

Линейные операторы на конечномерном пространстве

ГЛ6♦1. Для данной матрицы $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ обозначим через $L_A, R_A, \text{Ad}_A : \text{Mat}_n(\mathbb{k}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ линейные операторы, переводящие матрицу $X \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$, соответственно, в матрицы

$$\text{а) } L_A(X) = AX \quad \text{б) } R_A(X) = XA \quad \text{в*) } \text{Ad}_A(X) = AXA^{-1}.$$

Вычислите следы и определители этих операторов.

ГЛ6♦2*. Для заданной матрицы $A \in \text{Mat}_{n \times n}$ обозначим через $S^2 A$ линейный оператор на пространстве однородных многочленов второй степени от n переменных, переводящий многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ в многочлен $f(y_1, \dots, y_n)$, где $(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot A$. Найдите его след и определитель.

ГЛ6♦3. Найдите собственные числа, собственные подпространства и минимальный многочлен оператора $\sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ на пространстве $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]_{\leq n}$ многочленов степени не выше n .

ГЛ6♦4. Линейный оператор $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет матрицу с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на побочной диагонали и нулями в остальных местах. Когда он диагонализуем?

ГЛ6♦5. Пусть $m \geq n$. Верно ли, что для любой пары линейных отображений $F : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^m$ и $G : \mathbb{k}^m \rightarrow \mathbb{k}^n$ отношение характеристических многочленов $\chi_{FG}(t)/\chi_{GF}(t) = t^{m-n}$?

ГЛ6♦6. Пусть минимальный многочлен оператора $F : V \rightarrow V$ является произведением попарно взаимно простых многочленов g_i . Покажите, что $V = \bigoplus U_i$, где $F(U_i) \subset U_i$ и минимальный многочлен ограничения $F|_{U_i}$ равен g_i при всех i .

ГЛ6♦7 (циклические векторы). Вектор $v \in V$ называется *циклическим* для линейного оператора $F : V \rightarrow V$, если векторы вида $F^k v$, где $k \geq 0$, линейно порождают V . Верно ли, что каждый ненулевой вектор является циклическим для F , если **а)** характеристический многочлен оператора F неприводим **б)** степень минимального многочлена оператора F равна $\dim V$? **в)** Приведите пример линейного оператора без циклических векторов.

ГЛ6♦8. Покажите, что любые два коммутирующих линейных оператора $F, G : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ в некотором базисе можно одновременно записать верхнетреугольными матрицами.

ГЛ6♦9. Имеются ли в пространстве $\text{End}(\mathbb{C}^n)$ линейные подпространства размерности $(n+1)$, состоящие из попарно коммутирующих друг с другом диагонализуемых операторов?

ГЛ6♦10. Найдите ЖНФ квадрата $J_m^2(\lambda)$ жордановой клетки размера $m \times m$ с собственным числом **а)** $\lambda \neq 0$ **б)** $\lambda = 0$.

ГЛ6♦11*. Найдите $f(J_m(\lambda))$ для аналитической¹ в окрестности $\lambda \in \mathbb{C}$ функции $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

ГЛ6♦12*. Пусть оператор $F : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ имеет $\text{tr } F^k = 0$ при всех $1 \leq k \leq n$. Верно ли, что F нильпотентен?

ГЛ6♦13*. Пусть операторы A и B таковы, что $AB - BA = B$. Покажите, что B нильпотентен.

ГЛ6♦14*. Всякая ли квадратная матрица сопряжена² своей транспонированной?

ГЛ6♦15*. Пусть минимальный многочлен оператора $F : V \rightarrow V$ имеет степень $\dim V$. Покажите, что всякий перестановочный с F линейный оператор является многочленом от F .

ГЛ6♦16*. Пусть поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, и оператор $G : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ перестановочен со всеми операторами, которые перестановочны с оператором $F : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$. Обязательно ли G является многочленом от F ?

¹Функция $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, определённая в открытой окрестности U точки $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *аналитической* в этой окрестности, если для любого $z_0 \in U$ существуют такие $c_k \in \mathbb{C}$, что степенной ряд $\sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k$ имеет ненулевой радиус сходимости $r \leq \infty$, и $f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k$ для всех $z \in U$ с $|z - z_0| < r$.

²Матрицы $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ называются *сопряжёнными* если $A = CBC^{-1}$ для некоторой матрицы $C \in \text{GL}_n(\mathbb{k})$.

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
2			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
8			
9			
10а			
б			
11			
12			
13			
14			
15			
16			