

Евклидова геометрия

- ГЛ7♦1.** Три вектора в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 таковы, что все скалярные произведения между ними неотрицательны. Всегда ли найдётся такой ортонормальный базис в \mathbb{R}^3 , что все три эти вектора окажутся в одном координатном октанте?
- ГЛ7♦2.** Какое максимальное число векторов можно выпустить из начала координат n -мерного евклидова пространства так, чтобы все попарные углы между ними были тупыми?
- ГЛ7♦3.** Сколько трёхмерных плоскостей симметрии у четырёхмерного куба?
- ГЛ7♦4.** В стандартном n -мерном симплексе $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 1, x_i \geq 0\}$ найдите
 а) угол между ребром и противоположащей ему $(n - 2)$ -мерной гранью¹
 б) расстояние между не пересекающимися гранями размерностей k и m .
- ГЛ7♦5* (октаплекс).** Нарисуем в \mathbb{R}^4 стандартный куб I^4 и гомотетичный стандартному куб, все вершины которого лежат на описанной вокруг I^4 сфере. Выпуклая оболочка вершин куба и кокуба называется *октаплексом*. Подсчитайте у него
 а) количество граней в каждой из размерностей
 б) длины рёбер и радиус вписанного шара
 и выясните,
 в) как выглядят трёхмерные гиперграни и каковы их объёмы
 г) как выглядят двумерные грани и каковы их площади.
- ГЛ7♦6 (движения евклидова пространства \mathbb{R}^3).** Пусть τ_v, σ_π и $\varrho_{v,\varphi}$ обозначают, соответственно, сдвиг на вектор v , отражение в плоскости π и поворот вокруг прямой с направляющим вектором v на угол φ против ЧС, если глядеть вдоль v . Выясните, когда имеют место написанные ниже равенства, и во всех случаях, когда они верны, выразите параметры движения в правой части через параметры движений из левой:
 а) $\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2} = \varrho_{v,\varphi}$ б) $\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2} = \tau_v$ в) $\sigma_\pi \circ \varrho_{u,\varphi} \circ \sigma_\pi = \varrho_{v,\psi}$
 г) $\varrho_{u,\varphi} \circ \varrho_{w,\psi} = \tau_v \circ \varrho_{v,\vartheta}$ д) $\varrho_{u,\varphi} \circ \sigma_\pi \circ \varrho_{u,-\varphi} = \sigma_{\pi_2}$ е) $\varrho_{u,\varphi} \circ \sigma_{\pi_1} = \sigma_{\pi_2}$
 ж) $\tau_{u_2} \circ \sigma_{\pi_2} \circ \tau_{u_1} \circ \sigma_{\pi_1} = \tau_v \circ \varrho_{v,\varphi}$, где каждый вектор сдвига u_i параллелен соответствующей плоскости отражения π_i .
- ГЛ7♦7.** Обозначим через ϱ_{AB} поворот трёхмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 на угол π вокруг прямой AB , а через σ_{ABC} — отражение в плоскости ABC . Пусть точки A, B, C, D являются вершинами правильного тетраэдра. Опишите движение²
 а) $\varrho_{AD} \circ \varrho_{AC} \circ \varrho_{AB}$ б) $\sigma_{ADB} \circ \sigma_{ACD} \circ \sigma_{ABC}$.
- ГЛ7♦8.** Чему равна композиция отражений $\sigma_{e_1} \sigma_{e_2} \dots \sigma_{e_n}$ евклидова координатного пространства \mathbb{R}^n в стандартных координатных гиперплоскостях e_i^\perp при $n = 2, 3, 4, \dots$?
- ГЛ7♦9.** Убедитесь, что векторное произведение $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ кососимметрично³, и не ассоциативно, но удовлетворяет *правилу Лебница*⁴ $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w + v \times (u \times w)$.
- ГЛ7♦10.** Докажите для векторных произведений в \mathbb{R}^3 равенства
 а) $[a, [b, c]] = b \cdot (a, c) - c \cdot (a, b)$
 б) $[[a, b], [a, c]] = a \cdot \det(a, b, c)$
 в) $[[a, b], [c, d]] = \det \begin{pmatrix} (a, c) & (a, d) \\ (b, c) & (b, d) \end{pmatrix}$.

¹Т. е. аффинной оболочкой $n - 1$ вершин, не являющихся концами этого ребра.

²Если это отражение, то в какой плоскости, если поворот — вокруг какой оси и на какой угол.

³Т. е. $v \times v = 0$ для всех v .

⁴Которое часто записывают в виде $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ и называют *тождеством Якоби*.