

Проективные квадрики

ГЛ12♦1. На гладкой конике C задана точка $p \in C$. Одной линейкой постройте а) касательную прямую $T_p C$ б) (задача Мишустина) проходящую через p прямую, сопряжённую относительно C данной прямой $\ell \not\equiv p$.

ГЛ12♦2. Покажите, что на гладкой конике C : а) две инволюции $C \simeq C$ коммутируют друг с другом если и только если пары их неподвижных точек гармоничны на C б) три инволюции $C \simeq C$ тогда и только тогда составляют вместе с тождественным преобразованием Id_C группу Клейна $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$, когда прямые, соединяющие пары их неподвижных точек, образуют автополярный относительно C треугольник.

ГЛ12♦3*. Одной линейкой постройте описанный около данной гладкой коники треугольник с вершинами на трёх заданных прямых. Сколько решений может иметь эта задача в принципе и сколько при достаточно общем расположении прямых и коники?

ГЛ12♦4*. Сформулируйте и решите двойственную к предыдущей задаче.

ГЛ12♦5. Квадрика Серре $S \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{End } U)$ состоит из линейных операторов ранга 1 на векторном пространстве $U \simeq \mathbb{k}^2$. Покажите, что:

- а) касательное пространство к S в точке $v \otimes \xi : u \mapsto v \cdot \xi(u)$, где $u \in U, \xi \in U^*$, является проективизацией векторного пространства $\{f : U \rightarrow U \mid f(\text{Ann } \xi) \subset \mathbb{k} \cdot v\}$
- б) каждая лежащая в $\text{PGL}(U) = \mathbb{P}_3 \setminus S$ гомография $\bar{f} : \mathbb{P}(U) \simeq \mathbb{P}(U)$ переводит $a \in \mathbb{P}(U)$ в такую точку $b \in \mathbb{P}(U)$, что плоскость, проходящая в \mathbb{P}_3 через точку \bar{f} и лежащую на S прямую $\mathbb{P}(U) \otimes a^\times$, где $a^\times \in \mathbb{P}(U^*), a^\times(v) = \det(v, a)$, пересекает квадрику S по объединению прямых $\mathbb{P}(U) \otimes a^\times$ и $b \otimes \mathbb{P}(U^*)$.

ГЛ12♦6. Даны четыре попарно не пересекающиеся прямые в а) $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ б) $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ в) $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Сколько прямых пересекает все четыре данные прямые? Укажите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых.

ГЛ12♦7. Покажите, что проекция непустой гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \in Q$ на произвольную гиперплоскость $\Gamma \not\equiv p$ задаёт бирациональную биекцию¹ между дополнением $Q \setminus T_p Q$ и аффинным пространством² $\Gamma \setminus T_p Q \simeq \mathbb{A}^{n-1}$.

ГЛ12♦8. Из скольких точек состоит квадрика $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_3^2 = 0$ в \mathbb{P}_3 над полем³ \mathbb{F}_9 в зависимости от параметра $\alpha \in \mathbb{F}_9$?

ГЛ12♦9. Покажите, что на непустой гладкой квадрике в \mathbb{P}_n над бесконечным полем всегда найдутся $n + 2$ точки, никакие $n + 1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости.

ГЛ12♦10*. Сопоставим каждой прямой $(ab) \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ точку $a \wedge b \in \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(L^2 V)$. Покажите, что это правило корректно задаёт биекцию между множеством прямых в \mathbb{P}_3 и точками квадрики Плюккера $P = \{\omega \in \mathbb{P}_5 \mid \omega \wedge \omega = 0\}$. Убедитесь, что квадрика Плюккера гладкая и что она пересекает касательное пространство $T_\ell P$, где $\ell \in P$ — точка, соответствующая прямой $\ell \subset \mathbb{P}_3$, по множеству точек, которые соответствуют всевозможным пересекающимся с ℓ прямым в \mathbb{P}_3 .

ГЛ12♦11*. В пространстве \mathbb{P}_3 над бесконечным полем заданы шесть точек p_{ij} , занумерованных парами цифр $1 \leq i < j \leq 4$, причём никакие четыре из этих точек не компланарны. Покажите, что плоскости⁴ $(p_{12}p_{13}p_{14}), (p_{12}p_{23}p_{24}), (p_{13}p_{23}p_{34}), (p_{14}p_{24}p_{34})$ пересекаются в одной точке если и только если плоскости⁵ $(p_{12}p_{23}p_{13}), (p_{12}p_{24}p_{14}), (p_{13}p_{14}p_{34}), (p_{23}p_{24}p_{34})$ пересекаются в одной точке.

¹Соответствие между проективными многообразиями называется бирациональным, если однородные координаты соответствующих друг другу точек являются рациональными функциями друг друга.

²Заодно убедитесь, что $\Gamma \setminus T_p Q$ это действительно \mathbb{A}^{n-1} .

³Поле $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 1)$ состоит из чисел вида $a + b\sqrt{-1}$, где $a, b \in \mathbb{Z}/(3)$ и $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \in \mathbb{Z}/(3)$.

⁴Натянутые на тройки точек с имеющими одну общую цифру парами индексов.

⁵Натянутые на тройки точек с не содержащими некоторую цифру парами индексов.