

**ГОДОВОЙ КУРС «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»  
ПРОГРАММА ВТОРОГО ПОЛУГОДИЯ (ВЕСЕННЕГО СЕМЕСТРА)**

интенсивность занятий: 1,5 пары лекций + 1,5 пары упражнений в неделю  
темы, набранные *курсивом* могут стать необязательными или упраздниться вовсе.

**ТРЕТЬЯ ЧЕТВЕРТЬ (10 – 11 НЕДЕЛЬ)**

10–16 января. Евклидовы пространства: ортогонализация, евклидов объём и ориентация, матрицы Грама и как они преобразуются при замене координат, определитель Грама равен квадрату евклидова объёма, вычисление углов и расстояний между подпространствами. Ортогональные дополнения и ортогональное проектирование, евклидово двойственные базисы, метод наименьших квадратов, общий перпендикуляр к набору векторов, векторные произведения.

17–23 января. Ортогональные преобразования и движения, описание движений трёхмерного пространства. Отражения в гиперплоскостях, композиция отражений является поворотом, разложение ортогонального оператора в композицию отражений и в ортогональную сумму поворотов в двумерных плоскостях. *Простота группы  $SO_3(\mathbb{R})$ .*

24–30 января. SVD-разложение операторов между евклидовыми пространствами и полярное разложение невырожденного линейного оператора. *Полный ортогональный инвариант пары подпространств в евклидовом пространстве.*

31 января – 6 февраля. Элементы выпуклой геометрии: выпуклость внутренности и замыкания, грани и крайние точки, замкнутая выпуклая фигура является пересечением своих опорных полупространств. *Перечисление граней выпуклых многогранников, теоремы Фаркаша – Минковского – Вейля.*

**Контрольная № 4: вещественные аффинные и евклидовы пространства.**

7–13 февраля. Билинейные формы: корреляции<sup>1</sup>, матрицы Грама, ранг. Невырожденные билинейные формы: биекция между формами и операторами, *канонический оператор Серра*, ортогоналы и ортогональные проекции, размерность изотропного подпространства невырожденной формы на  $V$  не превышает  $\dim V / 2$ . Симметричные и кососимметричные формы, невырожденность ограничения на дополнительное подпространство к ядру и на фактор по ядру, разложение произвольной формы в сумму симметричной и кососимметричной.

14–20 февраля. Квадратичные формы: поляризация, определитель Грама, невырожденность, приведение к сумме квадратов и его специализации над полями  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{F}_p$ . Канонический вид самосопряжённого оператора на пространстве с невырожденной квадратичной формой. Отражения, группа изометрий порождается отражениями в гиперплоскостях.

21–27 февраля. Гиперболические формы, всякий базис в изотропном пространстве половинной размерности дополняется до гиперболического базиса, изометрии двумерного гиперболического пространства. Лемма Витта, разложение векторного пространства с невырожденной квадратичной формой в ортогональную сумму гиперболического и анизотропного. Независимость сигнатуры вещественной формы от выбора базиса и отыскание сигнатуры по последовательности главных угловых миноров. *Описание анизотропных форм над полями  $\mathbb{F}_p$ .*

28 февраля – 6 марта. Кососимметричные формы. Нормальная форма Дарбу, всякий базис лагранжева подпространства невырожденной формы дополняется до симплектического базиса. Грассмановы многочлены: внешняя алгебра векторного пространства, линейные замены переменных и разложение определителя по набору строк, *определитель пучка матриц*, грассмановы квадратичные формы, пфаффиан кососимметричной матрицы.

**Контрольная № 5: билинейные и квадратичные формы.**

<sup>1</sup>Линейные отображения  $V \rightarrow V^*$  («опускание индекса»), задаваемые билинейной формой.

7–13 МАРТА. Проективные пространства, проективизация, примеры:  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \simeq S^1$ ,  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \simeq S^2$ ,  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \simeq$  лента Мёбиуса с заклеенной диском границей,  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4) \simeq \text{SO}_3(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1}) = \mathbb{k}^n \sqcup \dots \sqcup \mathbb{k}^0$ . Каждая точка  $v \in \mathbb{P}(V)$  покрывается аффинным пространством, ассоциированным с векторным пространством  $V / \mathbb{k} \cdot v$ , локальные аффинные координаты, стандартные аффинные карты. Однородные координаты и задание фигур однородными уравнениями, пространства фигур, пример:  $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U)$  как множество неупорядоченных наборов из  $d$  точек на  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ , *нормальные рациональные кривые*.

14–20 МАРТА. Словарик «Линейная алгебра – проективная геометрия»: проективные подпространства, размерности пересечений и линейных соединений, дополнительные подпространства и проекции. Проективная двойственность: соответствие  $\mathbb{P}(U) \leftrightarrow \mathbb{P}(\text{Ann } U)$  задаёт оборачивающую включение биекцию между подпространствами размерности  $k$  и  $n - k - 1$  в пространствах  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  и  $\mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(V^*)$  и переводит пересечения в линейные соединения. Проективные квадрики: касательное пространство, всякая квадрика является линейным соединением пространства особых точек и гладкой квадрики в дополнительном подпространстве.

21–27 МАРТА. Проективное преобразование пространства  $\mathbb{P}_n$  однозначно задаётся действием на  $n + 2$  точки, никакие  $n + 1$  из которых не лежат в одной гиперплоскости. Группа  $\text{PGL}(V)$ . Проективная прямая, дробно линейные преобразования, двойное отношение, гармонические пары точек. Плоскость  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 U)$  как множество неупорядоченных пар точек на  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ , коника Веронезе, инволюции проективной прямой.

#### ЧЕТВЁРТАЯ ЧЕТВЕРТЬ (9–10 НЕДЕЛЬ)

4–10 АПРЕЛЯ. Плоская проективная геометрия: разложение гомографии<sup>1</sup> в композицию проекций, построения одной линейкой, перспективные треугольники, теоремы Дезарга, четырёхвершинник и эпиморфизм  $S_4 \rightarrow S_3$ . Рациональная параметризация непустой гладкой коники, задание гомографий кониками, гомографии на конике, теорема Паскаля и трассировка коники линейкой.

11–17 АПРЕЛЯ. Полярное преобразование относительно гладкой квадрики, двойственная квадрика. Пересечение гладкой квадрики с гиперплоскостью, линейные подпространства, лежащие на гладкой квадратике над алгебраически замкнутым полем и над  $\mathbb{R}$ . Проективная классификация квадратик над  $\mathbb{C}$  и над  $\mathbb{R}$ . Примеры: квадрика Сегре в  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{End } \mathbb{k}^2)$ , квадрика Плюккера в  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{k}^4)$  и геометрия прямых в  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^4)$ . Пространство квадратик, примеры: пространство коник и пространство квадратичных поверхностей в  $\mathbb{P}_3$ .

18–24 АПРЕЛЯ. Пучки квадратик, коранг особой квадрики пучка не меньше кратности соответствующего корня характеристического многочлена. Простой пучок<sup>2</sup> с точностью до проективного преобразования объемлющего пространства однозначно определяется набором корней характеристического многочлена, рассматриваемым с точностью до дробно-линейного преобразования прямой, параметризующей пучок. Пучок прост тогда и только тогда, когда две задающие его квадрики пересекаются трансверсально<sup>3</sup>. *Одновременная диагонализация регулярной пары квадратичных форм*. Пример: классификация пучков коник. *Касательное пространство к проективной гиперповерхности. Связь геометрии пучка коник с его расположением относительно гиперповерхности особых коник*.

25–30 АПРЕЛЯ. Комплексное проективное описание евклидовых коник: асимптоты, центр, фокусы, директрисы, главные оси и как находить всё это «в уме». Фокальные свойства гладких коник.

#### Контрольная № 6: проективная геометрия и евклидовы коники.

10–15 МАЯ. Вложение аффинной группы в проективную в качестве нормализатора бесконечной гиперплоскости. Аффинные квадрики: гладкие центральные квадрики, параболоиды, простые конусы и цилиндры; их явное описание над  $\mathbb{C}$  и над  $\mathbb{R}$ , планарность вещественных квадратик.

<sup>1</sup>Т. е. дробно линейного преобразования между проективными прямыми.

<sup>2</sup>Пучок квадратик на  $\mathbb{P}_n$ , содержащий ровно  $n + 1$  различных особых квадратик.

<sup>3</sup>Т. е. коразмерность пересечения касательных пространств в каждой точке пересечения (включая особые точки) равна двум.

16–22 мая. Евклидова геометрия квадрик, полуоси гладких квадрик в евклидовом аффинном пространстве. Метрические свойства кривых и поверхностей второго порядка.

23–29 мая. Геометрия сфер: инверсии, группа Мёбиуса, пространство сфер, пучки сфер.

30 мая – 5 июня. Внутренняя геометрия сферы: сферическая метрика и неравенство треугольника, площадь сферического треугольника. *Элементы эллиптической геометрии: кратчайший геодезический отрезок, медиаторы, группа изометрий порождается отражениями в плоскостях и совпадает с проективизацией ортогональной группы, эллиптические треугольники первого и второго рода, конфигурации попарно равноудалённых точек на эллиптической плоскости и правильные многогранники в  $\mathbb{R}^3$ .*

6–12 июня. Примеры групп, порождённых отражениями. Образующие и соотношения для групп платоновых тел в  $\mathbb{R}^3$  и симметрической группы  $S_n$ . *Классификация правильных многогранников и групп Кокстера.*

**Контрольная №7: евклидовы квадрики и сферы.**

12–19 июня. Доделывание недоделок.