

Итоговый письменный экзамен

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в ноль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 40 баллов. Во всех задачах основное поле \mathbb{K} предполагается алгебраически замкнутым характеристики нуль.

Задача 1 (10 баллов). Для векторного пространства V размерности $n > k$ и любого $m \in \mathbb{N}$ грасманово отображение Веронезе¹

$$g^{v_{k,m}} : \text{Gr}(k, V) \rightarrow \text{Gr}(N, S^m V), \quad \text{где } N = \binom{m+k-1}{k-1},$$

сопоставляет векторному подпространству $U \subset V$ векторное подпространство $S^m U \subset S^m V$. Покажите, что это отображение инъективно, и его образ является замкнутым подмногообразием в $\text{Gr}(N, S^m V)$.

Задача 2 (10 баллов). Для n -мерного векторного пространства V и k -мерного векторного подпространства $U \subset V$ обозначим через $I_m(U) \subset S^m V^*$ пространство однородных многочленов степени m , тождественно зануляющихся на U . Найдите $\dim I_m(U)$.

Задача 3 (10 баллов). Покажите, что рациональные нормальные кривые в \mathbb{P}_n образуют открытое по Зарисскому подмножество в некотором неприводимом проективном многообразии, и найдите размерность этого многообразия.

Задача 4 (10 баллов). Покажите, что пучок квадрик $\lambda G + \mu Q$ в \mathbb{P}_n тогда и только тогда содержит ровно $(n + 1)$ различных особых квадрик, когда $\text{codim}_{\mathbb{P}_n}(T_p G \cap T_p Q) = 2$ в каждой точке² $p \in G \cap Q$.

Задача 5 (10 баллов). Для пары проективных алгебраических многообразий $X, Y \subset \mathbb{P}(V)$ обозначим через $J(X, Y) \subset \text{Gr}(2, V)$ замыкание множества точек, изображающих всевозможные прямые (x, y) с $x \in X, y \in Y$, а через $J(X, Y) \subset \mathbb{P}(V)$ обозначим объединение всех прямых $\ell \subset \mathbb{P}(V)$, изображаемых точками многообразия $J(X, Y)$. Покажите, что $J(X, Y)$ является замкнутым подмногообразием³ в $\mathbb{P}(V)$. Для неприводимых X, Y с $X \cap Y = \emptyset$ выясните, неприводимы ли многообразия $J(X, Y)$ и $J(X, Y)$, и найдите их размерности.

Задача 6 (10 баллов). Для двух различных точек $a, b \in \mathbb{P}_2$ обозначим через W линейную систему⁴ коник, проходящих через a, b , а через $S \subset W^\times$ замыкание образа отображения $\mathbb{P}_2 \setminus \{a, b\} \rightarrow W^\times$, задаваемого этой линейной системой⁵. Найдите размерность проективного пространства W , а также размерность и степень алгебраического многообразия $S \subset W^\times$. Опишите пучки коник, отвечающие всем лежащим на S прямым. Верно ли, что любая гладкая поверхность степени $\deg S$ в пространстве W^\times получается таким образом из некоторых точек a и b ?

¹При $k = 1$ оно превращается в обычное вложение Веронезе $\mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^m V)$, переводящее вектор $v \in V$ в $v^m \in S^m V$.

²Такие пересечения гиперповерхностей называются *трансверсальными*.

³Оно называется *линейным соединением* многообразий X и Y .

⁴Т. е. проективное пространство.

⁵Оно сопоставляет точке $p \in \mathbb{P}_2 \setminus \{a, b\}$ гиперплоскость в W , состоящую из всех коник $C \in W$, проходящих через p .