

§2. Многообразия Веронезе, Грассмана и Сегре

2.1. Напоминания из полилинейной алгебры. Напомню¹, что *тензорным произведением* модулей V_1, V_2, \dots, V_n над коммутативным кольцом K называется фактор

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}/\mathcal{R}$$

свободного модуля \mathcal{V} с базисом из всех n -буквенных слов $[v_1 v_2 \dots v_n]$, где i -той буквой может быть любой вектор $v_i \in V_i$, по подмодулю $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$, линейно порождённому над K всевозможными трёхчленными линейными комбинациями вида

$$[\dots (\lambda u + \mu w) \dots] - \lambda [\dots u \dots] - \mu [\dots w \dots], \quad (2-1)$$

где $\lambda, \mu \in K$, $u, w \in V_i$, обозначенные многоточиями соответственные фрагменты всех трёх слов неизменны, а номер i того места, в котором происходят изменения, может быть любым. Класс $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \stackrel{\text{def}}{=} [v_1 v_2 \dots v_n] \pmod{\mathcal{R}}$ называется тензорным произведением векторов v_1, v_2, \dots, v_n . По построению, тензорное умножение

$$\begin{aligned} \tau : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n &\rightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n \\ (v_1, v_2, \dots, v_n) &\mapsto v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \end{aligned} \quad (2-2)$$

линейно по каждому аргументу при фиксированных остальных, т. е. дистрибутивно по отношению к K -линейным комбинациям векторов:

$$\dots \otimes (\lambda u + \mu w) \otimes \dots = \lambda \cdot (\dots \otimes u \otimes \dots) + \mu \cdot (\dots \otimes w \otimes \dots), \quad (2-3)$$

и универсально в том смысле, что для любого модуля W и любого полилинейного отображения

$$\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$$

существует единственный линейный оператор $F : V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n \rightarrow W$, такой что $\varphi = F \circ \tau$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.1. Покажите, что модуль $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ и полилинейное отображение (2-2) действительно обладают этим универсальным свойством, причём определяются им однозначно с точностью до единственного K -линейного изоморфизма, перестановочного с τ .

Если каждый из модулей V_i свободен с базисом $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{d_i}^{(i)}$, то их тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ тоже свободно с базисом

$$e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}, \quad 1 \leq \alpha_i \leq d_i. \quad (2-4)$$

В частности, $\text{rk } V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n = \prod \text{rk } V_i$. Если модули $V_i = F_i / R_i$ заданы как факторы свободных модулей F_i по неким подмодулям соотношений $R_i \subset F_i$, то при каждом i модуль

$$F_1 \otimes \dots \otimes F_{i-1} \otimes R_i \otimes F_{i+1} \otimes \dots \otimes F_n$$

естественно вложен в $F_1 \otimes F_2 \otimes \dots \otimes F_n$ в качестве подмодуля, и тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ изоморфно фактору свободного модуля $F_1 \otimes F_2 \otimes \dots \otimes F_n$ по K -линейной оболочке всех n этих подмодулей $F_1 \otimes \dots \otimes F_{i-1} \otimes R_i \otimes F_{i+1} \otimes \dots \otimes F_n \subset V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$.

Например, тензорное произведение абелевых групп $\mathbb{Z}/(m_1) \otimes \mathbb{Z}/(m_2) \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}/(m_n)$, рассматриваемых как модули над \mathbb{Z} , изоморфно $\mathbb{Z}/(\text{н.о.д.}(m_1, m_2, \dots, m_n))$, т. е. фактору свободного модуля $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}$ ранга $1^n = 1$, по подмодулю порождённому m_1, m_2, \dots, m_n .

УПРАЖНЕНИЕ 2.2. Убедитесь, что $K \otimes V \simeq V \otimes K$ для любого модуля V над произвольным коммутативным кольцом K .

¹См. <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-01.pdf>.

2.1.1. Тензорная, симметрическая и внешняя алгебры. Положим $V^{\otimes 0} \stackrel{\text{def}}{=} K$, а для $n \in \mathbb{N}$

$$V^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_n.$$

Тензорное произведение векторов задаёт структуру ассоциативной градуированной K -алгебры на прямой сумме модулей

$$TV \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}.$$

Если модуль V свободен с базисом e_1, e_2, \dots, e_n , алгебра TV изоморфна алгебре многочленов от некоммутирующих переменных e_1, e_2, \dots, e_n с коэффициентами из K , т. е. её базис над K составляют (некоммутативные) мономы вида

$$e_{\nu_1} \otimes e_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes e_{\nu_m}, \quad (2-5)$$

которые перемножаются приписыванием друг к другу через значок \otimes . Алгебра TV называется *тензорной алгеброй* K -модуля V . Вложение

$$\iota : V \hookrightarrow TV, \quad (2-6)$$

отождествляющее V с подпространством $V^{\otimes 1} \subset TV$ обладает следующим универсальным свойством: для любой ассоциативной K -алгебры A и K -линейного отображения $f : V \rightarrow A$ существует единственный такой гомоморфизм K -алгебр $\alpha : TV \rightarrow A$, что $f = \alpha \circ \iota$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.3. Убедитесь, что алгебра TV и вложение (2-6) определяются этим свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр, перестановочного с (2-6). Фактор алгебра $SV \stackrel{\text{def}}{=} TV / \mathcal{J}_{\text{sym}}$ тензорной алгебры TV по двустороннему идеалу $\mathcal{J}_{\text{sym}} \subset TV$, порождённому всевозможными разностями

$$u \otimes w - w \otimes u \in V \otimes V, \quad (2-7)$$

называется *симметрической алгеброй* K -модуля V . Это та самая алгебра, о которой шла речь в п° 1.1. Для свободного модуля V с базисом e_1, e_2, \dots, e_d симметрическая алгебра SV изоморфна алгебре многочленов $K[e_1, e_2, \dots, e_d]$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.4. Для d -мерного векторного пространства V над полем \mathbb{k} найдите $\dim_{\mathbb{k}} S^n V$. Фактор алгебра $TV / \mathcal{J}_{\text{skew}}$ тензорной алгебры TV по двустороннему идеалу $\mathcal{J}_{\text{skew}} \subset TV$, порождённому тензорными квадратами всех векторов

$$v \otimes v \in V \otimes V, \quad (2-8)$$

называется *внешней* или *грасмановой алгеброй* K -модуля V . Умножение в алгебре LV называется *внешним* или *суперкоммутативным* и обозначается $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$. Из равенств

$$0 = (u + w) \wedge (u + w) = u \wedge w + w \wedge u$$

вытекает, что внешнее произведение меняет знак при перестановке любых двух последовательных сомножителей. Поэтому при произвольной перестановке сомножителей внешнее произведение умножается на знак перестановки. Для свободного модуля V с базисом $e_1, e_2, \dots, e_d \subset V$ внешняя алгебра LV изоморфна алгебре *грасмановых многочленов* $K \langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle$ с коэффициентами в K от антикоммутирующих переменных e_i с нулевыми квадратами. В этом случае базис в граcмановой алгебре составляют мономы

$$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}, \quad \text{где } I = (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ и } 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq d. \quad (2-9)$$

В частности, $\text{rk } L^n V = \binom{d}{n}$ и $\text{rk } LV = 2^d$.

2.1.2. Свёртки. Для конечномерного векторного пространства V над произвольным полем \mathbb{k} тензорные степени $V^{\otimes n}$ и $(V^*)^{\otimes n}$ канонически двойственны друг другу посредством *полной свёртки*, которая сопоставляет каждой паре разложимых тензоров $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ и $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ произведение

$$\langle v, \xi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n \xi_i(v_i). \quad (2-10)$$

Если базисы $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ и $x_1, x_2, \dots, x_n \in V^*$ двойственны друг другу, то составленные из тензорных мономов $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_r}$ и $x_{j_1} \otimes x_{j_2} \otimes \dots \otimes x_{j_s}$ базисы в $V^{\otimes n}$ и $(V^*)^{\otimes n}$ также двойственны друг другу.

Из универсального свойства тензорного произведения $V^{\otimes n}$ вытекает, что пространство линейных отображений $V^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{k}$ канонически изоморфно пространству n -линейных форм

$$V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}. \quad (2-11)$$

Комбинация этого изоморфизма с задаваемым полной свёрткой изоморфизмом между $(V^{\otimes n})^*$ и $(V^*)^{\otimes n}$, устанавливает канонический изоморфизм между $(V^*)^{\otimes n}$ и пространством n -линейных форм (2-11). Разложимому тензору $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ при этом отвечает n -линейная форма

$$V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}, \quad (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \prod_{i=1}^n \xi_i(v_i).$$

С любыми двумя последовательностями из одинакового числа неповторяющихся¹ индексов

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_m), \quad J = (j_1, j_2, \dots, j_m)$$

связано линейное отображение *частичной свёртки* по m сомножителям I, J

$$c_J^I : V^{*\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow V^{*\otimes(p-m)} \otimes V^{\otimes(q-m)} \\ \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_q \mapsto \prod_{v=1}^m \xi_{i_v}(v_{j_v}) \cdot \left(\bigotimes_{i \notin I} \xi_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{j \notin J} v_j \right) \quad (2-12)$$

которое для каждого $v = 1, 2, \dots, m$ спаривает i_v -тый сомножитель в $V^{*\otimes p}$ с j_v -тым сомножителем в $V^{\otimes q}$, а все остальные сомножители оставляет в том же порядке, как они стояли.

УПРАЖНЕНИЕ 2.5. Интерпретируем n -линейную форму $\varphi : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$ как тензор из $V^{*\otimes n}$, обозначим через $v_{\perp} \varphi$ его свёртку по первому тензорному сомножителю с заданным вектором $v \in V$ и интерпретируем тензор $v_{\perp} \varphi \in V^{*\otimes(n-1)}$ как $(n-1)$ -линейную форму на V . Убедитесь, что $v_{\perp} \varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$.

2.1.3. Линейный носитель тензора. Для заданного тензора $t \in V^{\otimes n}$ на конечномерном векторном пространстве V над произвольным полем \mathbb{k} обозначим через $\text{Supp}(t) \subset V$ пересечение всех таких подпространств $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$. Иначе $\text{Supp}(t)$ можно охарактеризовать как такое наименьшее по включению² подпространство $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.6. Убедитесь, что для любой пары векторных подпространств $U, W \subset V$ включения $t \in U^{\otimes n}$ и $t \in W^{\otimes n}$ влекут включение $t \in (U \cap W)^{\otimes n}$.

¹Но не обязательно возрастающих или убывающих.

²Или, что то же самое, имеющее наименьшую размерность.

Подпространство $\text{Supp}(t)$ называется *линейным носителем*, а его размерность — *рангом* тензора t . Тензоры, ранг которых меньше размерности пространства V , называются *вырожденными*. Условие $\text{Supp}(t) \neq V$ означает, что часть переменных в некоммутативном многочлене t можно уничтожить подходящей линейной заменой базиса. Например, если $\dim \text{Supp}(t) = 1$, то $t = c \cdot v^{\otimes n}$ для некоторого $c \in \mathbb{k}$ и $v \in V$, порождающего $\text{Supp}(t)$.

Чтобы указать конкретный набор векторов, линейно порождающих носитель данного тензора $t \in V^{\otimes n}$, для каждой последовательности $J = (j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$ различных элементов множества $\{1, 2, \dots, n\}$ обозначим через

$$c_t^J : V^{*\otimes(n-1)} \rightarrow V, \quad \xi \mapsto c_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})}^{(1, 2, \dots, (n-1))}(\xi \otimes t) \quad (2-13)$$

отображение свёртки, которое сворачивает ν -й сомножитель тензора $\xi \in V^{*\otimes(n-1)}$ с j_ν -тым сомножителем тензора t для каждого $\nu = 1, 2, \dots, n-1$. Если записать t в виде суммы разложимых тензоров $u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_n$, то результатом свёртки (2-13) будет линейная комбинация векторов u_k с $k \notin J$, т. е. тех единственных множителей в разложимых тензорах $u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_n$, номер которых не представлен в J . Очевидно, что эта линейная комбинация лежит в $\text{Supp}(t)$.

ТЕОРЕМА 2.1

Пространство $\text{Supp}(t)$ линейно порождается образами всех свёрток (2-13), отвечающих всевозможным последовательностям J .

Доказательство. Пусть $\text{Supp}(t) = W$. Чтобы убедиться в том, что образы свёрток (2-13) линейно порождают W , достаточно доказать, что каждая линейная форма $\xi \in V^*$, которая аннулирует все подпространства $\text{im}(c_t^J)$, аннулирует и подпространство W . Предположим противное: пусть $\xi \in V^*$ имеет ненулевое ограничение на W , но аннулирует все $c_t^J(V^{*\otimes(n-1)})$. Выберем в V^* такой базис $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$, чтобы $\xi_1 = \xi$, а ограничения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ на W составляли базис в W^* . Обозначим через w_1, w_2, \dots, w_k двойственный к нему базис в W и разложим t по этому базису. Значение $\xi(c_t^J(\xi_{i_1} \otimes \xi_{i_2} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{n-1}}))$ равно такой свёртке t с $\xi_1 \otimes \xi_{i_1} \otimes \xi_{i_2} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{n-1}}$, которая сворачивает ковектор ξ_1 с сомножителем, номер которого не входит в J , а каждый ковектор ξ_{i_ν} , $1 \leq \nu \leq n-1$, с j_ν -тым сомножителем базисных мономов $w_{k_1} \otimes w_{k_2} \otimes \dots \otimes w_{k_n}$ из разложения t . Результат такой свёртки равен коэффициенту при том мономе из разложения t , у которого на месте с не представленном в J номером стоит w_1 , а на j_ν -том месте стоит w_{i_ν} при всех $1 \leq \nu \leq n-1$. Выбирая подходящие j_1, j_2, \dots, j_{n-1} и i_1, i_2, \dots, i_{n-1} , мы можем таким образом получить коэффициент при любом содержащем w_1 мономе из разложения t . Следовательно, все эти коэффициенты нулевые, т. е. w_1 не входит в $\text{Supp}(t)$ вопреки нашему предположению. Противоречие. \square

2.1.4. Симметрические и кососимметрические тензоры. Симметрическая группа S_n действует на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах:

$$g : v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto v_{g(1)} \otimes v_{g(2)} \otimes \dots \otimes v_{g(n)}. \quad (2-14)$$

Тензор $t \in V^{\otimes n}$ называется *симметрическим*, если $g(t) = t$ для всех $g \in S_n$, и *кососимметрическим*, если $g(t) = \text{sgn}(g) \cdot t$ для всех $g \in S_n$. Мы будем обозначать подпространства симметрических и кососимметрических тензоров в $V^{\otimes n}$ через

$$\begin{aligned} \text{Sym}^n V &= \{ t \in V^{\otimes n} \mid \sigma(t) = t \quad \forall g \in S_n \} \\ \text{Skew}^n V &= \{ t \in V^{\otimes n} \mid g(t) = \text{sgn}(g) \cdot t \quad \forall g \in S_n \} \end{aligned}$$

Пусть векторы e_1, e_2, \dots, e_d составляют базис в V . Поскольку любой симметрический тензор вместе с каждым тензорным мономом m содержит с точно таким же коэффициентом и все мономы из S_n -орбиты монома m , *полные симметрические тензоры*

$$e_{[m_1, m_2, \dots, m_d]} = \left(\begin{array}{c} \text{сумма всех различных тензорных мономов, состоящих из} \\ m_1 \text{ множителей } e_1, m_2 \text{ множителей } e_2, \dots, m_d \text{ множителей } e_d, \end{array} \right) \quad (2-15)$$

занумерованные всевозможными наборами (m_1, m_2, \dots, m_d) целых неотрицательных чисел с $\sum_v m_v = n$, образуют базис в $\text{Sym}^n V$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.7. Убедитесь, что сумма в правой части (2-15) состоит из $n!/(m_1! m_2! \dots m_d!)$ слагаемых.

По той же причине, базис в $\text{Skew}^n V$ составляют *полные кососимметрические тензоры*

$$e_{\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle} = \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) \cdot e_{i_{g(1)}} \otimes e_{i_{g(2)}} \otimes \dots \otimes e_{i_{g(n)}} \quad (2-16)$$

занумерованные всевозможными последовательностями строго возрастающих индексов $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq d$. Обратите внимание, что сумма в правой части (2-16) состоит из $n!$ слагаемых.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1

Для векторного пространства V над полем характеристики 0 ограничение на подпространство $\text{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$ отображения $V^{\otimes n} \rightarrow S^n V$ факторизации по идеалу \mathcal{J}_{sym} и ограничение на подпространство $\text{Skew}^n \subset V^{\otimes n}$ отображения $V^{\otimes n} \rightarrow \Lambda^n V$ факторизации по идеалу $\mathcal{J}_{\text{skew}}$ являются изоморфизмами векторных пространств. Действие этих изоморфизмов на стандартные базисные тензоры (2-15) и (2-16) задается формулами

$$e_{[m_1, m_2, \dots, m_d]} \mapsto \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_d)!}{m_1! \cdot m_2! \dots m_d!} \cdot e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_d^{m_d} \in S^n V \quad (2-17)$$

$$e_{\langle i_1, i_2, \dots, i_d \rangle} \mapsto n! \cdot e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \in \Lambda^n V \quad (2-18)$$

Доказательство. Проекция каждого из $n!/(m_1! m_2! \dots m_d!)$ слагаемых суммы (2-15) в симметрическую алгебру равна коммутативному моному $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_d^{m_d}$, а проекция каждого из $n!$ слагаемых суммы (2-16) во внешнюю алгебру равна грассманову моному $n! e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$. \square

2.2. Поляризация многочленов. Согласно предл. 2.1 каждый многочлен $f \in S^n V^*$ на векторном пространстве V над полем \mathbb{k} характеристики 0 является образом единственной симметричной n -линейной формы $\tilde{f} \in \text{Sym}^n(V^*) \subset (V^*)$ при факторизации $V^{\otimes n} \rightarrow S^n V$ по идеалу \mathcal{J}_{sym} . Форма $\tilde{f} : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$ называется *полной поляризацией* многочлена f и однозначно определяется тем, что

$$\forall v \in V \quad f(v) = \tilde{f}(v, v, \dots, v). \quad (2-19)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.8. Проверьте соотношение (2-19) для всех базисных мономов

$$f = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_d^{m_d}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.9. Убедитесь, что сопоставление многочленам $f \in S^n V$ и $g \in S^n V^*$ полной свёртки их полных поляризаций $\tilde{f} \in V^{\otimes m}$ и $\tilde{g} \in V^{*\otimes m}$ задаёт двойственность между $S^n V$ и $S^n V^*$, и мономы, составленные из элементов двойственных базисов пространств V и V^* , спариваются при этом по правилу

$$\begin{aligned} & \left\langle e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_d^{m_d}, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_d^{k_d} \right\rangle = \\ & = \begin{cases} (m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_d!) / n! & , \text{ если } k_i = m_i \text{ при всех } i, \\ 0 & \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2-20)$$

При $n = 2$ мы получаем полную поляризацию квадратичной формы, описываемую форм. (1-12) на стр. 14. Аналогичные формулы для поляризации имеются для любой степени n .

Предложение 2.2

Если $\text{char } \mathbb{k} = 0$, полная поляризация \tilde{f} многочлена $f \in S^n V^*$ удовлетворяет соотношению

$$n! \cdot \tilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{I \subsetneq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} f\left(\sum_{i \notin I} v_i\right), \quad (2-21)$$

где последнее суммирование ведётся по всем собственным подмножествам $I \subsetneq \{1, 2, \dots, n\}$, включая $I = \emptyset$, для которого $|\emptyset| = 0$. Например, при $n = 3$

$$6 \tilde{f}(u, v, w) = f(u + v + w) - f(u + v) - f(u + w) - f(v + w) + f(u) + f(v) + f(w).$$

Доказательство. Условимся обозначать через $\tilde{f}(v_1^{m_1}, v_2^{m_2}, \dots, v_k^{m_k})$ значение формы \tilde{f} на m_1 векторах v_1 , m_2 векторах v_2 и т. д., где общее число аргументов $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ (т. к. форма \tilde{f} симметрична, порядок аргументов не важен). В силу линейности \tilde{f} по каждому аргументу для любых векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ имеет место следующий аналог мультиномиальной формулы:

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2 + \dots + v_n) &= \tilde{f}(v_1 + \dots + v_n, v_1 + \dots + v_n, \dots, v_1 + \dots + v_n) = \\ &= \sum_{m_1 m_2 \dots m_n} \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_n!} \tilde{f}(v_1^{m_1}, v_2^{m_2}, \dots, v_n^{m_n}), \end{aligned} \quad (2-22)$$

где суммирование ведётся по всем наборам из n неотрицательных целых чисел m_1, m_2, \dots, m_n с суммой n . Ровно одно слагаемое в (2-22) зависит от всех n векторов v_1, v_2, \dots, v_n , и оно равно $n! \tilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Все остальные слагаемые зависят от меньшего числа векторов, причём сумма всех слагаемых, не содержащих векторов v_i , где i пробегает некоторое непустое собственное подмножество индексов $I \subsetneq \{1, 2, \dots, n\}$, получится если положить в (2-22) все $v_i = 0$ для $i \in I$. Таким образом, по формуле включения-исключения

$$n! \cdot \tilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n) = f\left(\sum_v v_v\right) - \sum_{\{i\}} f\left(\sum_{v \neq i} v_v\right) + \sum_{\{i,j\}} f\left(\sum_{v \neq i,j} v_v\right) - \sum_{\{i,j,k\}} f\left(\sum_{v \neq i,j,k} v_v\right) + \dots .$$

□

2.2.1. Производные и поляры. Фиксируем вектор $v \in V$ и рассмотрим отображение свёртки первого тензорного сомножителя в произведении $V^{*\otimes n}$ с вектором v

$$c_v^1 : V^{*\otimes n} \rightarrow V^{*\otimes(n-1)}.$$

На языке n -линейных форм на пространстве V это отображение фиксирует вектор $v \in V$ в качестве первого аргумента n -линейной формы. Применяя его к полной поляризации \tilde{f} многочлена $f \in S^n(V^*)$ и затем проецируя результат из $V^{*\otimes(n-1)}$ в $S^{n-1}(V^*)$, мы получаем линейное отображение $\text{pl}_v : S^n V^* \rightarrow S^{n-1} V^*$, которое включается в качестве нижней горизонтальной стрелки в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V^{*\otimes n} \supset \text{Sym}^n V^* & \xrightarrow{c_v^1} & \text{Sym}^{n-1} V^* \subset V^{*\otimes(n-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^n V^* & \xrightarrow{\text{pl}_v} & S^{n-1} V^* \end{array}$$

и переводит многочлен $f(x) = \tilde{f}(x, x, \dots, x) \in S^n(V^*)$ в многочлен

$$\text{pl}_v f(x) = \tilde{f}(v, x, \dots, x) \in S^{n-1}(V^*), \quad (2-23)$$

который называется *полярной* вектора v относительно f и линейно зависит как от многочлена f , так и от вектора $v \in V$. При $n = 2$ эта конструкция задаёт полярное преобразование относительно квадратики $f = 0$ в $\mathbb{P}(V)$ и сопоставляет вектору v уравнение его полярной гиперплоскости.

В двойственных базисах $e_1, e_2, \dots, e_d \in V$ и $x_1, x_2, \dots, x_d \in V^*$ отображение свёртки по первому индексу с базисным вектором $e_i \in V$ переводит базисный симметрический моном (2-15) в точно такой же базисный моном, но содержащий $(m_i - 1)$ множителей e_i , или в нуль, если $m_i = 0$. Поэтому, по формуле (2-17) из предл. 2.1

$$\text{pl}_{e_i} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_d^{m_d} = \frac{m_i}{n} x_1^{m_1} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i-1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \dots x_d^{m_d} = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x_i} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_d^{m_d}.$$

Из линейности $\text{pl}_v f$ по v и f мы получаем, что полярная вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ относительно многочлена f есть делённая на $\text{deg } f$ производная от f в направлении вектора v :

$$\text{pl}_v f = \frac{1}{\text{deg}(f)} \partial_v f = \frac{1}{\text{deg}(f)} \sum \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Отметим, что из сказанного немедленно вытекает независимость правой части этой формулы от выбора двойственных координат в V и V^* , а также коммутирование частных производных между собой: $\partial_u \partial_w = \partial_w \partial_u$ и замечательное равенство между кратными производными

$$m! \frac{\partial^m f}{\partial u^m}(w) = n! \tilde{f}(\underbrace{u, u, \dots, u}_m, \underbrace{w, w, \dots, w}_n) = (n - m)! \frac{\partial^{n-m} f}{\partial w^{n-m}}(u), \quad (2-24)$$

для любых $u, w \in V$, любого $f \in S^n V^*$ и любого m в пределах $0 \leq m \leq n$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.10. Докажите правило Лейбница: $\partial_v(f \cdot g) = \partial_v(f) \cdot g + f \cdot \partial_v(g)$.

Поскольку форма \tilde{f} симметрична, аргументы в среднем члене формулы (2-24) можно писать в любом порядке. Условимся для упрощения обозначений писать

$$\tilde{f}(u^m, w^{n-m}),$$

когда какие-то m аргументов формы \tilde{f} равны u , а остальные $(n-m)$ равны w (не важно в каком порядке). Тогда из полилинейности и симметричности \tilde{f} дословно тем же рассуждением, что и формула Ньютона для раскрытия скобок в биноме $(u+w)^n$, выводится равенство

$$\tilde{f}(u+w, u+w, \dots, u+w) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \tilde{f}(u^m, w^{n-m}),$$

где $n = \deg f$. С учётом (2-24) его можно переписать как *разложение Тейлора*: для любого многочлена f и векторов u, w имеется *точное* равенство

$$f(u+w) = \sum_{m=0}^{\deg f} \frac{1}{m!} \partial_w^m f(u), \quad (2-25)$$

правая часть которого симметрична по u и w в силу соотношения (2-24).

УПРАЖНЕНИЕ 2.11. Покажите, что значение полной поляризации многочлена $f \in S^n V^*$ на заданном наборе векторов описывается в терминах частных производных формулой

$$\forall v_1, v_2, \dots, v_n \in V \quad \tilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \partial_{v_1} \partial_{v_2} \dots \partial_{v_n} f.$$

2.2.2. Поляры и касательные к проективной гиперповерхности. Рассмотрим проективную гиперповерхность $S \subset \mathbb{P}(V)$, заданную однородным уравнением $F(x) = 0$ степени n . Пересечение S с произвольной прямой $\ell = (pq)$ состоит из таких точек $\lambda p + \mu q \in \ell$, что отношение $(\lambda : \mu)$ удовлетворяет уравнению $f(\lambda, \mu) = 0$, которое получается подстановкой $x = \lambda p + \mu q$ в уравнение гиперповерхности $F(x) = 0$. Если основное поле алгебраически замкнуто, и прямая ℓ не лежит на S целиком (что означало бы тождественное обращение $f(\lambda, \mu)$ в нуль), то ℓ пересекает S в конечном наборе точек a_1, a_2, \dots, a_k , причём если учитывать каждую из них с надлежащей кратностью, то сумма этих кратностей будет равна n . Для этого кратность пересечения поверхности S с прямой ℓ в точке $a_i = (\alpha'_i : \alpha''_i)$ надо определить как показатель, с которым линейный множитель

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \alpha'_i & \alpha''_i \end{pmatrix} = (\alpha''_i \lambda - \alpha'_i \mu)$$

входит в разложение $f(\lambda, \mu) = \prod (\alpha''_i \mu - \alpha'_i \lambda)^{s_i}$ однородного многочлена $f(\lambda, \mu)$ на линейные множители. Показатель s_i называется *локальным индексом пересечения* поверхности S с прямой ℓ в точке a_i и обозначается $(S, \ell)_{a_i}$. Прямая ℓ называется *касательной* к S в точке $a \in \ell \cap S$, если $(S, \ell)_a \geq 2$ или $\ell \subset S$.

По формуле Тейлора (2-25) коэффициент при $\lambda^{n-m} \mu^m$ в уравнении $f(\lambda, \mu) = 0$ равен

$$\binom{n}{m} \tilde{f}(p^{n-m}, q^m) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F}{\partial q^i}(p) = \frac{1}{(n-m)!} \frac{\partial^{n-m} F}{\partial p^{n-m}}(q). \quad (2-26)$$

и если $p \in S$, то разложение Тейлора в окрестности p начинается как

$$F(p+tq) = t \binom{d}{1} \tilde{F}(p^{n-1}, q) + t^2 \binom{d}{2} \tilde{F}(p^{n-2}, q^2) + \dots$$

Таким образом, прямая pq , проходящая через точку $p \in S$, касается S в этой точке тогда и только тогда, когда $\tilde{F}(p^{n-1}, q) = 0$.

Если $F(p^{n-1}, x) \neq 0$ как линейная форма от x , то точки q , для которых прямая (pq) касается S в точке p , заметут в $\mathbb{P}(V)$ гиперплоскость, задаваемую линейным уравнением $F(p^{n-1}, x) = 0$. Она называется *касательным пространством* к S в p и обозначается $T_p S$. Точка p называется в этом случае *гладкой* точкой поверхности S .

Если $F(p^{n-1}, x) \equiv 0$, то поверхность S называется *особой* в точке p , а p называется *особой точкой* поверхности S . Согласно (2-26), коэффициентами линейной формы

$$F(p^{n-1}, x) = \partial_x F(p)$$

являются частные производные от F , вычисленные в точке p , так что особость p равносильна занулению в p всех частных производных от уравнения гиперповерхности. В этом случае любая проходящая через p прямая имеет с S как минимум двукратное пересечение в p , и касательное пространство $T_p S$, понимаемое как объединение всех прямых, касающихся S в точке p , совпадает со всем пространством $\mathbb{P}(V)$.

Если q — гладкая точка на S или любая точка вне S , то замыкание множества точек касания с S всевозможных касательных, опущенных на S из точки q образует на поверхности S фигуру, называемую *контуром* поверхности S , видимым из точки q . Видимый контур высекается из S полярной к q относительно S гиперповерхностью $(n-1)$ -й степени

$$\text{pl}_q S = \{y \in \mathbb{P}(V) \mid \tilde{F}(q, y^{n-1}) = 0\}, \quad (2-27)$$

автоматически отличной от всего пространства. Действительно, условие касания прямой (qu) и поверхности S в точке y записывается уравнением $\tilde{F}(y^{n-1}, q) = 0$. Если $G(y) = \tilde{F}(y^{n-1}, q)$ является нулевым многочленом от y , то, полагая $y = q$, получаем $F(q) = 0$, откуда $q \in S$. С другой стороны, т. к. все производные от G в этом случае тоже нулевые, мы получаем равенство

$$\tilde{F}(q^{n-1}, y) = \tilde{G}(q^{n-2}, y) = \frac{\partial^{n-2}}{\partial q^{n-2}} G(y) \equiv 0,$$

означающее, что q — особая точка поверхности S .

Гиперповерхность $\text{pl}_q^{n-r} = \{y \in \mathbb{P}(V) \mid \tilde{F}(q^{n-r}, y^r) = 0\}$ называется *полярной r -й степени* поверхности S относительно точки q . Если точка $q \in S$ гладкая, то полярная первой степени это касательная гиперплоскость $T_q S$ к S в точке q , а каждая полярная степени $r \geq 2$ это поверхность степени r , которая проходит через q и имеет те же полярные степеней $< r$ относительно точки q , что и исходная поверхность S . Так, квадратичная полярная это проходящая через q квадратика, имеющая в точке q ту же касательную гиперплоскость, что и S , кубическая полярная это проходящая через q кубическая поверхность с той же касательной плоскостью и квадратичной полярной, что и S , и т. д.

2.3. Многообразие Веронезе $V(n, k)$ является образом проективного пространства $\mathbb{P}_k = \mathbb{P}(V^*)$ при отображении Веронезе n -той степени

$$\nu_n : \mathbb{P}(V^*) \rightarrow \mathbb{P}(S^n V^*), \quad \varphi \mapsto \varphi^n, \quad (2-28)$$

т. е. как множество классов пропорциональности таких однородных многочленов степени n от k переменных, которые являются чистыми n -тыми степенями линейных форм. Иначе многообразии Веронезе можно описать как множество классов пропорциональности многочленов с одномерным линейным носителем, где под *линейным носителем* $\text{Supp}(f)$ многочлена $f \in S^n V^*$

понимается минимальное подпространство $W \subset V^*$ такое, что $f \in S^n W^*$. Очевидно, что это подпространство совпадает с линейным носителем полной поляризации $\tilde{f} \in \text{Sym}^n V^*$ многочлена f . По теор. 2.1 последний является образом отображения $V^{\otimes(n-1)} \rightarrow V^*$ задаваемого полной свёрткой¹ с \tilde{f} . Этот образ порождается всеми линейными формами, которые можно получить из f всевозможными $(n-1)$ -кратными дифференцированиями вида

$$\frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}} \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} \cdots \frac{\partial^{m_d}}{\partial x_d^{m_d}} f(x), \quad (2-29)$$

с $\sum m_i = n-1$. Вклад в коэффициент при x_i у линейной формы (2-29) даёт ровно один коэффициент многочлена f — тот, что стоит при мономе $x_1^{m_1} \cdots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i+1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \cdots x_d^{m_d}$. Поэтому, если записать многочлен f в виде

$$f = \sum_{v_1+\dots+v_d=n} \frac{n!}{v_1! v_2! \cdots v_d!} a_{v_1 v_2 \dots v_d} x_1^{v_1} x_2^{v_2} \cdots x_d^{v_d}, \quad (2-30)$$

то линейная форма (2-29) будет иметь вид

$$n! \cdot \sum_{i=1}^d a_{m_1 \dots m_{i-1} (m_i+1) m_{i+1} \dots m_d} x_i \quad (2-31)$$

и всего таких форм будет $\binom{n+d-2}{d-1}$ (число способов разложить $n-1$ в сумму d занумерованных целых неотрицательных слагаемых m_1, m_2, \dots, m_d).

Предложение 2.3

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} с $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$ однородный многочлен (2-30) тогда и только тогда является n -той степенью линейной формы, когда ранг $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$ -матрицы, составленной из коэффициентов линейных форм (2-31), равен единице. В этом случае форма φ , такая что $\varphi^n = f$, также пропорциональна формам (2-31).

Доказательство. В самом деле, из равенства $f = \varphi^n$ вытекает, что $\text{Supp}(f)$ — одномерное пространство, порождённое формой φ , и тогда все формы (2-31) пропорциональны форме φ . Наоборот, если все формы (2-31) пропорциональны друг другу, то $\text{Supp}(f)$ — одномерное пространство $U = \mathbb{k} \cdot \psi$, порождённое какой-то формой $\psi \in V^*$. Поскольку $S^n U = \mathbb{k} \cdot \psi^n$ тоже одномерно, условие $f \in S^n U$ означает, что $f = \lambda \psi^n$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{k}$. Если \mathbb{k} алгебраически замкнуто, последнее равенство переписывается как $f = \varphi^n$ с $\varphi = \sqrt[n]{\lambda} \cdot \psi$. \square

Следствие 2.1

Образ вложения Веронезе (2-28) является проективным алгебраическим многообразием, задаваемым системой квадратных уравнений — равенством нулю всех 2×2 миноров $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$ матрицы, составленной из коэффициентов линейных форм (2-31). \square

Пример 2.1 (опять кривая Веронезе)

Однородный многочлен от двух переменных

$$f(x_0, x_1) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \binom{n}{k} \cdot x_0^{n-k} x_1^k$$

¹В силу симметричности тензора \tilde{f} отображения свёртки из теор. 2.1 не зависят от выбора последовательности индексов J , по которым производится свёртка.

тогда и только тогда имеет вид $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n$, когда

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n_1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = 1,$$

что выражается системой квадратных уравнений

$$\det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ a_{i+1} & a_{j+1} \end{pmatrix} = 0$$

на коэффициенты a_i многочлена f .

2.4. Поляризация грассмановых многочленов. Хотя грассманов многочлен $\omega \in \Lambda V^*$ и не задаёт никакой функции на векторах двойственного пространства V , большая часть сказанного в предыдущем разделе имеет смысл и для грассмановых многочленов. А именно, по предл. 2.1 над полем характеристики нуль для любого однородного грассманова многочлена n -той степени $\omega \in \Lambda^n V^*$ существует единственная n -линейная кососимметричная форма $\tilde{\omega} \in \text{Skew}^n V^*$, которая проектируется в ω при факторизации $V^{\otimes n} \rightarrow \Lambda^n V$ по соотношениям антикоммутирования. Форма $\tilde{\omega}$ называется *полной поляризацией* грассманова многочлена ω . По формуле (2-18) из предл. 2.1 полная поляризация базисного грассманова монома $\omega = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ равна

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{n!} e_{\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle} = \text{alt}_n (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_n}). \quad (2-32)$$

Как и в симметрическом случае, полная поляризация индуцирует двойственность между пространствами грассмановых многочленов на двойственных пространствах, при которой результатом спаривания между многочленами

$$\omega \in \Lambda^n V^* \quad \text{и} \quad \tau \in \Lambda^n V$$

по определению считается полная свёртка их полных поляризаций $\langle \tilde{\omega}, \tilde{\tau} \rangle$.

Упражнение 2.12. Покажите, что результатом спаривания двух базисных грассмановых мономов $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ и $x_J = x_{j_1} \wedge x_{j_2} \wedge \dots \wedge x_{j_n}$ от двойственных базисных векторов пространств V и V^* (оба набора индексов I и J строго возрастают) является $1/n!$, когда $i_\nu = j_\nu$ для всех ν , и нуль в остальных случаях.

2.4.1. Частные производные в грассмановой алгебре. Рассмотрим отображение

$$\text{pl}_v : \Lambda^n V^* \rightarrow \Lambda^{n-1} V^*,$$

сопоставляющее грассманову многочлену $\omega \in \Lambda^n V^*$ проекцию во внешнюю алгебру тензора, получающегося свёрткой по первому тензорному сомножителю полной поляризации $\tilde{\omega} \in V^{*\otimes n}$ с вектором $v \in V$. Оно включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V^{*\otimes n} \supset \text{Skew}^n V^* & \xrightarrow{c_v^1} & \text{Skew}^{(n-1)} V^* \subset V^{*\otimes(n-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^n V^* & \xrightarrow{\text{pl}_v} & \Lambda^{n-1} V^* \end{array}$$

горизонтальные стрелки которой суть проекции во внешнюю алгебру (отображения факторизации по соотношениям антикоммутирования), а верхняя горизонтальная стрелка — свёртка

первого тензорного сомножителя с вектором v . По аналогии с симметрическим случаем, определим *грасманову производную* кососимметричного многочлена $\omega \in \Lambda^n V^*$ в направлении вектора $v \in V$ формулой

$$\partial_v \omega \stackrel{\text{def}}{=} \text{deg } \omega \cdot \text{pl}_v \omega.$$

Из билинейности $\text{pl}_v \omega$ по v и ω мы сразу же получаем, что производная в направлении вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ является линейной комбинацией частных производных вдоль базисных векторов:

$$\partial_v = \sum \alpha_i \partial_{e_i}.$$

Если ω не зависит от x_j , то из определений очевидно, что $\partial_{e_j} \omega = 0$. Поэтому ненулевой вклад в производную от базисного монома $\omega = x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n}$ дадут только дифференцирования $\partial_{e_{i_1}}, \partial_{e_{i_2}}, \dots, \partial_{e_{i_n}}$. Из формулы (2-32) вытекает, что

$$\partial_{e_{i_1}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n} = x_{i_2} \wedge x_{i_3} \wedge \dots \wedge x_{i_n}$$

вне зависимости от того, образуют ли неповторяющиеся индексы $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ строго возрастающую последовательность или нет. Таким образом, частная производная грасманова монома по направлению первого слева сомножителя действует как $\partial/\partial x_{i_1}$, т. е. просто уничтожает этот сомножитель. При дифференцировании по направлениям прочих сомножителей возникают знаки:

$$\begin{aligned} \partial_{e_{i_k}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n} &= \partial_{e_{i_k}} (-1)^{k-1} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n} = \\ &= (-1)^{k-1} \partial_{e_{i_k}} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n} = \\ &= (-1)^{k-1} x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n}, \end{aligned}$$

т. е. производная грасманова монома по его k -той слева переменной равна $(-1)^{k-1} \partial/\partial x_{i_k}$. Удобно воспринимать это явление как *грасманово правило Лейбница*:

УПРАЖНЕНИЕ 2.13. Докажите, что грасмановы частные производные удовлетворяют грасманову правилу Лейбница: $\partial_v(\omega \wedge \tau) = \partial_v(\omega) \wedge \tau + (-1)^{\text{deg } \omega} \omega \wedge \partial_v(\tau)$.

Поскольку $\tilde{\omega}(u, w, *, \dots, *) = -\tilde{\omega}(w, u, *, \dots, *)$ операции pl_u и pl_w антикоммутируют относительно композиции: $\text{pl}_u \text{pl}_w \omega = -\text{pl}_w \text{pl}_u \omega$. Поэтому грасмановы частные производные также антикоммутируют: $\partial_u \partial_w = -\partial_w \partial_u$. В частности, $\partial_v^2 \omega \equiv 0$ для любых v и ω .

2.4.2. Линейный носитель грасманова многочлена $\omega \in \Lambda^n V$ определяется как минимальное подпространство $W \subset V$, такое что $\omega \in \Lambda^n W$, и обозначается $\text{Supp}(\omega)$. Очевидно, что носитель ω совпадает с носителем поляризации $\tilde{\omega}$, который по теор. 2.1 является образом отображения $V^{*\otimes(n-1)} \rightarrow V$, задаваемого полной свёрткой с тензором $\tilde{\omega}$. В виду кососимметричности тензора $\tilde{\omega}$ различные отображения свёртки из теор. 2.1 отличаются друг от друга лишь знаком, и поэтому неважно, какую из свёрток взять. Итак, линейный носитель грасманова многочлена степени n порождается векторами

$$\partial_J \omega = \partial_{j_1} \partial_{j_2} \dots \partial_{j_{n-1}} \omega,$$

где $\partial_j = \partial_{x_j}$ и $J = (j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$ пробегает всевозможные наборы из $(n-1)$ попарно различных индексов¹. Если разложить ω в сумму мономов

$$\omega = \sum_I a_I e_I = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n},$$

¹В силу кососимметричности грасмановых частных производных достаточно ограничиться только строго возрастающими наборами.

где коэффициенты $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ кососимметричны по i_1, i_2, \dots, i_n , то ненулевой вклад в $\partial_J \omega$ дадут только мономы $a_I e_I$ с $I \supset J$. В результате, с точностью до общего знака, мы получим

$$\partial_J \omega = \pm \sum_{i \notin J} \alpha_{j_1 j_2 \dots j_{n-1} i} e_i. \quad (2-33)$$

Отсюда получается, например, следующий критерий разложимости грассманова многочлена.

Предложение 2.4

Следующие условия на грассманов многочлен $\omega = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$, где все коэффициенты $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ кососимметричны по индексам i_1, i_2, \dots, i_n , эквивалентны друг другу:

- 1) $\omega = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n$ для некоторых $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$
- 2) $u \wedge \omega = 0 \quad \forall u \in \text{Supp}(\omega)$
- 3) для любых двух наборов неповторяющихся индексов i_1, i_2, \dots, i_{m+1} и j_1, j_2, \dots, j_{m-1} выполнено соотношение Плюккера¹ $\sum_{v=1}^{m+1} (-1)^{v-1} a_{j_1 \dots j_{m-1} i_v} a_{i_1 \dots \hat{i}_v \dots i_{m+1}} = 0$.

Доказательство. Первое условие означает, что многочлен ω лежит в самой старшей внешней степени $\Lambda^{\dim \text{Supp}(\omega)}$ своей линейной оболочки $\text{Supp}(\omega)$. Его равносильность второму условию вытекает из следующего общего факта:

Упражнение 2.14. Докажите, что $\omega \in \Lambda U$ тогда и только тогда однороден степени $\dim U$, когда $u \wedge \omega = 0$ для всех $u \in U$.

Соотношение Плюккера — это координатная запись второго условия для вектора u из формулы (2-33), констатирующая обнуление коэффициента при $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_{m+1}}$ в произведении $\partial_{j_1 \dots j_{m-1}} \omega \wedge \omega$. Поскольку векторы (2-33) линейно порождают пространство $\text{Supp}(\omega)$, этих соотношений достаточно для выполнения второго, а с ним и первого условий предложения. \square

Упражнение 2.15. Выпишите соотношения Плюккера для грассмановой квадратичной формы ω от четырёх переменных и выведите из них, что такая форма тогда и только тогда является произведением двух линейных, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

2.5. Многообразие Грассмана $\text{Gr}(m, V)$ определяется как множество всех m -мерных векторных подпространств в заданном векторном пространстве V . Для d -мерного координатного пространства $V = \mathbb{k}^d$ обозначение $\text{Gr}(m, \mathbb{k}^d)$ сокращается до $\text{Gr}(m, d)$. Например, $\text{Gr}(1, n+1) = \mathbb{P}_n$ и $\text{Gr}(n, n+1) = \mathbb{P}_n^\times$ суть двойственные проективные пространства. Вообще, для d -мерного пространства V двойственность $U \leftrightarrow \text{Ann } U$ из $\text{n}^\circ 1.5$ на стр. 19 задаёт каноническое отождествление $\text{Gr}(m, V) \simeq \text{Gr}(d-m, V^*)$.

2.5.1. Плюккерovo вложение. Грассманиан $\text{Gr}(m, V)$ вкладывается в проективное пространство $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ при помощи отображения Плюккера

$$u : \text{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V), \quad U \mapsto \Lambda^m U, \quad (2-34)$$

¹«крышка» в $a_{i_1 \dots \hat{i}_v \dots i_{m+1}}$ означает, что индекс i_v следует пропустить

переводящего m -мерное подпространство $U \subset V$ в одномерное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$. Если U порождается векторами u_1, u_2, \dots, u_m , то с точностью до пропорциональности

$$u(U) = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m.$$

Переход к другому базису в U , скажем, состоящему из векторов

$$w_i = \sum a_{ij} u_j,$$

заменяет $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$ на $w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_m = \det(a_{ij}) \cdot u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$.

Предложение 2.5

Отображение Плюккера (2-34) вкладывает грассманиан в проективное пространство в качестве алгебраического многообразия, задаваемого квадратичными соотношениями Плюккера из формулы (3) в предл. 2.4 на стр. 34.

Доказательство. Образом плюккерова отображения являются однородные разложимые грассмановы многочлены степени m . Согласно п. (3) из предл. 2.4 этот образ является пересечением квадрик. Отображение Плюккера инъективно, поскольку при $U \neq W$ в V имеется базис

$$v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, u_2, \dots, u_{m-r}, w_1, w_2, \dots, w_{m-r}, v_{2m-r}, v_{2m-r+1}, \dots, v_n,$$

в котором v_1, v_2, \dots, v_r образуют базис пересечения $U \cap W$, а

$$v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, u_2, \dots, u_{m-r} \quad \text{и} \quad v_1, v_2, \dots, v_r, w_1, w_2, \dots, w_{m-r}$$

составляют базисы в U и W , так что отображение Плюккера сопоставляет им различные базисные мономы $v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_{m-r} \neq v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_{m-r}$ алгебры ΛV . \square

Замечание 2.1. С алгебраической точки зрения как многообразие Веронезе $V(n, k)$, так и грассманиан $\text{Gr}(n, k)$ состоят из классов пропорциональности *максимально вырожденных* ненулевых однородных многочленов степени n от k переменных, если поимать под максимальной вырожденностью минимальность ранга. Минимально возможный ранг обычного коммутативного полинома равен единице, и всякий многочлен степени m и ранга 1 есть чистая m -тая степень линейной формы. Минимально возможный ранг Грассманова однородного полинома степени m равен m , и всякий такой полином является произведением m различных линейных форм.

2.5.2. Плюккеревы координаты. На координатном языке точку $U \in \text{Gr}(m, d)$ можно задавать $m \times d$ матрицей X_U , по строкам которой написаны координаты каких-нибудь базисных векторов u_1, u_2, \dots, u_m пространства U в стандартном базисе e_1, e_2, \dots, e_d координатного пространства \mathbb{k}^d . Разумеется, такое представление не единственно, и две матрицы $X, Y \in \text{Mat}_{m \times d}(\mathbb{k})$ максимального ранга m тогда и только тогда задают одно и то же подпространство $U \subset \mathbb{k}^d$, когда они получаются друг из друга левым умножением на обратимую матрицу $C \in \text{GL}_m(\mathbb{k})$, по строкам которой стоят коэффициенты разложений строк матрицы X по базису в U , образованному строками матрицы Y . Иначе говоря, грассманиан $\text{Gr}(m, d)$ представляет собой фактор¹ пространства $m \times d$ -матриц максимального ранга m по действию на нём группы $\text{GL}_m(\mathbb{k})$ левыми умножениями. Обратите внимание, что при $m = 1$ это описание в точности

¹Т. е. пространство орбит.

совпадает с описанием точек проективного пространства $\mathbb{P}_{d-1} = \text{Gr}(1, d)$ при помощи однородных координат, т. е. в виде ненулевых строк $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \text{Mat}_{1 \times d}$ с точностью до умножения на ненулевые константы $\lambda \in \mathbb{k}^* = \text{GL}_1(\mathbb{k})$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.16. Убедитесь, что грассманово произведение $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$ векторов $u_i = \sum e_j \cdot x_{ij}$ раскладывается по базису $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ пространства $\Lambda^m \mathbb{k}^d$ как $\sum e_I \cdot \det X_I$, где X_I означает $m \times m$ -подматрицу матрицы $X = (x_{ij})$, образованную столбцами с номерами $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$.

Таким образом, плюккерovo вложение $u : \text{Gr}(m, d) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m \mathbb{k}^d)$ переводит линейную оболочку строк матрицы $X \in \text{Mat}_{m \times d}(\mathbb{k})$ ранга m в точку, однородные координаты которой суть всевозможные $m \times m$ -миноры матрицы X . Этот набор миноров называется *плюккеровыми координатами* подпространства $U \subset \mathbb{k}^d$, натянутого на строки матрицы X .

УПРАЖНЕНИЕ 2.17. Убедитесь, что при замене X на CX с $C \in \text{GL}_m(\mathbb{k})$ плюккерovy координаты умножаются на $\det C$.

2.5.3. Стандартное аффинное покрытие и аффинные координаты. Аналогом i -той стандартной аффинной карты U_i проективного пространства¹ $\mathbb{P}_n = \text{Gr}(1, n)$ на произвольном грассманиане $\text{Gr}(m, d)$ является множество $U_I \subset \text{Gr}(m, d)$, образованное всеми подпространствами $U \subset V$, матрица X которых содержит невырожденную $m \times m$ -подматрицу X_I в столбцах с номерами $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$. Умножая такую матрицу X слева на $X_I^{-1} \in \text{GL}_m$, можно сделать подматрицу X_I единичной. Матрица $A_I(U) = X_I^{-1}X$ зависит только от I и U , и подпространство U восстанавливается по ней однозначно. Поэтому $m(d - m)$ её элементов $a_{ij}^{(I)}(U)$ с $j \notin I$ называются *стандартными аффинными координатами* подпространства U в карте U_I .

Карта U_I является полным прообразом относительно плюккерова вложения (2-34) стандартной аффинной карты $U_I \subset \mathbb{P}(\Lambda^m V)$, в которой отлична от нуля I -тая плюккерова координата².

Иначе можно сказать, что карта U_I состоит из всех таких подпространств $U \subset V$, которые изоморфно проектируются на I -тое координатное подпространство $E_I \subset V$, натянутое на базисные векторы $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}$, вдоль дополнительного координатного подпространства $E_J \subset V$, натянутого на остальные базисные векторы e_j с $j \notin I$. Если взять в качестве базиса такого подпространства U прообразы базисных векторов e_i с $i \in I$ при упомянутой проекции, то матрица X , отвечающая этому базису, как раз и совпадёт с матрицей $A_I(U)$, имеющей единичную подматрицу в I -столбцах.

2.5.4. Клеточное разбиение. Метод Гаусса показывает, что любое подпространство $U \subset V$ обладает *единственным* базисом $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, матрица координат которого имеет *строгий ступенчатый вид*³.

УПРАЖНЕНИЕ 2.18. Докажите, что различные строго ступенчатые матрицы задают разные подпространства в V .

Таким образом возникает биекция между точками грассманиана $\text{Gr}(m, d)$ и строгими ступенчатыми матрицами ранга m и размера $m \times d$. Строгие ступенчатые матрицы, ступеньки которых

¹напомним, что она состоит из всех векторов, i -тая координата которых отлична от нуля, так что её можно сделать равной 1, умножая на подходящую константу

²т. е. координата вдоль вектора $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$.

³т. е. самый левый ненулевой элемент каждой строки равен единице, располагается строго правее, чем в предыдущей строке, и является единственным ненулевым элементом в своём столбце.

располагаются в столбцах с возрастающими номерами $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, образуют аффинное пространство размерности

$$m(d - m) - \sum_{v=1}^m (i_v - v) = \dim \text{Gr}(m, d) - \left(|I| - \frac{m(m+1)}{2} \right).$$

Весь грассманиан $\text{Gr}(m, d)$ является дизъюнктивным объединением $\binom{d}{m}$ таких аффинных пространств, отвечающих различным выборам I . Эти аффинные пространства называются *открытыми* или *аффинными клетками Шуберта*. Альтернативным общепринятым способом нумерации клеток Шуберта является их индексация диаграммами Юнга¹ $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, уместающимися в прямоугольнике $m \times (d - m)$. При этом длина v -той сверху строки λ_v указывает на сколько клеток самый левый ненулевой элемент в v -той снизу строке ступенчатой матрицы сдвинут вправо от самого левого возможного своего положения, т. е. углы ступенек в матрице типа $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ находятся в столбцах с номерами $i_v = (m + 1 - v) + \lambda_{m+1-v}$. Открытая клетка Шуберта, отвечающая диаграмме λ , обозначается σ_λ . Обратите внимание, что коразмерность такой клетки в грассманиане в точности равна количеству клеток $|\lambda|$ в диаграмме λ . Например, диаграмма



отвечает 13-мерной аффинной клетке Шуберта $\sigma_{4,4,2,1} \subset \text{Gr}(4, 10)$, образованной подпространствами $U \subset \mathbb{K}^{10}$, порождёнными строками строгих ступенчатых матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}.$$

Пустой диаграмме $(0, 0, 0, 0)$ отвечает самое левое из всех возможных положений ступенек, т. е. 24-мерное пространство матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

представляющее собою стандартную аффинную карту $U_{(1,2,3,4)} \subset \text{Gr}(4, 10)$. Самая большая диаграмма — прямоугольник $(6, 6, 6, 6)$ — описывает нульмерное аффинное пространство, ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¹Т. е. выровненных по левому краю горизонтальных клетчатых полосочек, длины которых образуют невозрастающую сверху вниз последовательность $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$.

с самым правым из возможных расположением ступенек. Над конечным полем \mathbb{k} из q элементов разбиение $\text{Gr}(m, d) = \bigsqcup \overset{\circ}{\sigma}_\lambda$ влечёт формулу

$$\binom{d}{m}_q = q^m(d-m) \sum_{\lambda} q^{-|\lambda|},$$

где суммирование происходит по всем диаграммам Юнга, уместающимся в прямоугольнике $m \times (d-m)$, а

$$\binom{d}{m}_q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(q^d - 1)(q^d - q) \cdots (q^d - q^{m-1})}{(q^m - 1)(q^d - q) \cdots (q^m - q^{m-1})}$$

обозначает Гауссов q -биномиальный коэффициент.

2.5.5. Квадрика Плюккера и прямые в \mathbb{P}_3 . Простейший грассманиан, не являющийся проективным пространством, это грассманиан $\text{Gr}(2, 4) = \text{Gr}(2, V)$ двумерных векторных подпространств в четырёхмерном векторном пространстве $V \simeq \mathbb{k}^4$ или, что то же самое, множество прямых в трёхмерном проективном пространстве $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$. Плюккерovo вложение

$$u : \text{Gr}(2, V) \hookrightarrow \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \quad (2-35)$$

отождествляет его с множеством разложимых бивекторов $\omega \in \Lambda^2 V$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.19. Для любого пространства¹ V убедитесь, что бивектор $\omega \in \Lambda^2 V$ разложим тогда и только тогда, когда $\omega \wedge \omega = 0$ в $\Lambda^4 V$.

При $\dim V = 4$ разложимые бивекторы образуют в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ невырожденную *квадрику Плюккера*

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \{ \omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0 \} = V(q), \quad (2-36)$$

множество изотропных векторов канонической с точностью до пропорциональности симметричной невырожденной билинейной формы \tilde{q} на $\Lambda^2 \mathbb{k}^4$, определяемой равенством

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{q}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad (2-37)$$

где e_1, e_2, e_3, e_4 — произвольный базис в V .

УПРАЖНЕНИЕ 2.20. Убедитесь, что эта форма симметрична, невырождена и при выборе другого базиса в V умножается на ненулевую константу. Напишите её матрицу Грама в базисе из бивекторов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$.

В координатах x_{ij} относительно базиса из бивекторов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ условие разложимости $q(\omega) = \tilde{q}(\omega, \omega) = 0$ бивектора $\omega = \sum_{ij} x_{ij} e_{ij}$ принимает вид

$$x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0,$$

а плюккерovo вложение (2-35) переводит прямую (u, w) , порождённую векторами $u = \sum u_i e_i$, $w = \sum w_j e_j$ с матрицей координат

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}$$

¹Необязательно четырёхмерного.

в бивектор с координатами $x_{ij} = \det \begin{pmatrix} u_i & u_j \\ w_i & w_j \end{pmatrix}$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.21. Существует ли комплексная 2×4 -матрица, шесть 2×2 -миноров которой, выписанные в случайном порядке, суть а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ б) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$? Если да, то предъявите такую матрицу явно.

ЛЕММА 2.1

Две прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$ пересекаются, если и только если их образы при отображении Пюккера (2-35) ортогональны относительно квадратичной формы (2-37), т. е. тогда и только тогда, когда

$$\tilde{q}(u(\ell_1), u(\ell_2)) = u(\ell_1) \wedge u(\ell_2) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$, то в V существует такой базис e_1, e_2, e_3, e_4 , что $\ell_1 = (e_1 e_2)$, а $\ell_2 = (e_3 e_4)$. Тогда $u(\ell_1) \wedge u(\ell_2) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$. Если ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке a , то $\ell_1 = (ab)$, а $\ell_2 = (ac)$ для некоторых $b, c \in V$, и $u(\ell_1) \wedge u(\ell_2) = a \wedge b \wedge a \wedge c = 0$. \square

СЛЕДСТВИЕ 2.2

Для любой точки $p = u(\ell) \in P$ пересечение пюккеровой квадрики (2-36) с касательной плоскостью в точке p состоит из пюккерových образов всех прямых, пересекающих ℓ :

$$P \cap T_p P = \{u(\ell') \mid \ell' \cap \ell \neq \emptyset\}.$$

ПРИМЕР 2.2 (связки и пучки прямых в \mathbb{P}_3)

Множество прямых в \mathbb{P}_3 называется *связкой*, если его пюккеров образ является двумерной плоскостью, лежащей на квадрике Пюккера. Каждая такая плоскость $\pi \subset P$ линейно порождается тройкой неколлинеарных точек $p_i = u(\ell_i)$, $i = 1, 2, 3$. При этом $\pi = P \cap T_{p_1} P \cap T_{p_2} P \cap T_{p_3} P$. По лем. 2.1 и сл. 2.2 соответствующая связка прямых состоит из всех таких прямых, которые пересекают 3 данные попарно пересекающиеся прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 в \mathbb{P}_3 . Три прямых в \mathbb{P}_3 попарно пересекаются ровно в двух случаях: когда они лежат в одной плоскости или когда они проходят через одну точку. Таким образом, существуют два геометрически разных типа связок прямых на \mathbb{P}_3 :

α -плоскость $\pi_\alpha(O) \subset P$ является образом α -связки, состоящей из всех прямых, проходящих через данную точку $O \in \mathbb{P}_3$, и линейно порождается пюккеровыми образами любых трёх некомпланарных прямых, проходящих через O

β -плоскость $\pi_\beta(\Pi) \subset P$ является образом β -связки, состоящей из всех прямых, лежащих в данной плоскости $\Pi \in \mathbb{P}_3$, и линейно порождается пюккеровыми образами любых трёх лежащих в Π прямых, не проходящих там через одну точку.

При этом любые две плоскости одного и того же типа всегда пересекаются ровно по одной точке

$$\begin{aligned} \pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) &= u(\Pi_1 \cap \Pi_2) \\ \pi_\alpha(O_1) \cap \pi_\alpha(O_2) &= u((O_1 O_2)), \end{aligned}$$

а две плоскости различных типов $\pi_\beta(\Pi)$, $\pi_\alpha(O)$ не пересекаются при $O \notin \Pi$ и пересекаются по прямой при $O \in \Pi$. В последнем случае прямая пересечения является пюккеровым образом пучка прямых на \mathbb{P}_3 , лежащих в плоскости Π и проходящих через точку $O \in \Pi$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.22. Покажите, что всякая прямая, лежащая на квадрике Пюккера, является пересечением α -плоскости с β -плоскостью, и тем самым, представляет собою пучок прямых, лежащих в некоторой плоскости и проходящих там через одну точку.

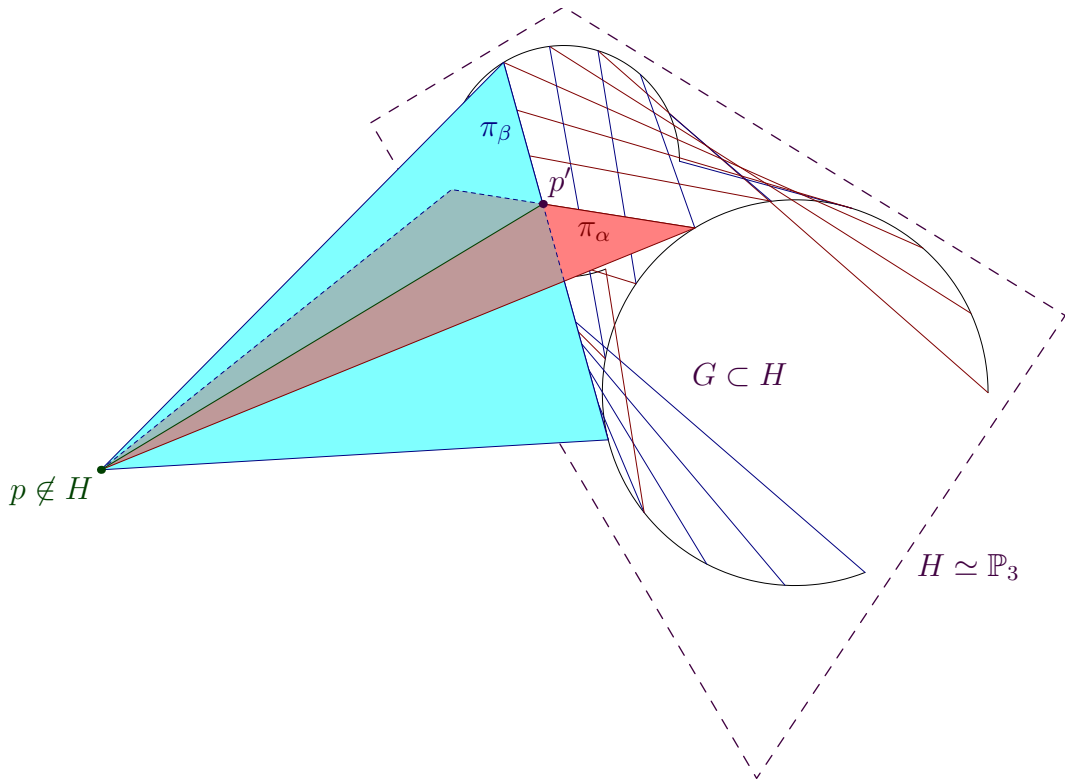
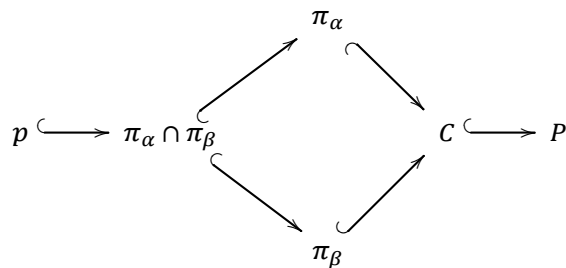


Рис. 2◊1. Конус $C = P \cap T_p P$

ПРИМЕР 2.3 (клеточное разбиение пюккеровой квадрики)

Зафиксируем какую-нибудь дополнительную к точке $p \in P$ трёхмерную гиперплоскость $H \subset T_p P$ в четырёхмерном касательном пространстве $T_p P$ к квадрике Пюккера $P \subset \mathbb{P}^5$. Особая квадрика $C = P \cap T_p P$ представляет собой простой конус с вершиной p над неособой квадрикой $G = H \cap P$, изоморфной квадрике Сегре в \mathbb{P}^3 . Это приводит к следующей стратификации пюккеровой квадрики замкнутыми подмножествами:



Открытые подмножества этих стратов, дополнительные к объединению стратов меньшей размерности, задают дизъюнктное разбиение пюккеровой квадрики P на открытые клетки, есте-

ственно изоморфные аффинным пространствам:

$$\text{Gr}(2, 4) = \mathbb{A}^0 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \left(\begin{array}{c} \mathbb{A}^2 \\ \sqcup \\ \mathbb{A}^2 \end{array} \right) \sqcup \mathbb{A}^3 \sqcup \mathbb{A}^4.$$

В самом деле, сначала мы имеем проективную прямую без точки: $(\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \setminus p \simeq \mathbb{A}^1$. Затем возникает пара проективных плоскостей без проективной прямой: $\pi_\alpha \setminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \simeq \pi_\beta \setminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \simeq \mathbb{A}^2$. Далее идут аффинный конус над дополнением квадрики Сегре до пары прямых, высекаемых из неё касательной плоскостью

$$C \setminus (\pi_\alpha \cup \pi_\beta) \simeq \mathbb{A}^1 \times (G \setminus (G \cap T_p G)),$$

и открытое плотное множество плюккеровой квадрики, дополнительное до её пересечения с касательной плоскостью в точке p

$$P \setminus T_p P \simeq \mathbb{A}^4$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.23. Покажите, что проекция гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \in Q$ на произвольную гиперплоскость $H \not\ni p$ задаёт бирациональную биекцию между дополнением $Q \setminus T_p Q$ и аффинным пространством $H \setminus T_p Q \simeq \mathbb{A}^{n-1}$.

ПРИМЕР 2.4 (исчисление Шуберта на грассманиане $\text{Gr}(2, 4)$)

Аффинные пространства из построенного в [прим. 2.3](#) разбиения плюккеровой квадрики, являются плюккеровыми образами шести аффинных клеток Шуберта $\sigma_\lambda \subset \text{Gr}(2, 4)$. Их замыкания называются (замкнутыми) *циклами Шуберта* и обозначаются σ_λ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.24. Убедитесь, что в терминах плюккеровой квадрики $P \subset \mathbb{P}_5$ циклы Шуберта грассманиана $\text{Gr}(2, 4)$ суть

$$\begin{aligned} \sigma_{00} &= P \\ \sigma_{22} &= \text{точка } p = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \text{ в } \mathbb{P}_5 \\ \sigma_{10} &= P \cap T_p P \\ \sigma_{11} &= \pi_\alpha(O), \text{ где } O = (0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}_3 \\ \sigma_{20} &= \pi_\beta(\Pi), \text{ где } \Pi = \text{Ann}(x_0) \subset \mathbb{P}_3 \\ \sigma_{21} &= \pi_\alpha(O) \cap \pi_\beta(\Pi). \end{aligned}$$

Над полем $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ циклы Шуберта σ_λ образуют свободный базис \mathbb{Z} -модуля целочисленных гомологий $H_*(\text{Gr}(m, \mathbb{C}^d), \mathbb{Z})$, поскольку построенный по разбиению на клетки Шуберта клеточный цепной комплекс для вычисления гомологий не содержит клеток нечётной (вещественной) размерности и, стало быть, имеет нулевые дифференциалы.

УПРАЖНЕНИЕ 2.25*. Опишите из каких клеток σ_μ состоит замыкание каждой клетки σ_λ и вычислите граничный оператор клеточного цепного комплекса на вещественном грассманиане $\text{Gr}(m, \mathbb{R}^d)$.

Топологическое пересечение циклов задаёт на \mathbb{Z} -модуле $H_*(\text{Gr}(m, \mathbb{C}^d), \mathbb{Z})$ структуру коммутативного кольца. Гомологические классы пересечений циклов Шуберта могут быть выражены

в виде целочисленных линейных комбинаций циклов Шуберта. В общем случае способы получения таких разложений достаточно витиеваты¹. Для простейшего грассманиана $\text{Gr}(2, 4)$ эти формулы легко получить геометрически.

Очевидно, что циклы, суммарная коразмерность которых меньше четырёх, имеют нулевые пересечения. Пересечения циклов дополнительной размерности уже были вычислены нами в прим. 2.2:

$$\sigma_{10}\sigma_{21} = \sigma_{20}^2 = \sigma_{11}^2 = \sigma_{22} \quad \text{и} \quad \sigma_{20}\sigma_{11} = 0.$$

По тем же причинам $\sigma_{10}\sigma_{20} = \sigma_{10}\sigma_{11} = \sigma_{21}$. Для вычисления σ_{10}^2 реализуем цикл σ_{10} в виде

$$\sigma_{10}(\ell) = P \cap T_{u(\ell)}P = \{\ell'' \subset \mathbb{P}_3 \mid \ell \cap \ell'' \neq \emptyset\}.$$

Тогда σ_{10}^2 гомологичен пересечению $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell')$, которое при общем положении пары прямых ℓ, ℓ' представляет собой неособую квадрику Сегре с рис. 2♦1. Если продеформировать прямую ℓ' так, чтобы она стала пересекаться с прямой ℓ , эта квадрика продеформируется в своём классе гомологий в пару пересекающихся плоскостей: α -связку с центром $O = \ell \cap \ell'$ и β -связку в плоскости Π , натянутой на ℓ и ℓ' : $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell') = \pi_\alpha(O) \cup \pi_\beta(\Pi)$. Таким образом,

$$\sigma_{10}^2 = \sigma_{20} + \sigma_{11}.$$

В качестве приложения мы получаем «грубое» топологическое решение следующей известной задачи: сколько прямых пересекает четыре заданные попарно непересекающихся прямые в \mathbb{P}_3 ? Если заданные прямые находятся в достаточно общем положении, то ответ даётся коэффициентом при σ_{22} в четырёхкратном самопересечении σ_{10}^4 . Согласно предыдущему,

$$\sigma_{10}^4 = (\sigma_{20} + \sigma_{11})^2 = \sigma_{20}^2 + \sigma_{11}^2 = 2\sigma_{22},$$

т. е. в общем случае есть ровно две такие прямые.

2.6. Многообразие Сегре $\mathcal{S}(m_1, m_2, \dots, m_n)$ представляет собою образ вложения Сегре

$$s : \mathbb{P}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{m_n} \rightarrow \mathbb{P}_m,$$

переводящего прямое произведение проективных пространств $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$ в пространство $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n)$, отправляя набор одномерных подпространств, порождённых ненулевыми векторами $v_i \in V_i$, в их тензорное произведение, порождённое вектором

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \in V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n.$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.26. Проверьте, что это отображение корректно определено² и является вложением.

Так как разложимые тензоры линейно порождают всё пространство $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$, многообразии Сегре не лежит ни в какой гиперплоскости, хотя его размерность обычно сильно меньше размерности объемлющего пространства. По построению, многообразии Сегре заматается n семействами проективных подпространств размерностей m_1, m_2, \dots, m_n , где $m_i = d_i - 1$. Квадрика Сегре из н° 1.4.4 на стр. 18 является простейшим примером такого многообразия.

¹см. книги: *W. Fulton Young Tableaux* (CUP, LMS Stud. Texts 35), *Ф. Гриффитс, Дж. Харрис Принципы алгебраической геометрии, I* (Мир, 1982), *У. Фултон Теория пересечений* (Мир, 1989), *И. Макдоналд Симметрические функции и многочлены Холла* (Мир, 1985)

²Т. е. тензор $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n$ отличен от нуля и заменяется на пропорциональный при замене векторов v_i на пропорциональные.

ПРИМЕР 2.5 (ОПЕРАТОРЫ РАНГА 1)

Для конечномерных векторных пространств U, W каноническое отображение

$$U^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(U, W),$$

сопоставляющее разложимому тензору $\xi \otimes u$ линейное отображение ранга 1

$$\xi \otimes u : U \rightarrow W, \quad u \mapsto \xi(u) \cdot w, \quad (2-38)$$

является изоморфизмом. Таким образом, проективизация множества операторов ранга 1 представляет собою многообразие Сегре $S(m, n) \subset \mathbb{P}^{mn-1} = \mathbb{P}(\text{Hom}(U, W))$. Если зафиксировать в пространствах U, W какие-нибудь базисы, записать все линейные отображения $U \rightarrow W$ матрицами в этих базисах и использовать матричные элементы a_{ij} в качестве однородных координат на $\mathbb{P}(\text{Hom}(U, W))$, многообразие Сегре будет задаваться в этих координатах системой квадратичных уравнений

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{lj} & a_{lk} \end{pmatrix} = a_{ij}a_{lk} - a_{ik}a_{lj} = 0,$$

констатирующих зануление всех миноров второго порядка. В этих координатах отображение Сегре переводит пару точек с однородными координатами $(x_1 : x_2 : \dots : x_n)$ и $(y_1 : y_2 : \dots : y_n)$ в точку, однородными координатами которой являются mn всевозможных произведений $x_j y_i$ — матричные элементы произведения $y^t \cdot x$ столбца y на строку x . Два семейства «координатных плоскостей» $\xi \times \mathbb{P}^{m-1}$ и $\mathbb{P}^{n-1} \times w$ при этом перейдут в два семейства проективных пространств, заметающих многообразие Сегре. При $\dim U = \dim W = 2$ мы получаем в точности обсуждавшуюся в ?? биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и детерминантной квадратикой Сегре в \mathbb{P}_3 .

2.6.1. Многообразие Сегре как линейное сечение грассманиана. Рассмотрим сумму

$$W = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$$

конечномерных векторных пространств V_i и для каждого $k \in \mathbb{N}$ и таких целых неотрицательных m_1, m_2, \dots, m_n , что $0 \leq m_i \leq \dim V_i$ и $\sum_i m_i = k$, обозначим через $W_{m_1, m_2, \dots, m_n} \subset \Lambda^k W$ линейную оболочку всевозможных произведений $w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k$ содержащих m_1 сомножителей из пространства V_1 , m_2 сомножителей из пространства V_2 , и т. д.

УПРАЖНЕНИЕ 2.27. Убедитесь, что правило $\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_n \mapsto \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n$ корректно задаёт изоморфизм векторных пространств

$$\Lambda^{m_1} V_1 \otimes \Lambda^{m_2} V_2 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_n} V_n \xrightarrow{\cong} W_{m_1, m_2, \dots, m_n},$$

и докажите, что

$$\Lambda^k W = \bigoplus_{m_1, m_2, \dots, m_n} W_{m_1, m_2, \dots, m_n} \simeq \bigoplus_{m_1, m_2, \dots, m_n} \Lambda^{m_1} V_1 \otimes \Lambda^{m_2} V_2 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_n} V_n.$$

Таким образом, тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ канонически отождествляется с векторным подпространством $W_{1,1,\dots,1} \subset \Lambda^n W$. Разложимые тензоры $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n$ переходят при этом отождествлении в разложимые поливекторы $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n$, что позволяет отождествить многообразие Сегре $S(m_1, m_2, \dots, m_n)$ с сечением грассманиана $\text{Gr}(n, W) \subset \mathbb{P}(\Lambda^n W)$ проективным подпространством $\mathbb{P}(W_{1,1,\dots,1}) \subset \mathbb{P}(\Lambda^n W)$. Таким образом, многообразие Сегре задаётся в проективном пространстве $\mathbb{P}(W_{1,1,\dots,1})$ системой однородных квадратных уравнений — ограничениями соотношений Плюккера [предл. 2.4](#) на стр. 34 для пространства $\Lambda^n W$ на подпространство $W_{1,1,\dots,1} \subset \Lambda^n W$.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 2.1. См. Лемму 1.1 из лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-01.pdf>.

Упр. 2.3. Для любого линейного отображения $f : V \rightarrow A$ отображение

$$V \times V \times \dots \times V \rightarrow A,$$

переводящее (v_1, v_2, \dots, v_n) в произведение $f(v_1) \cdot f(v_2) \cdot \dots \cdot f(v_n) \in A$ полилинейно, и значит, корректно определяет для каждого $n \in \mathbb{N}$ линейное отображение $V^{\otimes n} \rightarrow A$. Вместе они задают гомоморфизм алгебр $TV \rightarrow A$, продолжающий f . Всякий гомоморфизм $TV \rightarrow A$, продолжающий f , переводит всякий разложимый тензор $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ в $\varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \cdot \dots \cdot \varphi(v_n) \in A$, и стало быть, совпадает с построенным продолжением. Это доказывает выполнение универсального свойства. Тот факт, что TV и ι однозначно определяются этим универсальным свойством, доказывается стандартным рассуждением, как в Лемме 1.1 из лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-01.pdf>.

Упр. 2.4. Ответ: $\binom{n+d-1}{d-1}$, т. е. число решений уравнения $m_1 + m_2 + \dots + m_d = n$ в неотрицательных целых числах m_1, m_2, \dots, m_d .

Упр. 2.5. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают $V^{*\otimes n}$ и формула

$$v \lrcorner \varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$$

линейна по v и φ , достаточно проверять её для форм φ , переводимых изоморфизмом (??) в разложимые тензоры вида $\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \otimes \xi_n$, а для таких форм она очевидна из построения.

Упр. 2.6. Выберем в V такой базис $e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q, w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s$, что векторы e_i образуют базис в $U \cap W$, векторы u_j и w_k дополняют его до базисов в U и W соответственно, а векторы v_m дополняют всё предыдущее до базиса в V . Разложим t по базисным тензорным мономам. Условие $t \in U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$ означает, что в t входят только мономы, не содержащие никаких иных векторов, кроме e_i .

Упр. 2.7. Стабилизатор каждого слагаемого в симметрической группе S_n состоит из

$$m_1! m_2! \dots m_d!$$

независимых перестановок одинаковых сомножителей между собою. Остаётся применить формулу для длины орбиты.

Упр. 2.8. Свёртка базисного симметричного тензора $x_{[m_1, m_2, \dots, m_d]} \in \text{Sym}^n(V^*)$ с тензором $v^{\otimes n} \in V^{\otimes n}$ представляет собой сумму $n!/(m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_d!)$ одинаковых произведений

$$x_1(v)^{m_1} x_2(v)^{m_2} \cdot x_d(v)^{m_d}$$

и совпадает со значением на векторе v полиномиальной функции

$$(x_1, x_2, \dots, x_d) \mapsto \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_d!} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_d^{m_d}.$$

Упр. 2.10. Поскольку утверждение линейно по v , f и g достаточно проверить его для $v = e_i$, $f = x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}$, $g = x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}$, что делается прямо по определению.

Упр. 2.11. Это следует из равенства $\tilde{f}(v, x, \dots, x) = \frac{1}{n} \cdot \partial_v f(x)$, где $n = \deg f$.

Упр. 2.13. Это аналогично упр. 2.10.

Упр. 2.14. Фиксируем в U базис e_1, e_2, \dots, e_m . Если $\omega \notin \Lambda^m U$, то в ω есть моном e_I , не содержащий какого-нибудь базисного вектора — скажем, e_i . Тогда $e_i \wedge \omega \neq 0$, поскольку будет содержать ненулевой моном $e_{i \sqcup I}$, возникающий только из произведения e_i на e_I и, стало быть, не способный ни с чем сократиться. Наоборот, если $\omega \in \Lambda^m U$, то $\omega = \lambda \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_m$ и $e_i \wedge \omega = 0 \forall i$, а значит, $u \wedge \omega = 0 \forall u \in U$.

Упр. 2.18. Возрастающий набор номеров $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ тех столбцов, в которых располагаются углы ступенек, однозначно восстанавливается по U как лексикографически минимальный набор набор I , такой что U изоморфно проектируется на координатное подпространство E_I вдоль дополнительного координатного подпространства, а строки матрицы — как координаты образов стандартных базисных векторов $e_i \in E_I$ при этой проекции.

Упр. 2.19. Если $\omega = u_1 \wedge u_2$, то $\omega \wedge \omega = u_1 \wedge u_2 \wedge u_1 \wedge u_2 = 0$. Из курса линейной алгебры известно, что произвольный бивектор $\omega \in \Lambda^2 V$ в подходящем базисе e_1, e_2, \dots, e_d пространства V записывается как $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots$. Если слагаемых больше одного, то $\omega \wedge \omega = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \dots \neq 0$, и стало быть, ω не разложим.

Упр. 2.22. (Ср. с общей теорией из ??.) Рассмотрим конус $C = P \cap T_p P$. Он имеет вершину в p и состоит из всех прямых, проходящих через p и лежащих на P . Фиксируем 3-мерную гиперплоскость $H \subset T_p P$, которая не содержит p . Тогда $G = C \cap H$ есть невырожденная квадратика на H . Таким образом, любая прямая, проходящая через p , имеет вид $(pp') = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$, где $p' \in G$ и плоскости π_α, π_β натянуты на p и две прямые, проходящие через p' в G (см. рис. 2◊1).

Упр. 2.23. Каждая прямая, которая проходит через p и не касается Q , пересекает квадратичку ещё ровно в одной отличной от p точке, координаты которой, по теореме Виета, рационально зависят от прямой.