Выпуклые фигуры

ГЛ9◇1. На прямоугольном столе лежит несколько салфеток прямоугольной формы со сторонами, параллельными краям стола. Докажите, что **а)** если любые две салфетки пересекаются, то и все салфетки пересекаются **б*)** если каждая салфетка пересекает как минимум 3/4 остальных, то есть салфетка, пересекающаяся со всеми. **в*)** Обобщите эти факты на старшие размерности.

ГЛ9◇2* (лемма Каратеодори). Докажите, что каждая точка из выпуклой оболочки любого множества точек $X \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклой комбинацией не более $n+1$ точек из X.

ГЛ9◇3*. Докажите, что любое конечное покрытие аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ аффинными полупространствами содержит подпокрытие, состоящее из $n+1$ полупространств.

ГЛ9◇4* (теорема Хелли). Некое множество замкнутых выпуклых фигур в $\mathbb{R}^n$ содержит компактную фигуру, и любые $n+1$ фигур в этом множестве имеют непустое пересечение. Докажите, что пересечение всех фигур непусто.

ГЛ9◇5*. Докажите, что любое пятно на скатерти, расстояние между каждыми двумя точками которого не превышает 1, накрывается блюдцем радиуса $\sqrt{3}/3$.

ГЛ9◇6. Покажите, что минимальная по включению грань выпуклого многогранного конуса σ является векторным подпространством и равна $\sigma \cap (-\sigma)$, где $-\sigma \overset{\text{def}}{=} \{v \in V \mid -v \in \sigma\}$.

ГЛ9◇7 (двойственные конусы). *Двойственным* к выпуклому многогранному конусу $\sigma \subset V$ называется конус $\sigma^\vee = \{\xi \in V^* \mid \forall\, v \in \sigma\ \xi(v) \geqslant 0\}$, лежащий в двойственном к V пространстве V^*. Покажите, что $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$, т. е. $\sigma = \{v \in V \mid \xi(v) \geqslant 0\ \ \forall\, \xi \in \sigma^\vee\}$.

ГЛ9◇8. Докажите, что следующие условия на выпуклый многогранный конус $\sigma \subset V$ эквивалентны: **а)** σ не содержит ненулевых векторных подпространств **б)** $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ **в)** $\sigma^\vee$ линейно порождает V^* **г)** $\exists\, \xi \in \sigma^\vee : \sigma \cap \mathrm{Ann}(\xi) = \{0\}$.

ГЛ9◇9. Пусть оба конуса σ и $\sigma^\vee$ не содержат ненулевых векторных подпространств. Верно ли что они имеют одинаковое число одномерных граней?

ГЛ9◇10. Покажите, что выпуклый многогранный конус η является гранью выпуклого многогранного конуса σ если и только если $\eta \subset \sigma$ и $\forall\, v_1, v_2 \in \sigma\ v_1 + v_2 \in \eta \Rightarrow v_1, v_2 \in \eta$.

ГЛ9◇11. Пусть выпуклые многогранные конусы σ_1 и σ_2 пересекаются по общей грани τ. Верно ли, что $\tau = \sigma_1 \cap \mathrm{Ann}(\xi) = \sigma_2 \cap \mathrm{Ann}(\xi)$ для некоторого $\xi \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee$?

ГЛ9◇12. Сопоставим k-мерной грани τ выпуклого многогранного конуса[1] $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ множество $\mathrm{Ann}(\tau) \cap \sigma^\vee \subset V^*$. Покажите, что при всех $0 \leqslant k \leqslant \dim \sigma$ таким образом получается корректно определённая и обращающая включения биекция между k-мерными гранями конуса σ и $(n-k)$-мерными гранями двойственного конуса $\sigma^\vee$.

ГЛ9◇13. Обозначим через $W \subset V$ линейную оболочку грани τ выпуклого многогранного конуса $\sigma \subset V$. Покажите, что $\sigma + W$ является выпуклым многогранным конусом в фактор пространстве V/W, причём его грани суть в точности множества вида $\eta + W$, где η пробегает все содержащие τ грани конуса σ.

ГЛ9◇14. Рассмотрим выпуклый многогранник $M \subset \mathbb{R}^n$, не содержащий аффинных подпространств положительной размерности, и произвольный ковектор $\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Верно ли, что: **а)** M содержится в каждом выпуклом многогранном конусе с вершиной в вершине M, натянутом на все выходящие из этой вершины рёбра **б)** из любой вершины M можно пройти в любую другую, двигаясь только по рёбрам **в)** если ξ ограничен на M сверху, то $\max_{x \in M} \xi(x)$ достигается в некоторой вершине M **г)** для того, чтобы ξ достигал своего максимума на M в вершине p, необходимо и достаточно, чтобы ξ не увеличивал своё значение вдоль всех выходящих из p рёбер?

[1] Случай $\dim \sigma < n$ тоже допускается.