Векторы, точки, прямые, площади…

ГС1◇1. В пространстве $\mathbb{R}^3$ обозначим через a, b, c векторы, ведущие из вершины D параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ в соединённые ребром с противоположной к D вершиной B' вершины A', B, C' соответственно. Выразите через векторы a, b, c вектор **а)** $\overrightarrow{AC}$ **б)** $\overrightarrow{DB'}$ **в)** $\overrightarrow{CA'}$ **г)** $\overrightarrow{DM}$, где M — точка пересечения медиан в $\triangle B'D'C$.

ГС1◇2. Предположим, что во вселенной[1] все галактики[2] разлетаются прямо от нашей галактики со скоростями, пропорциональными[3] их радиус-векторам. Какую картину видят жители иной галактики?

Аффинная плоскость. Всюду далее речь идёт про двумерное координатное векторное пространство $V \simeq \simeq \Bbbk^2$ над произвольным полем[4] $\Bbbk$ и ассоциированную с ним аффинную плоскость $\mathbb{A}(V)$.

ГС1◇3 (правило Крамера). Выразите вектор $v = (3, -1)$ через векторы **а)** $a = (1, 5)$, $b = (-2, 3)$ **б)** $a = (1, 2)$, $b = (2, 1)$.

ГС1◇4. Какова площадь параллелограмма с вершинами в точках $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 5)$?

ГС1◇5. Какова на вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$ минимальная площадь параллелограмма с вершинами в точках с целыми координатами? Может ли такой параллелограмм минимальной площади содержать отличные от вершин точки с целыми координатами? Ограничены ли сверху периметры таких параллелограммов?

ГС1◇6. Напишите уравнение прямой **а)** проходящей через точку $(2, -3)$ параллельно вектору $(5, 2)$ **б)** проходящей через точки $(-3, 5)$ и $(4, -1)$ **в)** пересекающей оси координат в точках $(-2, 0)$ и $(0, 5)$ и найдите площадь очерчиваемого ими треугольника.

ГС1◇7. Нарисуйте на клетчатой бумаге прямые, заданные уравнениями **а)** $3x_1 + 5x_2 = -1$ **б)** $2x_1 - 3x_2 = 5$ и по правилу Крамера найдите координаты точек пересечения каждой их этих прямых со всеми прямыми из предыдущей задачи.

ГС1◇8. Вершины $\triangle\, abc$ имеют координаты $a = (-4, -1)$, $b = (1, 3)$, $c = (2, -2)$. Напишите уравнение медианы, опущенной из вершины b, и определите в какой точке она пересекает ось OY.

ГС1◇9. Точки M и N делят диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ в отношении $AM : : MC = BN : ND = 1 : 2$. Как относятся площади треугольников $\triangle BMD$ и $\triangle ANC$?

ГС1◇10. На 25-точечной плоскости над полем $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/(5)$ вычетов по модулю 5 нарисуйте все проходящие через начало координат прямые. Сколько их?

Барицентры. Точка c называется *центром тяжести* или *барицентром* точек $p_1, \dots, p_m$, взятых с весами $\mu_1, \dots, \mu_m \in \Bbbk$, если $\sum \mu_i \overrightarrow{cp}_i = 0$. Если веса не указываются явно, они по умолчанию считаются равными 1. Набор весов (α, β, γ) с $\alpha + \beta + \gamma = 1$ называется *барицентрическими координатами* точки p относительно $\triangle\, abc$ на аффинной плоскости, если центр тяжести вершин треугольника, взятых с этими весами, попадает в точку p.

ГС1◇11. Медианой набора точек $p_1, \dots, p_m$ называется отрезок, соединяющий одну из этих точек с равновесным барицентром остальных. Покажите, что все медианы пересекаются в одной точке и выясните, в каком отношении они делятся точкой пересечения.

ГС1◇12. Покажите, что на координатной плоскости $\Bbbk^2$ все точки, барицентрические координаты (α, β, γ) которых относительно данного $\triangle\, abc$ удовлетворяют линейному однородному уравнению $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, где $a, b, c \in \Bbbk$ — заданные числа, не обращающиеся

[1] Которую для простоты будем считать векторным пространством.
[2] Которые для простоты будем считать точками.
[3] Коэффициент пропорциональности для всех галактик один и тот же.
[4] Желающие могут по умолчанию считать, что $\Bbbk = \mathbb{R}$ или $\Bbbk = \mathbb{Q}$.

одновременно в нуль, образуют прямую. Верно ли что: **а)** любая прямая на аффинной плоскости $\Bbbk^2$ может быть задана таким уравнением **б)** два таких уравнения задают одну и ту же прямую если и только если эти уравнения одинаковы?

ГС1◇13. Нарисуйте в $\mathbb{R}^2$ все точки, барицентрические координаты (α, β, γ) которых относительно данного $\triangle abc$ удовлетворяют условиям: **а)** $\alpha, \beta, \gamma > 0$ **б)** $\alpha, \beta > 0$, $\gamma < 0$ **в)** $\alpha = \beta$ **г)** $\alpha, \beta > 1/3$, $\gamma > 0$ **д)** $\alpha \geqslant \beta$ **е)** $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$.

ГС1◇14. В условиях предыдущей задачи напишите условия на (α, β, γ), задающие: **а)** каждый из шести треугольников, на которые $\triangle abc$ разрезается медианами **б)** треугольники гомотетичные $\triangle abc$ с коэффициентами 3 и $1/3$ относительно точки пересечения медиан.