ , мы имеем равенства  $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = [d, a, z, x']$ . Так как при перестановке первых двух точек двойное отношение не поменялось, оно равно  $-1$ .

**17.3.3. Двойное отношение на невырожденной конике.** Есть несколько способов определить двойное отношение  $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C$  четырёх точек  $p_1, p_2, p_3, p_4$  на невырожденной конике  $C \subset \mathbb{P}_2$ . Можно выбрать пятую точку  $p_5 \in C$ , отличную от четырёх данных, и положить  $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C$  равным двойному отношению четырёх прямых  $(p_5 p_i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , в пучке  $p_5^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  всех прямых, проходящих через точку  $p_5$ , или двойному отношению проекций точек  $p_1, p_2, p_3, p_4$  из точки  $p_5$  на какую-нибудь прямую  $\ell \subset \mathbb{P}_2$ . А можно, как в прим. 16.10 на стр. 219, изоморфно отобразить содержащую конику плоскость  $\mathbb{P}_2$  на плоскость  $\mathbb{P}(S^2 \mathbb{k}^2)$  неупорядоченных пар точек на  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$  так, чтобы коника  $C$  биективно отобразилась на состоящую из двойных точек конику Веронезе  $C_2 = \{a^2 \in S^2 \mathbb{k}^2 \mid a \in U\}$ . Если точки  $p_i \in C$  переходят при этом в квадраты  $a_i^2 \in C_2$  точек  $a_i \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ , мы полагаем  $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ . Покажем, что все эти способы корректны<sup>1</sup> и дают одинаковый результат, предполагая для простоты, что основное поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль<sup>2</sup>, чтобы можно было применять теор. 17.2 на стр. 223.

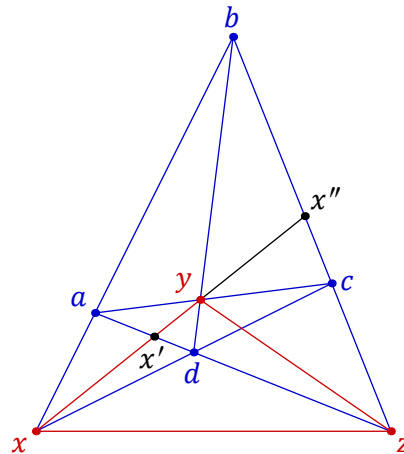


Рис. 17◊10.

Прямые, проходящие через фиксированную точку  $p_5 \in \mathbb{P}_2$ , образуют прямую  $p_5^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ , и для любой прямой  $\ell \subset \mathbb{P}_2$  отображение  $p_5^\times \rightarrow \ell$ , переводящее прямую из пучка  $p_5^\times$  в точку её пересечения с прямой  $\ell$ , является гомографией по упр. 17.2 на стр. 224. Поскольку гомографии сохраняют двойное отношение, двойное отношение прямых  $(p_5 p_i)$  в пучке  $p_5^\times$  равно двойному отношению проекций точек  $p_i$  из точки  $p_5$  на любую прямую  $\ell$ . В частности, последнее одинаково для всех прямых  $\ell$ , не проходящих через точку  $p_5$ .

Для любых двух точек  $a, b \in C$  и не проходящей через них прямой  $\ell$  композиция проекции прямой  $\ell$  на конику  $C$  из точки  $a$  и проекции коники  $C$  обратно на прямую  $\ell$  из точки  $b$  биективна и в однородных координатах на прямой  $\ell$  задаётся рациональными функциями согласно форм. (16-9) на стр. 214. По теор. 17.2 эта композиция является гомографией и сохраняет двойные отношения. Таким образом, двойное отношение проекций точек  $p_i$  на прямую из точки  $p_5 \in C$  не зависит от выбора точки  $p_5$ .

Поскольку композиция вложения Веронезе  $v_2 : \mathbb{P}(\mathbb{k}^2) \rightarrow \mathbb{P}(S^2 \mathbb{k}^2)$ ,  $a \mapsto a^2$ , с проекцией коники Веронезе  $C_2 = \text{im } v_2$  из любой точки  $a^2 \in C_2$  на любую прямую  $\ell \subset \mathbb{P}(S^2 \mathbb{k}^2)$  биективна и задаётся в координатах рациональными функциями, она тоже является гомографией и сохраняет двойные отношения. Поэтому для коники Веронезе двойное отношение проекций любых четырёх двойных точек  $a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2 \in C_2$  на любую прямую  $\ell \subset \mathbb{P}(S^2 \mathbb{k}^2)$  из любой точки на  $C_2$  совпадает с двойным отношением  $[a_1, a_2, a_3, a_4]$  самих точек  $a_i$  на прямой  $\mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ .

<sup>1</sup>Т. е. не зависят ни от выбора точки  $p_5 \in C \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ , ни от выбора прямой  $\ell$ , на которую проектируются точки  $p_i$ , ни от выбора линейного проективного изоморфизма данной коники  $C$  с коникой Веронезе  $C_2$ .

<sup>2</sup>В действительности, это верно для непустой неособой коники над любым полем характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ .

Наконец, пусть заданы два линейных проективных изоморфизма  $\varphi, \psi : \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(S^2\mathbb{k}^2)$ , биективно отображающих данную невырожденную конику  $C \subset \mathbb{P}_2$  на конику Веронезе и переводящих точки  $p_i \in C$  в точки  $a_i^2 = \varphi(p_i)$  и  $b_i^2 = \psi(p_i)$ . Композиция  $\eta = \varphi \circ \psi^{-1}$  является линейным проективным автоморфизмом пространства  $\mathbb{P}(S^2\mathbb{k}^2)$  и переводит конику Веронезе в себя. Ограничение автоморфизма  $\eta$  на любую прямую  $\ell$  является гомографией между прямыми  $\ell$  и  $\eta(\ell)$  и сохраняет двойные отношения. Если точки  $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \ell$  являются образами точек  $b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2 \in C_2$  при проекции из точки  $c^2 \in C_2$ , то их образы  $\eta(q_i)$  суть образы точек  $a_i^2 = \eta(a_i^2)$  при проекции из точки  $\eta(c^2)$  на прямую  $\eta(\ell)$ . Поскольку двойное отношение точек  $q_i$  такое же, как и у точек  $\eta(q_i)$ , вычисленные любым из трёх описанных выше способов двойные отношения точек  $a_i^2$  и точек  $b_i^2$  на конике Веронезе тоже будут одинаковы.

#### Предложение 17.5

Гладкая коника  $C$ , проходящая через пять точек  $p_1, \dots, p_5$ , никакие три из которых не коллинеарны, представляет собою ГМТ  $p$ , таких что в пучке прямых с центром в  $p$  двойное отношение четырёх прямых  $(p, p_i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , равно двойному отношению четырёх прямых  $(p_5, p_i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , в пучке прямых с центром в точке  $p_5$ .

Доказательство. Мы уже видели выше, что все точки  $p \in C$  обладают требуемым свойством. Для любой другой точки  $p$ , обладающей этим свойством, обозначим через  $Q$  конику, проходящую через точки  $p, p_1, p_2, p_3$  и  $p_5$ . Гомография<sup>1</sup>  $Q : p^\times \rightarrow p_5^\times, \forall q \in Q (pq) \mapsto (p_5q)$ , между пучками прямых с центрами в  $p$  и  $p_5$  переводит прямые  $(pp_i)$  в прямые  $(p_5p_i)$  для  $1 \leq i \leq 3$ . Поскольку  $[(p, p_1), (p, p_2), (p, p_3), (p, p_4)] = [(p_5, p_1), (p_5, p_2), (p_5, p_3), (p_5, p_4)]$ , прямая  $(pp_4)$  переходит в прямую  $(p_5p_4)$ , откуда  $p_4 \in Q$ . Но единственная коника, проходящая через пять точек  $p_1, \dots, p_5$ , это коника  $C$ . Поэтому  $Q = C$  и  $p \in C$ .  $\square$

**17.4. Гомографии на непустой гладкой конике.** Биективное преобразование  $\varphi : C \xrightarrow{\sim} C$  невырожденной коники  $C$  называется *гомографией*, если оно сохраняет двойные отношения. Согласно [предл. 17.4](#) на стр. 230 это требование равносильно тому, что для некоторой сохраняющей двойные отношения биекции  $\psi : C \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$  преобразование  $\psi\varphi\psi^{-1} : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$  является гомографией на  $\mathbb{P}_1$ . Если это условие выполняется для какой-нибудь сохраняющей двойные отношения биекции между  $C$  и  $\mathbb{P}_1$ , то по тому же [предл. 17.4](#) оно выполняется для любых таких биекций.

Как и гомография на прямой, гомография на конике однозначно определяется своим действием на какие-нибудь три различные точки.

#### Пример 17.5 (инволюции)

Гомография  $\sigma : C \rightarrow C$  называется *инволюцией*, если она обратна самой себе, т. е.  $\sigma^2 = \text{Id}_C$ . Тожественная инволюция  $\sigma = \text{Id}_C$  называется *тривиальной*. Пусть точки  $a_1, a_2, b_1, b_2$  на конике  $C$  различны и инволюция  $\sigma : C \rightarrow C$  переставляет одноимённые точки  $a_1 \leftrightarrow a_2$  и  $b_1 \leftrightarrow b_2$ , как на [рис. 17.11](#) на стр. 234. Обозначим точку пересечения прямых  $(a_1a_2)$  и  $(b_1b_2)$  через  $s$ . Пучок прямых с центром в  $s$  задаёт биективное преобразование  $\sigma_s : C \xrightarrow{\sim} C$ , переставляющее точки пересечения коники  $C$  с каждой проходящей через  $s$  прямой.

Упражнение 17.8. Убедитесь, что это преобразование рационально.

Следовательно,  $\sigma_s$  является гомографией, а значит, совпадает с инволюцией  $\sigma$ , поскольку действует на четыре точки  $a_1, a_2, b_1, b_2$  также, как и  $\sigma$ . В частности, неподвижными точками инволюции  $\sigma$  являются две точки, образующие видимый из точки  $s$  контур коники  $C$ .

<sup>1</sup>См. [предл. 17.2](#) на стр. 228.

Мы заключаем, что над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  каждая нетривиальная инволюция на проективной прямой или на невырожденной конике имеет ровно две различные неподвижные точки, и для любой пары различных точек  $c, d \in \mathbb{P}_1$  существует единственная инволюция  $\sigma_{cd} : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ , для которой точки  $c$  и  $d$  являются неподвижными. Эта инволюция тогда и только тогда переставляет друг с другом точки  $a, b$ , когда точки  $a^2$  и  $b^2$  коники Веронезе  $C_2 \subset \mathbb{P}_2$  лежат на одной прямой с точкой  $cd \in \mathbb{P}_2$ .

**Упражнение 17.9.** Убедитесь, что для четырёх различных точек  $a, b, c, d$  равенство  $\sigma_{cd}(a) = b$  равносильно гармоничности точек  $a, b$  точкам  $c, d$ , и что в аффинной карте, где  $d = \infty$ , инволюция  $\sigma_{cd}$  выглядит как центральная симметрия относительно  $c$ .

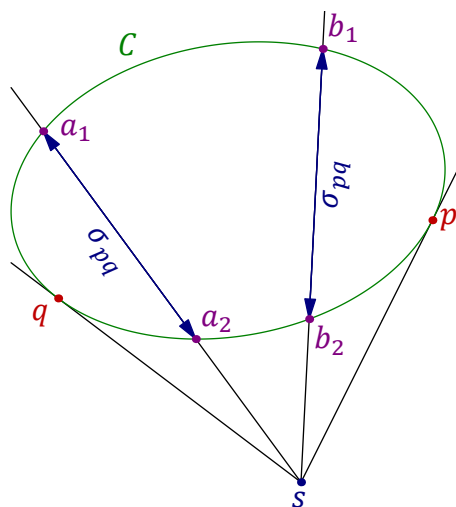


Рис. 17◊11. Инволюция на конике.

**Следствие 17.4**

Над алгебраически замкнутым полем для любых двух различных нетривиальных инволюций  $\sigma, \tau : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$  имеется ровно одна такая пара (возможно, совпадающих друг с другом) точек  $a, b \in \mathbb{P}_1$ , что  $\sigma(a) = b$  и  $\tau(a) = b$ .

**Доказательство.** Пусть точки  $u, w$  на  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$  неподвижны относительно инволюции  $\sigma$ , а точки  $r, s$  — относительно инволюции  $\tau$ . Точки  $a, b$  тогда и только тогда удовлетворяют условиям  $\sigma(a) = b$  и  $\tau(a) = b$ , когда точки  $a^2$  и  $b^2$  коники Веронезе на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U)$  лежат на одной прямой с точками  $uw$  и  $rs$ . Но прямая  $(uw, rs)$  пересекает конику Веронезе ровно по двум, возможно совпадающим, точкам. □

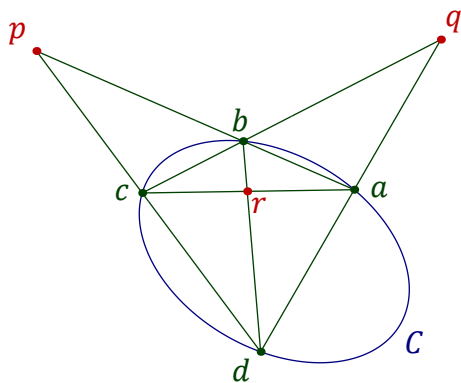


Рис. 17◊12. Коммутирующие инволюции.

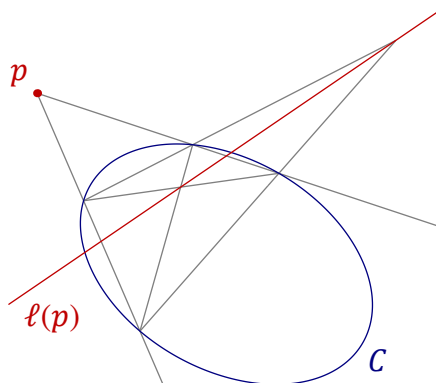


Рис. 17◊13. Построение поляр.

**Пример 17.6 (коммутирующие инволюции и построение Штейнера)**

Из рис. 17◊12 видно, что инволюции коники  $C$  с центрами в точках  $p, q, r$  удовлетворяют соотношениям<sup>1</sup>  $\sigma_p \sigma_q = \sigma_q \sigma_p = \sigma_r$ , ибо все три эти гомографии одинаково действуют на точки  $a, b, c, d$ . Поэтому, если  $\sigma_p(x) = x$ , то  $\sigma_r(x) = \sigma_q \sigma_p(x) = \sigma_q(x)$ , т. е. пара неподвижных точек инволюции  $\sigma_p$  — это единственная пара точек, переводимых друг в друга обеими инволюциями  $\sigma_q$

<sup>1</sup>Т. е. составляют вместе с тождественным преобразованием группу Клейна  $V_4 = \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ .

и  $\sigma_r$ , как в [сл. 17.4](#). Тем самым, прямая  $(qr)$  пересекает конику  $C$  в точках касания с  $C$  пары опущенных из  $p$  на  $C$  касательных, т. е. является полярной<sup>1</sup> точки  $p$  относительно  $C$ . Это позволяет одной линейкой построить полярю  $\ell(p)$  и обе опущенные из  $p$  на  $C$  касательные<sup>2</sup>, см. [рис. 17◊13](#). Наоборот, если две инволюции  $\sigma_p$  и  $\sigma_q$  на конике  $C$  перестановочны, то для любой точки  $a \in C$ , не лежащей на полярах точек  $p$  и  $q$ , мы получаем картинку, представленную на [рис. 17◊12](#), где  $b \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_p(a)$ ,  $d \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_q(a)$ , и заключаем, что стороны  $\Delta pqr$  являются полярами противоположных вершин. Такие треугольники называются *автополярными* относительно  $C$ .

#### Следствие 17.5

Три инволюции на гладкой конике тогда и только тогда составляют вместе с тождественным преобразованием этой коники четвертную группу Клейна  $V_4 = \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ , когда их центры являются вершинами автополярного относительно коники треугольника.  $\square$

#### Пример 17.7 (перекрёстная ось гомографии на конике)

Гомография  $\varphi : C \rightarrow C$ , переводящая три различные точки  $a_1, b_1, c_1 \in C$  в точки  $a_2, b_2, c_2 \in C$  является композицией проекций  $b_2 : C \rightarrow \ell$  и  $b_1 : \ell \rightarrow C$ , где прямая  $\ell$  соединяет точки пересечения  $(a_1 b_2) \cap (b_1 a_2)$  и  $(c_1 b_2) \cap (b_1 c_2)$  пар перекрёстных прямых на [рис. 17◊14](#). Поскольку неподвижные точки гомографии  $\varphi$  суть точки пересечения  $\ell \cap C$ , прямая  $\ell$  не зависит от выбора точек  $a_1, b_1, c_1 \in C$ , а  $\varphi$  имеет либо ровно две неподвижные точки, либо ровно одну, причём последнее означает, что прямая  $\ell$  касается коники  $C$  в этой неподвижной точке. Таким образом, прямая  $\ell$  представляет собой ГМТ пересечения всех перекрёстных прямых  $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$ , где  $x \neq y$  независимо пробегает конику  $C$ . Отсюда получается ещё одно доказательство теоремы Паскаля<sup>3</sup>: три точки пересечений пар противоположных сторон вписанного в  $C$  шестиугольника  $a_1 c_2 b_1 a_2 c_1 b_2$ , будучи точками пересечений перекрёстных прямых гомографии, которая переводит точки  $a_1, b_1, c_1$  в точки  $a_2, b_2, c_2$ , лежат на перекрёстной оси  $\ell$  этой гомографии.

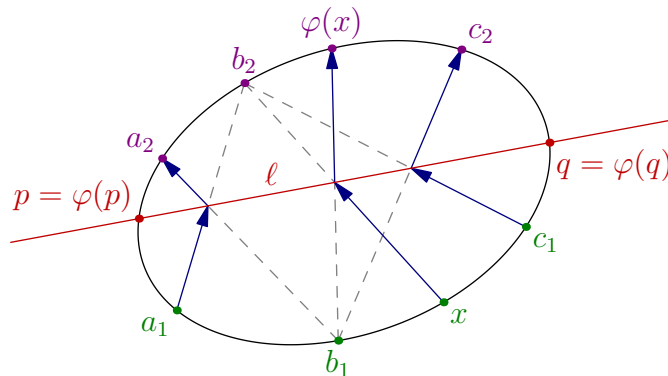


Рис. 17◊14. Перекрёстная ось гомографии на конике.

Перекрёстная ось гомографии  $\varphi : C \rightarrow C$  легко строится одной линейкой, если известно действие  $\varphi$  на какие-нибудь три точки, что позволяет одной линейкой построить образ  $\varphi(z)$  любой точки  $z \in C$ , а также указать неподвижные точки гомографии  $\varphi$ . В частности, это даёт

<sup>1</sup>См. формулу (16-4) на стр. 212.

<sup>2</sup>Такой способ проведения касательных был предложен Якобом Штейнером (1796–1863), см. *Я. Штейнер*. «Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга», Харьковская математическая библиотека, Харьков, 1910.

<sup>3</sup>См. [теор. 17.3](#) на стр. 228.

альтернативный построению Штейнера способ проведения двух касательных к данной конике  $C \subset \mathbb{P}_2$  из данной точки  $s \notin C$  путём отыскания неподвижных точек инволюции  $\sigma_s : C \rightarrow C$ , см. рис. 17◊15.

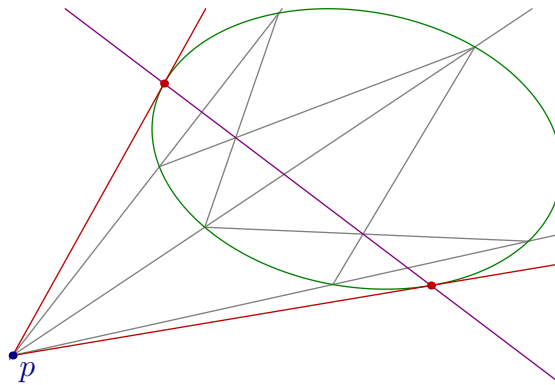


Рис. 17◊15. Построение касательных.

**Предложение 17.6**

Каждая гомография  $\gamma : C \xrightarrow{\sim} C$  невырожденной коники  $C \subset \mathbb{P}_2$  однозначно продолжается до проективного преобразования  $\tilde{\gamma} : \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$ , ограничение которого на  $C$  совпадает с  $\gamma$ , и наоборот, любое проективное преобразование  $\tilde{\gamma} : \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$ , переводящее конику  $C$  в себя, задаёт на ней гомографию.

**Доказательство.** Выберем на конике  $C$  пять точек  $p_1, \dots, p_5$ , и пусть  $\gamma(p_i) = q_i$ . Существует единственное такое проективное преобразование  $\tilde{\gamma} : \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$ , что  $\tilde{\gamma}(p_i) = q_i$  при  $1 \leq i \leq 4$ . Так как оно сохраняет двойные отношения в пучках прямых, при  $1 \leq i \leq 4$  двойные отношения прямых  $(q_5, q_i)$  в пучке  $q_5^\times$  и прямых  $(p_5, p_i)$  в пучке  $p_5^\times$  равны. Последнее из них равно двойному отношению прямых  $(p_5, q_i)$  с  $1 \leq i \leq 4$  в том же пучке  $p_5^\times$ , ибо гомография  $\gamma : C \xrightarrow{\sim} C$  сохраняет двойные отношения точек на конике. Тем самым, для любых пяти точек  $p_1, \dots, p_5 \in C$  двойные отношения прямых проходящих через точки  $p_1, p_2, p_3, p_4$  в пучках  $p_5^\times$  и  $\tilde{\gamma}(p_5)^\times$  равны, откуда  $\tilde{\gamma}(p_5) \in C$  по **предл. 17.5**. Это доказывает первое утверждение предложения. Второе вытекает из того, что сохраняющая двойные отношения точек на конике биекция является гомографией.  $\square$

### Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 17.2. Биективность очевидна. Докажем линейность. Пусть прямая  $\ell \subset \mathbb{P}_2$  аннулируется линейной формой  $\xi \in \mathbb{P}_2^\times$ , и  $a, b \in L$  — две различные точки. Точка  $\ell \cap L = (ab) \cap \text{Ann } \xi = \xi(b) \cdot a - \xi(a) \cdot b$  линейно зависит от  $\xi$ .

Упр. 17.3. Соединяя точки  $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$  и  $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$ , получаем перекрёстную ось  $\ell$ . Точка  $\varphi(x)$  является пересечением прямой  $\ell_2$  с прямой, соединяющей точки  $b_1$  и  $\ell \cap (x, b_2)$ .

Упр. 17.4. Строим точку  $o$  пересечения прямой, проходящей через точки  $\ell'_1 \cap \ell''_2, \ell'_2 \cap \ell''_1$ , и прямой, проходящей через точки  $\ell'_2 \cap \ell''_3, \ell'_3 \cap \ell''_2$ . Поскольку  $o$  является перекрёстным центром гомографии  $\varphi$ , прямая  $\varphi(\ell)$  проходит через  $p_2$  и точку пересечения прямой  $\ell'_1$  с прямой, проходящей через  $o$  и точку  $\ell \cap \ell''_1$ .

Упр. 17.5. Рассмотрим произвольную прямую  $L$ , не проходящую через  $p_1$  и  $p_2$ , и убедитесь, что отображение  $C : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$  является композицией гомографии  $\pi_1 : p_1^\times \xrightarrow{\simeq} L, \ell \mapsto \ell \cap L$  из [упр. 17.2](#) на стр. 224, гомографии  $C_{p_2 p_1} : L \xrightarrow{\simeq} L$  из [лем. 17.2](#) на стр. 226 (где надо положить  $\ell_1 = \ell_1 = L$ ) и обратной к гомографии из [упр. 17.2](#) гомографии  $\pi_2^{-1} : L \xrightarrow{\simeq} p_2^\times$ .

Упр. 17.6. При замене однородных координат все определители в правой части формулы (17-4) умножаются на определитель матрицы замены координат, что не меняет правой дроби. Средняя дробь всегда равна правой в силу вычисления (17-3). Последнее утверждение проверяется выкладкой

$$\frac{\det(a, c)}{\det(a, d)} \cdot \frac{\det(b, d)}{\det(b, c)} = \frac{\det(a, b + \gamma a)}{\det(a, b + \delta a)} \cdot \frac{\det(b, b + \delta a)}{\det(b, b + \gamma a)} = \frac{\delta}{\gamma}.$$

Упр. 17.8. Преобразование, переставляющее изотропные точки на проходящей через  $s$  прямой, представляет собою отражение  $\sigma_s$  в ортогональной к анизотропному вектору  $s \notin C$  гиперплоскости  $s^\perp$ , ср. с [прим. 16.7](#) на стр. 214.

Упр. 17.9. Поскольку  $[a, b, c, d] = [b, a, c, d]$ , двойное отношение  $[a, b, c, d] = -1$ . Наоборот, если  $[a, b, c, d] = -1$ , то отображение, переводящее точку  $x \in \ell$  в единственную такую точку  $y \in \ell$ , что  $[x, y, c, d] = -1$ , является инволютивной гомографией и действует на  $a, b, c, d$  точно также, как инволюция  $\sigma_{c,d}$ .