

Введение в теневой анализ¹

Соглашения. Обозначим через $D : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x], f \mapsto f'$, линейный оператор дифференцирования и сопоставим каждому формальному степенному ряду $\varphi(t) = \sum_{k \geq 0} \varphi_k t^k \in \mathbb{Q}[[t]]$ линейный оператор $\varphi(D) : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x], f \mapsto \sum_{k \geq 0} \varphi_k D^k f = \varphi_0 f + \varphi_1 f' + \varphi_2 f'' + \dots$, а также ковектор $\varphi \in \mathbb{Q}[x]^*$, переводящий многочлен $f(x)$ в число $\langle \varphi, f \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \text{ev}_0(\varphi(D)f)$, равное значению многочлена $\varphi(D)f$ при $x = 0$.

ГЛ4¹/₂♦1. Как действуют на $\mathbb{Q}[x]$ линейные операторы $e^{\alpha D} = \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha^k}{k!} D^k$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$?

ГЛ4¹/₂♦2. Убедитесь, что сопоставление степенным рядам ковекторов задаёт линейный изоморфизм векторных пространств $\mathbb{Q}[[t]] \simeq \mathbb{Q}[x]^*$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{Q}$ укажите ряд, соответствующий функционалу вычисления $\text{ev}_\alpha : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}, f \mapsto f(\alpha)$. Опишите линейные операторы $\mathbb{Q}[[t]] \rightarrow \mathbb{Q}[[t]]$, двойственные к следующим операторам $\mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$:

- а) умножение на $x : f(x) \mapsto x \cdot f(x)$ б) дифференцирование $D : f(x) \mapsto f'(x)$
 в) сдвиг $T_\alpha : f(x) \mapsto f(x + \alpha), \alpha \in \mathbb{Q}$ г) $\Delta : f(x) \mapsto f(x + 1) - f(x)$ и $\nabla : f(x) \mapsto f(x) - f(x - 1)$.

ГЛ4¹/₂♦3. Убедитесь, что отображение $\mathbb{Q}[[t]] \rightarrow \text{End}(\mathbb{Q}[x]), \varphi \mapsto \varphi(D)$, является инъективным гомоморфизмом \mathbb{Q} -алгебр², и докажите, что его образ состоит из всех линейных операторов $F : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$, которые удовлетворяют следующим эквивалентным условиям:

- а) $\forall \alpha \in \mathbb{Q} FT_\alpha = T_\alpha F$ б) $FT_1 = T_1 F$ в) $FT_{-1} = T_{-1} F$ г) $F\Delta = \Delta F$ д) $F\nabla = \nabla F$ е) $FD = DF$.

ГЛ4¹/₂♦4. Докажите равенства $\langle \varphi \psi, x^n \rangle = \langle \varphi, \psi(D)x^n \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle \varphi, x^{n-k} \rangle \langle \psi, x^k \rangle$.

ГЛ4¹/₂♦5. Пусть ряд $\varphi(t) \in \mathbb{Q}[[t]]$ имеет $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_1 \neq 0$. Покажите, что существует единственный такой ряд $\bar{\varphi}(t) \in \mathbb{Q}[[t]]$, что $\bar{\varphi}(\varphi(t)) = t$.

ГЛ4¹/₂♦6*. В условиях предыдущей задачи определим многочлены $p_k(x) \in \mathbb{Q}[x]$ равенством $e^{x\bar{\varphi}(t)} = \sum_{k \geq 0} p_k(x) t^k / k!$. Докажите для любых $\psi \in \mathbb{Q}[[t]]$ и $q \in \mathbb{Q}[x]$ равенства

- а) $\psi = \sum_{k \geq 0} \langle \psi, p_k \rangle \cdot \varphi^k / k!$ б) $q = \sum_{k \geq 0} \langle \varphi^k, q \rangle \cdot p_k / k!$.

ГЛ4¹/₂♦7 (многочлены Аппеля). Многочленами Аппеля ряда $\varphi(t) = \sum_{k \geq 0} \varphi_k t^k \in \mathbb{Q}[[t]]$ называются образы $f_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(D)x^k$ базисных мономов x^k под действием оператора $\varphi(D)$. Покажите, что: а) $\varphi_n = f_n(0)$ б) $f'_n(x) = n f_{n-1}(x)$ в) $f_n(x + y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{n-k}(x) y^k$
 г) $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi_{n-k} x^k = (\varphi^\downarrow + x)^n$, где нисходящая стрелка φ^\downarrow предписывает раскрывать бином $(\varphi + x)^n$, формально заменяя все φ^k на φ_k .

ГЛ4¹/₂♦8 (приложение: суммы степеней). Ряд $\text{td}(t) \stackrel{\text{def}}{=} t / (1 - e^{-t}) = \sum_{k \geq 0} \frac{b_k}{k!} t^k \in \mathbb{Q}[[t]]$ называется рядом Тодда, его коэффициенты b_k — числами Бернулли, а его многочлены Аппеля $B_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{td}(D)x^k$ — многочленами Бернулли. Докажите, что следующие условия на последовательность многочленов $s_n(x) \in \mathbb{Q}[x], n \in \mathbb{N}$, эквивалентны:

- а) $s_{n+1}(m) = 0^n + 1^n + \dots + m^n$ при всех целых $m, n \geq 0$ б) $s_{n+1}(0) = 0$ и $\nabla s_{n+1}(x) = x^n$
 в) $s_{n+1}(0) = 0$ и $Ds_{n+1}(x) = \text{td}(D)x^n$ г) $(n+1)s_{n+1}(x) = B_{n+1}(x) - b_{n+1} = (b^\downarrow + x)^{n+1} - b_{n+1}$.

ГЛ4¹/₂♦9. Покажите, что $(n+1)b_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n+1}{k+1} b_{n-k}$ при всех $n \geq 2, b_0 = 1, b_1 = 1/2, b_2 = 1/6, b_{2k+1} = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Вычислите все b_n с $n \leq 10$ и найдите³ $s_{11}(1000)$.

ГЛ4¹/₂♦10. Положим $c_k(x) = x(x+1) \dots (x+k-1) / k!$ и $c_0(x) = 1$. Докажите, что: а) $\nabla c_k = c_{k-1}$
 б) $f(x) = \sum_{k \geq 0} \nabla^k f(0) \cdot c_k(x) = \sum_{k \geq 0} \nabla^k f(\alpha) \cdot c_k(x - \alpha)$ для всех $f \in \mathbb{Q}[x]$ и $\alpha \in \mathbb{Q}$
 в) $c_n(x + y) = \sum_{k=0}^n c_{n-k}(x) \cdot c_k(y)$, т. е. ряды $C_x(t) = \sum_{k \geq 0} c_k(x) \cdot t^k$ перемножаются по правилу $C_x(t) \cdot C_y(t) = C_{x+y}(t)$.

¹По-латыни: *umbral calculus*.

²Т. е. линейно над \mathbb{Q} и переводит умножение рядов в композицию операторов.

³В те далёкие времена, когда не знали иных калькуляторов кроме счётов, Яков Бернулли (1654–1705) считал сумму десятых степеней первой тысячи натуральных чисел меньше, чем за половину четверти часа.

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
в			
г			
3			
4			
5			
6а			
б			
7а			
б			
в			
г			
8			
9			
10а			
б			
в			