Итоговый письменный экзамен (вторая попытка)

Во всех задачах основное поле по умолчанию алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль. Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Да, кстати, с наступающим Новым Годом!

Задача 1 (10 баллов). Существует ли на комплексной проективной плоскости пучок коник, содержащий ровно одну особую конику и не содержащий двойной прямой?

Задача 2 (10 баллов). Покажите, что для любой гладкой гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}_n$ степени $d \geqslant 2$ образ гауссова отображения $\gamma : X \to \mathbb{P}_n^{\times}$, $x \mapsto T_x X$, переводящего каждую точку гиперповерхности в её касательную гиперплоскость, является гиперповерхностью в $\mathbb{P}_n^{\times}$.

Задача 3 (10 баллов). Покажите, что два пучка квадрик на $\mathbb{P}_n$, содержащие ровно по $n+1$ различных особых квадрик, переводятся один в другой проективным автоморфизмом[1] $\mathbb{P}_n$, если и только если наборы из тех $n+1$ значений параметров этих пучков, что отвечают особым квадрикам, переводятся один в другой дробно линейным автоморфизмом $\mathbb{P}_1$.

Задача 4 (10 баллов). Покажите, что двумерные плоскости на квадрике Плюккера

$$\mathrm{Gr}(2,4) = \mathrm{Gr}(2,V) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V) = \mathbb{P}_5$$

образуют замкнутое подмногообразие в грассманиане $\mathrm{Gr}(3,6) = \mathrm{Gr}(3,\Lambda^2 V)$ двумерных плоскостей в $\mathbb{P}_5$, и постройте изоморфизм этого многообразия с дизъюнктным объединением

$$\mathbb{P}_3 \sqcup \mathbb{P}_3^{\times} = \mathbb{P}(V) \sqcup \mathbb{P}(V^*) .$$

Задача 5 (10 баллов). Покажите, что при $n > 3$ прямые, лежащие на гладкой квадрике $Q \subset \mathbb{P}_n$, образуют неприводимое замкнутое подмногообразие грассманиана прямых в $\mathbb{P}_n$, и найдите размерность этого многообразия.

[1] То есть существует линейный автоморфизм $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n$ биективно отображающий квадрики одного пучка на квадрики другого.