Доза коммутативной алгебры

АГ3◇1. Покажите, что *радикал* $\sqrt{I} \overset{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in I\}$ любого идеала $I \subset A$ тоже идеал.

АГ3◇2. Для двух идеалов I, J кольца A обозначим через IJ идеал, порождённый произведениями ab с $a \in I$, $b \in J$. Верно ли что **а)** произведения ab уже и сами по себе образуют идеал **б)** $IJ = I \cap J$ **в)** $IJ = I \cap J$, когда $I + J = A$ **г)** $V(I) \cup V(J) = V(IJ) = V(I \cap J)$ **д)** $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$ **е)** $\sqrt{IJ} = \sqrt{I}\sqrt{J}$ **ж)** $IJ = \sqrt{IJ}$, когда $I = \sqrt{I}$ и $J = \sqrt{J}$

АГ3◇3. Пусть $J = (xy, yz, zx) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Можно ли задать многообразие $V(J)$ двумя полиномиальными уравнениями?

АГ3◇4. Укажите многочлен $f \in I(V(J)) \smallsetminus J$ для $J = (x^2 + y^2 - 1, y - 1) \subset \Bbbk[x, y]$.

АГ3◇5. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$ для $J = (xy, (x - y)z)$ и $J = (xy + yz + zx, x^2 + y^2 + z^2)$.

АГ3◇6. Нётерово ли кольцо: **а)** $A[\![t]\!]$, где A нётерово **б)** сходящихся всюду в $\mathbb{C}$ рядов $f \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ **в)** рядов $f \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ ненулевого радиуса сходимости **г)** $\{p(z)/q(z) \in \mathbb{C}(z) \mid q(z) \neq 0$ при $|z| \leqslant 1\}$ **д*)** подалгебра $A \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ конечной коразмерности (как векторное пространство).

АГ3◇7. Пусть $m_1, m_2, \dots, m_r \in M$ порождают A-модуль M, и A-линейный эндоморфизм $\varphi : M \to M$ действует на них как $(m_1, m_2, \dots, m_r) \mapsto (m_1, m_2, \dots, m_r) \cdot F$, где $F \in \mathrm{Mat}_{r \times r}(A)$. Докажите, что: **а)** $\det(F) \cdot M \subset \varphi(M)$ **б)** если M точен[1], то $\forall$ идеала $I \subsetneq A$ $\quad I \cdot M \neq M$.

АГ3◇8. Покажите, что факториальное кольцо целозамкнуто в своём поле частных.

АГ3◇9. Цело ли кольцо непрерывных функций на $\mathbb{R}^2$ над подкольцом $\{f \mid f(1, 0) = f(0, 1)\}$?

АГ3◇10. Пусть A — нормальное кольцо[2] с полем частных $\mathbb{F}$. Покажите, что

а) произведение двух приведённых многочленов из $\mathbb{F}[x]$ лежит в $A[x]$ тогда и только тогда, когда оба множителя лежат в $A[x]$

б) если элемент b какой-либо $\mathbb{F}$-алгебры B цел над A, то его минимальный многочлен над $\mathbb{F}$ лежит в $A[x]$ (т. е. является заодно и уравнением целой зависимости).

АГ3◇11. Существует ли бесконечное поле, конечно порождённое как $\mathbb{Z}$-алгебра[3]?

АГ3◇12*. Покажите, что кольцо многочленов над нормальным кольцом тоже нормально.

АГ3◇13. Пусть $B \supset A$ — целое расширение колец. Покажите, что любой гомоморфизм $A \to \Bbbk$ в алгебраически замкнутое поле $\Bbbk$ продолжается до гомоморфизма $B \to \Bbbk$.

АГ3◇14. Пусть над алгебраически замкнутым полем многочлен f обращается в нуль в каждой точке гиперповерхности $V(g) \subset \mathbb{A}^n$. Покажите, что каждый неприводимый сомножитель многочлена g делит многочлен f.

АГ3◇15. Пусть A — кольцо непрерывных вещественных функций на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве X. Покажите, что отображение $X \to \operatorname{Spec}_m A$, $x \mapsto \ker \mathrm{ev}_x$, биективно и топология Зарисского на $\operatorname{Spec}_m A$ индуцирует исходную топологию на X.

АГ3◇16*. Всякий ли простой идеал кольца непрерывных функций $[0, 1] \to \mathbb{R}$ максимален?

АГ3◇17. Пусть $X = \operatorname{Spec}_m A$ — аффинное алгебраическое многообразие. Покажите, что разложимость A в прямое произведение[4] $A = A_1 \times A_2$ равносильна разложимости X в дизъюнктное объединение $X = X_1 \sqcup X_2$ двух собственных замкнутых подмножеств.

---

[1] т. е. $\forall\, a \in A$ $aM = 0 \Rightarrow a = 0$

[2] т. е. в A нет делителей нуля и оно целозамкнуто в своём поле частных

[3] с тавтологическим действием $n \cdot a \overset{\text{def}}{=} a + a + \cdots + a$ (n одинаковых слагаемых)

[4] напомним, что для разложимости алгебры (даже не обязательно коммутативной) в прямое произведение двух подалгебр необходимо и достаточно разложения единицы в сумму двух независимых идемпотентов: $1 = e_1 + e_2$, где $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ (докажите это!)

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 4 (4.10.2013)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
3			
4			
5			
6а			
б			
в			
г			
д			
7а			
б			
8			
9			
10а			
б			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			