

§3. Аффинная алгебраическая геометрия

3.1. Порция коммутативной алгебры. Всюду в этом параграфе слово «кольцо» означает по умолчанию коммутативное кольцо с единицей, а гомоморфизмы колец всегда предполагаются отображающими единицу в единицу.

3.1.1. Образующие идеалов. Любое множество элементов $M \subset A$ коммутативного кольца A порождает в A идеал (M) , состоящий из всевозможных конечных сумм

$$g_1 f_1 + g_2 f_2 + \dots + g_m f_m,$$

в которых $g_\nu \in A$, а $f_\nu \in M$. Как A -модуль, идеал (M) представляет собою A -линейную оболочку элементов множества M . Элементы f_1, f_2, \dots, f_m из какого-либо идеала $I \subset A$ называются образующими этого идеала, если $I = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, т. е. f_1, f_2, \dots, f_m линейно порождают I как A -модуль. Коммутативное кольцо A называется нётеровым, если каждый его идеал допускает конечное множество образующих. Условие нётеровости имеет несколько эквивалентных переформулировок.

ЛЕММА 3.1

Следующие свойства коммутативного кольца A попарно эквивалентны:

- (1) любое множество элементов $M \subset A$ содержит некоторое конечное подмножество, порождающее тот же идеал, что и M
- (2) любой идеал в A допускает конечное множество образующих
- (3) для любой бесконечной цепочки вложенных идеалов $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $I_\nu = I_n$ для всех $\nu \geq n$.

Доказательство. Ясно, что (1) \Rightarrow (2). Для доказательства импликации (2) \Rightarrow (3) заметим, что объединение $I = \bigcup_\nu I_\nu$ всех идеалов возрастающей цепочки также является идеалом, и стало быть, линейно порождается над A конечным числом элементов $f_1, f_2, \dots, f_m \in I$. Все эти элементы содержатся в некотором идеале I_n из цепочки. Следовательно, $I_\nu = I_n = I$ для всех $\nu \geq n$. Чтобы вывести (1) из (3), рассмотрим цепочку идеалов $I_n = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, которая строится по индукции следующим образом: в качестве f_1 возьмём произвольный элемент множества M . При $i > 1$ и $(M) \neq (f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$ в качестве f_i возьмём любой элемент из M , не лежащий в $(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$. Тогда идеалы $I_{i-1} \subsetneq I_i$ будут строго возрастать, что в силу (3) не может продолжаться бесконечно, т. е. на каком-то шагу мы придём к равенству $(M) = (f_1, f_2, \dots, f_i)$. \square

ТЕОРЕМА 3.1 (ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА О БАЗИСЕ)

Если A нётерово, то кольцо многочленов $A[x]$ также нётерово.

Доказательство. Рассмотрим произвольный идеал $I \subset A[x]$ и обозначим через $L_d \subset A$ множество старших коэффициентов всех многочленов степени $\leq d$ из I , а через $L_\infty = \bigcup_d L_d$ — множество старших коэффициентов вообще всех многочленов из I .

УПРАЖНЕНИЕ 3.1. Убедитесь, что все L_d (включая L_∞) являются идеалами в A .

Поскольку кольцо A нётерово, все идеалы L_d конечно порождены. Для каждого d (включая $d = \infty$) обозначим через $f_1^{(d)}, f_2^{(d)}, \dots, f_{m_d}^{(d)} \in A[x]$ многочлены, старшие коэффициенты которых

порождают соответствующий идеал L_d в A . Пусть наибольшая из степеней многочленов $f_i^{(\infty)}$, старшие коэффициенты которых порождают идеал $L_\infty \subset A$, равна $D \in \mathbb{N}$. Покажем, что идеал I порождается многочленами $f_i^{(\infty)}$ и многочленами $f_j^{(d)}$ с $0 \leq d < D$.

Произвольный многочлен $g \in I$ сравним по модулю многочленов $f_1^{(\infty)}, f_2^{(\infty)}, \dots, f_{m_\infty}^{(\infty)}$ с многочленом, степень которого строго меньше D . В самом деле, поскольку старший коэффициент многочлена g лежит в идеале L_∞ , он имеет вид $\sum \lambda_i a_i$, где $\lambda_i \in A$, а a_i — старшие коэффициенты многочленов $f_i^{(\infty)}$. При $\deg g \geq D$ все разности $m_i = \deg g - \deg f_i^{(\infty)}$ неотрицательны, и мы можем образовать многочлен $h = g - \sum \lambda_i \cdot f_i(x) \cdot x_i^{m_i}$, сравнимый с g по модулю I и имеющий строго меньшую, чем g степень. Заменяем g на h и повторяем эту процедуру, пока не получим многочлен $h \equiv g \pmod{(f_1^{(\infty)}, f_2^{(\infty)}, \dots, f_{m_\infty}^{(\infty)})}$ степени $\deg h < D$. Теперь старший коэффициент многочлена h находится в идеале L_d с $d < D$. Тем же способом вычитая из него подходящие комбинации многочленов $f_j^{(d)}$ с $0 \leq d < D$, мы сможем сокращать его старший член и строго уменьшать степень до тех пор, пока не получим ноль. \square

Следствие 3.1

Если A нётерово, то $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ тоже нётерово.

УПРАЖНЕНИЕ 3.2. Покажите, что фактор кольцо нётерова кольца нётерово.

УПРАЖНЕНИЕ 3.3. Заменяя в доказательстве теор. 3.1 старшие члены на младшие, покажите, что кольцо формальных степенных рядов $A[[t]]$ с коэффициентами в нётеровом кольце A тоже нётерово.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Подкольцо нётерова кольца не обязательно является нётеровым. Например, кольцо $\mathbb{C}[[t]]$ нётерово по упр. 3.3, однако, его подкольцо, образованное рядами, сходящимися всюду в \mathbb{C} , нётеровым не является.

УПРАЖНЕНИЕ 3.4. Покажите, что идеалы I_k , состоящие из аналитических функций $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, обращающихся в нуль на множествах $\mathbb{Z} \setminus \{1, 2, \dots, k\}$, образуют бесконечную цепочку строго увеличивающихся идеалов.

3.1.2. Целые элементы. Рассмотрим пару вложенных колец $A \subset B$. Элемент $b \in B$ называется *целым* над A , если он удовлетворяет условиям лем. 3.2.

Лемма 3.2

Следующие три свойства элемента $b \in B$ попарно эквивалентны:

- (1) $b^m = a_1 b^{m-1} + \dots + a_{m-1} b + a_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и некоторых $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$
- (2) A -линейная оболочка всех целых неотрицательных степеней b^m , $m \geq 0$, линейно порождается над A конечным числом элементов
- (3) существует конечно порождённый A -подмодуль $M \subset B$, такой что $bM \subset M$ и для каждого $b' \in B$ из $b'M = 0$ вытекает, что¹ $b' = 0$.

¹Последнее условие в (3) иногда называют *B-точностью* подмодуля M .

Доказательство. Импликации (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) очевидны. Покажем, что (3) \Rightarrow (1). Пусть элементы e_1, e_2, \dots, e_m порождают M над A и A -линейный оператор умножения $b : M \rightarrow M$, $m \mapsto bm$, имеет в этих образующих матрицу $Y \in \text{Mat}_{m \times m}(A)$, т. е.

$$(be_1, be_2, \dots, be_m) = (e_1, e_2, \dots, e_m) \cdot Y. \quad (3-1)$$

Матричное тождество $\det X \cdot E = X \cdot X^\vee$, где X — любая квадратная матрица, X^\vee — присоединённая к ней матрица¹, а E — единичная матрица того же размера, показывает, что образ оператора умножения на $\det X$ содержится в линейной оболочке столбцов матрицы X . В частности, образ оператора умножения всех элементов модуля M на число $\det(bE - Y) \in B$ лежит в линейной оболочке векторов $(e_1, e_2, \dots, e_m) \cdot (bE - Y)$, которая равна нулю в силу (3-1). Поэтому $\det(bE - Y) \cdot M = 0$, а значит, $\det(bE - Y) = 0$ в силу B -точности модуля M . Так как элементы матрицы Y лежат в A , равенство $\det(bE - Y) = 0$ имеет вид, требуемый в условии (1). \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1

Множество всех элементов $b \in B$, целых над подкольцом $A \subset B$, называется *целым замыканием* A в B и обозначается \bar{A}_B . Если $\bar{A}_B = A$, кольцо A называется *целозамкнутым* в B . Если $\bar{A}_B = B$, кольцо B называется *целым расширением* кольца A или *целой A -алгеброй*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1

Целое замыкание $\bar{A}_B \subset B$ любого подкольца $A \subset B$ является подкольцом в B . Для любого кольца $C \supset B$ всякий элемент $c \in C$, целый над \bar{A}_B , цел и над A .

Доказательство. Если элементы $p, q \in B$ таковы, что

$$p^m = x_{m-1}p^{m-1} + \dots + x_1p + x_0, \quad q^n = y_{n-1}q^{n-1} + \dots + y_1q + y_0$$

для некоторых $x_\nu, y_\mu \in A$, то A -модуль, порождённый произведениями $p^i q^j$ с $0 \leq i < m$, $0 \leq j < n$, является B -точным (ибо содержит 1) и переходит в себя при умножении и на p , и на q , а значит, и при умножении на $p + q$ и pq . Аналогично, если

$$c^r = z_{r-1}c^{r-1} + \dots + z_1c + z_0, \quad z_k^{m_k} = a_{k, m_k-1}z_k^{m_k-1} + \dots + a_{k, 1}z_k + a_{k, 0}$$

где $0 \leq k \leq (r-1)$ и все $a_{k, \ell} \in A$, то умножение на c сохраняет B -точный A -подмодуль, порождённый произведениями $c^i z_1^{j_1} z_2^{j_2} \dots z_r^{j_r}$ с $0 \leq i < r$ и $0 \leq j_k < m_k$. \square

СЛЕДСТВИЕ 3.2 (ЛЕММА ГАУССА – КРОНЕКЕРА – ДЕДЕКИНДА)

Пусть $A \subset B$ — произвольное расширение коммутативных колец, и $f, g \in B[x]$ — приведённые² многочлены положительной степени. Тогда все коэффициенты произведения

$$h(x) = f(x)g(x)$$

целы над A , если и только если все коэффициенты и у $f(x)$, и у $g(x)$ целы над A .

¹Т. е. матрица из алгебраических дополнений к элементам транспонированной матрицы X^t .

²Т. е. со старшим коэффициентом единица.

Доказательство. Рассмотрим любое кольцо $C \supset B$, над которым f и g полностью разлагаются на линейные множители¹, т. е. в кольце $C[x]$ выполняются равенства

$$f(x) = \prod_{\nu} (x - \alpha_{\nu}), \quad g(x) = \prod_{\mu} (x - \beta_{\mu}), \quad h(x) = \prod_{\mu, \nu} (x - \alpha_{\nu})(x - \beta_{\mu}).$$

Целость над A всех коэффициентов многочлена h равносильна тому, что все корни $\alpha_{\nu}, \beta_{\mu} \in C$ многочлена h целы над целым замыканием A в C , а значит, и над самим A . Это, в свою очередь, эквивалентно одновременной целости над A всех коэффициентов как f , так и g . \square

Пример 3.1 (\mathbb{Z} целозамкнуто в \mathbb{Q})

Если для дроби p/q с взаимно простыми $p, q \in \mathbb{Z}$ найдутся такие $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$, что

$$\frac{p^m}{q^m} = a_1 \frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + \dots + a_{m-1} \frac{p}{q} + a_m,$$

то $p^m = a_1 q p^{m-1} + \dots + a_{m-1} q^{m-1} p + a_m q^m$ делится на q , что при взаимно простых p и q возможно только если $q = \pm 1$. Таким образом, целое замыкание \mathbb{Z} в \mathbb{Q} есть \mathbb{Z} .

Пример 3.2 (целые алгебраические числа)

Пусть $K \supset \mathbb{Q}$ — поле, конечномерное как векторное пространство над \mathbb{Q} . Элементы $z \in K$ называются *алгебраическими числами*. Условие (3) из лем. 3.2 утверждает, что алгебраическое число $\zeta \in K$ является целым над \mathbb{Z} , если и только если существует инвариантное относительно умножения на ζ векторное подпространство² $W \subset K$ и такой базис в нём, что оператор умножения $\zeta : W \rightarrow W, x \mapsto \zeta x$, записывается в этом базисе целочисленной матрицей. Именно таким образом *целые алгебраические числа* и были впервые определены в XIX веке Дедекиндом. Каждое алгебраическое число $\xi \in K$ можно сделать целым, умножив его на подходящее число из \mathbb{Z} . В самом деле, поскольку число ξ алгебраично³ над \mathbb{Q} , найдутся такие $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, что $a_0 \xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \dots + a_{n-1} \xi + a_n = 0$. Тогда число $\zeta = a_0 \xi$ удовлетворяет приведённому уравнению

$$\begin{aligned} \zeta^n &= a_0^n \xi^n = -a_0^n a_1 \xi^{n-1} - a_0^n a_2 \xi^{n-2} - \dots - a_0^n a_n = \\ &= -a_0 a_1 \cdot \zeta^{n-1} - a_0^2 a_2 \cdot \zeta^{n-2} - \dots - a_0^n a_n. \end{aligned}$$

В частности, у K существует базис над \mathbb{Q} , состоящий из целых алгебраических чисел.

Пример 3.3 (инварианты конечной группы)

Пусть конечная группа G действует на кольце B кольцевыми автоморфизмами

$$g : B \rightarrow B, \quad g \in G.$$

Подкольцо $B^G \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in B \mid ga = a \forall g \in G\}$ называется *кольцом инвариантов* действия G на B . Если G -орбита элемента $b \in B$ состоит из элементов $b_1 = b, b_2, b_3, \dots, b_n$, то элемент b является корнем приведённого многочлена

$$B(t) = \prod (t - b_i) \in B^G[t].$$

Таким образом, B цело над подкольцом инвариантов $B^G \subset B$.

¹ Такое кольцо C можно построить индукцией по $\deg h$. Если $\deg h > 0$, то B вкладывается в фактор кольцо $F = B[x]/(h)$ как подкольцо классов констант. Поскольку класс $\vartheta = x \pmod{h} \in F$ является корнем h , то $h(x) = (x - \vartheta) \cdot h_1(x)$ в $F[x]$. По индукции $h_1 = \prod (x - c_{\nu})$ над некоторым кольцом $C \supset F \supset B$.

² Над полем \mathbb{Q} .

³ Так как K конечномерно над \mathbb{Q} .

Предложение 3.2

Пусть кольцо B цело над подкольцом $A \subset B$. Если B — поле, то A также является полем. Наоборот, если A — поле, и в B нет делителей нуля, то B — поле.

Доказательство. Если B — поле, целое над A , то обратный элемент $a^{-1} \in B$ к произвольному ненулевому $a \in A$ удовлетворяет уравнению $a^{-m} = \alpha_1 a^{1-m} + \dots + \alpha_{m-1} a^{-1} + \alpha_0$, где все $\alpha_\nu \in A$. Умножая обе части на a^{m-1} , получаем $a^{-1} = \alpha_1 + \dots + \alpha_{m-1} a^{m-2} + \alpha_0 a^{m-1} \in A$.

Обратно, если A — поле, и B — целая A -алгебра, то все неотрицательные целые степени b^i любого $b \in B$ порождают конечномерное векторное пространство V над A . Если $b \neq 0$, и в B нет делителей нуля, то линейный оператор умножения на $b : V \rightarrow V, x \mapsto bx$, имеет нулевое ядро и, тем самым, биективен. Прообраз $1 \in V$ относительно этого оператора и есть b^{-1} . \square

Следствие 3.3

Если поле \mathbb{F} является конечномерным векторным пространством над своим подполем $\mathbb{k} \subset \mathbb{F}$, то все элементы \mathbb{F} алгебраичны над \mathbb{k} , и \mathbb{k} -подалгебра в \mathbb{F} , порождённая любым набором элементов $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{F}$, является полем.

3.1.3. Конечно порождённые \mathbb{k} -алгебры. Когда кольцо $A = \mathbb{k}$ является полем, всякое содержащее его кольцо $B \supset \mathbb{k}$ называется *коммутативной \mathbb{k} -алгеброй*. Такая \mathbb{k} -алгебра называется *конечно порождённой*, если она является фактором алгебры многочленов $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, т. е. когда имеется эпиморфизм \mathbb{k} -алгебр $\pi : \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_m] \twoheadrightarrow B$. Элементы $b_i = \pi(x_i) \in B$ называются в этом случае *образующими* алгебры B , а ядро $\ker \pi \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_m]$ называется *идеалом соотношений* между ними. Отметим, что по [сл. 3.1](#) и [упр. 3.2](#) все конечно порождённые \mathbb{k} -алгебры нётеровы.

Для каждого элемента $b \in B$ имеется гомоморфизм вычисления

$$\text{ev}_b : \mathbb{k}[x] \rightarrow B, \quad f \mapsto f(b), \quad (3-2)$$

образ которого обозначается через $\mathbb{k}[b] \stackrel{\text{def}}{=} \text{im } \text{ev}_b$ и представляет собою наименьшую \mathbb{k} -подалгебру в B , содержащую 1 и b , т. е. множество всех элементов, которые можно получить из b и элементов поля \mathbb{k} конечным числом сложений и умножений.

Элемент b называется *трансцендентным* над \mathbb{k} , если гомоморфизм вычисления (3-2) инъективен. В этом случае алгебра $\mathbb{k}[b] \simeq \mathbb{k}[x]$ не является полем и бесконечномерна как векторное пространство над \mathbb{k} .

Элемент b называется *алгебраическим* над \mathbb{k} , если гомоморфизм вычисления (3-2) имеет ненулевое ядро $\ker(\text{ev}_b) = (\mu_b) \subset \mathbb{k}[x]$, автоматически¹ являющееся главным идеалом. Его приведённая образующая $\mu_b \in \mathbb{k}[x]$ называется *минимальным многочленом* элемента b над \mathbb{k} . Она однозначно определяется элементом b как приведённый многочлен наименьшей степени, аннулирующий b . Таким образом, алгебраичность элемента $b \in B$ означает, что он цел над подполем $\mathbb{k} \subset B$. В этом случае подалгебра $\mathbb{k}[b] \simeq \mathbb{k}[x]/(\mu_b)$ имеет конечную размерность $\dim_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[b] = \deg \mu_b$ как векторное пространство над \mathbb{k} , и если в ней нет делителей нуля, то по [предл. 3.2](#) алгебра $\mathbb{k}[b]$ автоматически является полем.

Теорема 3.2

Конечно порождённая \mathbb{k} -алгебра B может быть полем только при условии, что все её элементы алгебраичны над \mathbb{k} , и в этом случае она конечномерна как векторное пространство над \mathbb{k} .

¹Поскольку $\mathbb{k}[x]$ это кольцо главных идеалов.

Доказательство. Пусть алгебра B порождается над \mathbb{k} элементами b_1, b_2, \dots, b_m и является полем. Доказывать алгебраичность B будем индукцией по m . Случай $m = 1$, $B = \mathbb{k}[b_1]$ уже был разобран выше. Пусть $m > 1$. Если b_m алгебраичен над \mathbb{k} , то $\mathbb{k}[b_m]$ это поле, и поле B алгебраично над $\mathbb{k}[b_m]$ по предположению индукции. Тогда по [предл. 3.1](#) поле B алгебраично и над \mathbb{k} . Поскольку B получается последовательным присоединением к \mathbb{k} конечного числа алгебраических элементов b_1, b_2, \dots, b_m , поле B конечномерно как векторное пространство над \mathbb{k} .

Покажем теперь, что элемент b_m не может быть трансцендентен. Допустим противное. Тогда по универсальному свойству поля частных инъективный гомоморфизм вычисления

$$\text{ev}_{b_m} : \mathbb{k}[x] \rightarrow B, \quad f \mapsto f(b_m),$$

продолжается до изоморфизма поля рациональных функций $\mathbb{k}(x)$ с наименьшим содержащим элемент b_m подполем $\mathbb{k}(b_m) \subset B$. По предположению индукции поле B алгебраично над $\mathbb{k}(b_m)$. В частности, каждая из образующих b_1, b_2, \dots, b_{m-1} поля B как алгебры над \mathbb{k} удовлетворяет некоторому полиномиальному уравнению с коэффициентами из $\mathbb{k}(b_m)$. Умножая эти уравнения на подходящие многочлены от b_m , сделаем так, чтобы все их коэффициенты лежали в $\mathbb{k}[b_m]$, а все их старшие коэффициенты стали равны между собою. Обозначим этот общий для всех уравнений старший коэффициент через $p(b_m) \in \mathbb{k}[b_m]$. Таким образом, поле B цело над подалгеброй $F = \mathbb{k}[b_m, 1/p(b_m)] \subset B$, порождённой над \mathbb{k} элементами b_m и $1/p(b_m)$. По [предл. 3.2](#) эта подалгебра F является полем. В частности, элемент $1 + p(b_m)$ обратим в F , т. е. существует такой многочлен $g \in \mathbb{k}[x_1, x_2]$, что $g(b_m, 1/p(b_m)) \cdot (1 + p(b_m)) = 1$. Записывая рациональную функцию $g(x, 1/p(x))$ в виде $h(x)/p^k(x)$, где $h \in \mathbb{k}[x]$ не делится на p , и умножая обе части предыдущего равенства на $p^k(b_m)$, мы получаем на b_m полиномиальное уравнение $h(b_m) \cdot (p(b_m) + 1) = p^{k+1}(b_m)$. Оно нетривиально, поскольку $h(x)(1 + p(x))$ не делится на $p(x)$ в $\mathbb{k}[x]$. Тем самым, b_m не трансцендентен. Противоречие. \square

3.1.4. Базисы трансцендентности. Пусть \mathbb{k} -алгебра A не имеет делителей нуля. Обозначим через Q_A её поле частных. С каждым набором элементов $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ связан гомоморфизм вычисления

$$\text{ev}_{a_1, a_2, \dots, a_m} : \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_m] \rightarrow A, \quad f \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_m), \quad (3-3)$$

образ которого обозначается через $\mathbb{k}[a_1, a_2, \dots, a_m] \subset A$ и состоит из всех элементов, что можно получить из a_1, a_2, \dots, a_m и элементов поля \mathbb{k} при помощи конечного числа сложений и умножений. Это наименьшая по включению \mathbb{k} -подалгебра в A , содержащая поле \mathbb{k} и все элементы a_i . Через $\mathbb{k}(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A$ мы обозначим наименьшее подполе, содержащее поле \mathbb{k} и заданные элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.5. Покажите, что $\mathbb{k}(a_1, a_2, \dots, a_m) \simeq Q_{\mathbb{k}[a_1, a_2, \dots, a_m]}$.

Элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ называются *алгебраически независимыми* над \mathbb{k} , если между ними нет никаких полиномиальных соотношений вида $f(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0$, где $f \in A[x_1, x_2, \dots, x_m]$, т. е. гомоморфизм вычисления (3-3) инъективен. В этом случае вложение (3-3) продолжается до изоморфизма полей $\mathbb{k}(x_1, x_2, \dots, x_m) \simeq \mathbb{k}(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A$, переводящего рациональную функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в её значение $f(a_1, a_2, \dots, a_m)$ на элементах a_i .

Элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ называются *алгебраически порождающими* Q_A , если поле Q_A алгебраично¹ над подполем $\mathbb{k}(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.6. Убедитесь, что если все элементы $a \in A \subset Q_A$ алгебраичны над полем $\mathbb{k}(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A$, то элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ алгебраически порождают Q_A .

¹Или, что то же самое, цело.

Алгебраически независимый набор элементов $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$, алгебраически порождающий Q_A , называется *базисом трансцендентности* алгебры A над \mathbb{k} . Любое собственное подмножество базиса трансцендентности алгебраически независимо, однако, не является базисом трансцендентности. Поэтому базис трансцендентности можно иначе определить либо как минимальный по включению набор $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$, алгебраически порождающий Q_A , либо как максимальный по включению алгебраически независимый набор $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$.

ЛЕММА 3.3 (ЛЕММА О ЗАМЕНЕ)

Если $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ алгебраически порождают Q_A , а $u_1, u_2, \dots, u_k \in A$ алгебраически независимы, то $m \geq k$ и a_i можно перенумеровать так, что набор элементов

$$u_1, u_2, \dots, u_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_m$$

(полученный заменой первых k элементов a_i на элементы u_i) также будет алгебраически порождать Q_A .

Доказательство. Так как элемент u_1 алгебраичен над $\mathbb{k}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ имеется полиномиальное соотношение $f(u_1, a_1, a_2, \dots, a_m) = 0$, в которое входит u_1 . Поскольку u_1 трансцендентен над \mathbb{k} , в это соотношение входит и какой-нибудь из элементов a_i . Перенумеруем их так, чтобы это был a_1 . Тогда a_1 алгебраичен над $\mathbb{k}(u_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$, и значит, $u_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ алгебраически порождают Q_A . Далее действуем по индукции. Пусть для очередного i в пределах $1 \leq i < k$ элементы $u_1, u_2, \dots, u_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_m$ алгебраически порождают Q_A . Так как u_{i+1} алгебраичен над $\mathbb{k}(u_1, \dots, u_i, a_{i+1}, \dots, a_m)$, имеется полиномиальное соотношение $f(u_1, u_2, \dots, u_{i+1}, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_m) = 0$, содержащее u_{i+1} . Поскольку u_1, u_2, \dots, u_k алгебраически независимы, в этом соотношении присутствует и какой-нибудь a_j . Тем самым, $m > i$, и мы можем занумеровать оставшиеся a_j так, что a_{i+1} будет алгебраичен над

$$\mathbb{k}(u_1, u_2, \dots, u_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_m).$$

Следовательно $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_m$ алгебраически порождают Q_A , что воспроизводит индуктивное предположение. \square

СЛЕДСТВИЕ 3.4

В конечно порождённой \mathbb{k} -алгебре A без делителей нуля любой набор элементов, алгебраически порождающий Q_A , содержит в себе некоторый базис трансцендентности для A , а любой набор алгебраически независимых элементов можно дополнить до базиса трансцендентности, причём все базисы трансцендентности состоят из одинакового числа элементов. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2 (СТЕПЕНЬ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ)

Число элементов в базисе трансцендентности конечно порождённой \mathbb{k} -алгебры A называется *степенью трансцендентности* алгебры A над \mathbb{k} и обозначается $\text{tr deg}_{\mathbb{k}} A$

УПРАЖНЕНИЕ 3.7. Покажите, что следующие условия на конечно порождённую \mathbb{k} -алгебру A без делителей нуля эквивалентны друг другу: а) $\text{tr deg } A = 0$ б) $A = Q_A$ в) A — поле г) $\dim_{\mathbb{k}} A < \infty$.

3.1.5. Нормальность. Коммутативное кольцо A без делителей нуля называется *нормальным*, если оно целозамкнуто в своём поле частных Q_A . Отметим, что любое поле нормально. Дословно также, как в [прим. 3.1](#), устанавливается, что любое факториальное¹ кольцо A нормально.

УПРАЖНЕНИЕ 3.8. Убедитесь, что приведённый многочлен $t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_{m-1} t + a_m$ с коэффициентами в факториальном кольце A не может аннулировать дробь $p/q \in Q_A$ с необратимым знаменателем q и н.о.д. $(p, q) = 1$.

Прямо из определений и [сл. 3.2](#) вытекают следующие полезные свойства, отчасти проясняющие эпитет «нормальный».

Предложение 3.3 (лемма Гаусса – 2)

Пусть A — нормальное кольцо с полем частных Q_A . Если многочлен $f \in A[x]$ раскладывается в $Q_A[x]$ в произведение приведённых множителей, то эти множители лежат в $A[x]$. \square

Следствие 3.5

Пусть A — нормальное кольцо с полем частных Q_A , и B — произвольная Q_A -алгебра. Если элемент $b \in B$ цел над A , то его минимальный многочлен над полем Q_A лежит в $A[x]$.

Доказательство. Поскольку элемент b цел над A , он является корнем приведённого многочлена $f \in A[x]$. Тогда $f = \mu_b \cdot q$ в кольце $Q_A[x]$. По [предл. 3.3](#) все коэффициенты μ_b лежат в A . \square

3.1.6. Системы полиномиальных уравнений. Любая система полиномиальных уравнений

$$f_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad f_\nu \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n], \quad (3-4)$$

эквивалентна системе, левые части которой образуют в $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ идеал $J = (f_\nu)$, порождённый многочленами f_ν . Эта большая система получается добавлением к уравнениям (3-4) всех уравнений, которые можно получить умножая уравнения (3-4) на произвольные полиномы и складывая их друг с другом. В силу нётеровости кольца многочленов такая большая система, в свою очередь, эквивалентна конечной системе уравнений, левые части которых порождают идеал J , причём этот конечный набор уравнений может быть выбран из уравнений первоначальной системы (3-4). Таким образом, любая (в том числе бесконечная) система полиномиальных уравнений равносильна, с одной стороны, некоторой своей конечной подсистеме, а с другой стороны, системе, левые части которой образуют в кольце многочленов идеал.

Множество $V(J) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{A}^n \mid f(a) = 0 \quad \forall f \in J\}$ всех решений системы (3-4), левые части f_ν которой пробегают идеал $J \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, называется *аффинным алгебраическим многообразием*, задаваемым идеалом J . Отметим, что это множество может оказаться пустым: например, когда $J = (1) = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ содержит уравнение $1 = 0$.

Для произвольной фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ множество всех многочленов, тождественно нулю на Φ , образует в кольце многочленов идеал, который обозначается

$$I(\Phi) = \{f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \quad \forall p \in \Phi\}.$$

¹Напомним, что кольцо A называется *факториальным*, если в нём нет делителей нуля, и каждый необратимый элемент $a \in A$ является произведением конечного числа неприводимых, причём для любых двух разложений $a = p_1 p_2 \dots p_n = q_1 q_2 \dots q_m$ в произведение неприводимых множителей выполняются равенства $m = n$ и (после надлежащей перенумерации) $p_i = s_i q_i$ для некоторых обратимых $s_i \in A$. Например, факториальными являются любое кольцо главных идеалов и кольца многочленов $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ над факториальными кольцами K .

Множество нулей $V(I(\Phi))$ этого идеала это наименьшее аффинное алгебраическое многообразие, содержащее Φ .

Для любого идеала $J \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ имеется тавтологическое включение $J \subset I(V(J))$. Вообще говоря, это включение строгое. Например, при $n = 1$ для идеала $J = (x^2)$ многообразие $V(J) = \{0\}$, а идеал $I(V(J)) = (x) \supsetneq (x^2) = J$.

ТЕОРЕМА 3.3 (NULLSTELLENSATZ, или ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА О НУЛЯХ)

Для любого идеала $J \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ над произвольным алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} справедливы следующие утверждения

- (1) *слабая теорема о нулях:* $V(J) = \emptyset \iff 1 \in J$;
- (2) *сильная теорема о нулях:* $f \in I(V(J)) \iff f^m \in J$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Чтобы доказать первое утверждение, достаточно для каждого собственного¹ идеала $J \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ указать точку $p \in \mathbb{A}^n$, в которой зануляются все многочлены из J . Поскольку увеличение идеала J только усложняет эту задачу, мы без ограничения общности можем считать, что идеал J максимален, т. е. любой многочлен $g \notin J$ обратим по модулю J . Действительно, если существует необратимый по модулю J многочлен $g \notin J$, то уравнение $gh + f = 1$ неразрешимо относительно $h \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $f \in J$, а значит, идеал $J' = (J, g)$ не содержит 1, т. е. является собственным идеалом, строго большим, чем J , так что мы можем расширить J до $J' \supsetneq J$. В силу нётеровости кольца многочленов после конечного числа таких расширений мы получим собственный идеал J , такой что $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/J$ является полем, что мы и будем далее предполагать.

Так как поле $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/J \supset \mathbb{k}$ конечно порождено как \mathbb{k} -алгебра, каждый элемент ϑ этого поля по теор. 3.2 алгебраичен над \mathbb{k} , т. е. является корнем некоторого неприводимого приведённого многочлена из $\mathbb{k}[x]$. Поскольку для алгебраически замкнутого поля \mathbb{k} все такие многочлены линейны, $\vartheta \in \mathbb{k}$. Таким образом, $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/J = \mathbb{k}$, т. е. любой многочлен $f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ сравним по модулю идеала J с некоторой константой. Рассмотрим точку $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n$, координата $p_i \in \mathbb{k}$ которой это константа, сравнимая по модулю J с одночленом x_i . Тогда произвольный многочлен $f(x) \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ сравним по модулю J с константой $f(p) \in \mathbb{k}$. Тем самым, $f(p) = 0$ для всех $f \in J$, что и требовалось.

Докажем теперь второе утверждение. Поскольку при $J = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $V(J) = \emptyset$ оно тривиально, мы будем считать, что $V(J) \neq \emptyset$ и $J \neq (1)$. Вложим \mathbb{A}^n в большее пространство \mathbb{A}^{n+1} с координатами $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ в качестве гиперплоскости $t = 0$. Если многочлен

$$f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \subset \mathbb{k}[t, x_1, x_2, \dots, x_n]$$

тождественно обращается в нуль на $V(J)$, то идеал $J' \subset \mathbb{k}[t, x_1, x_2, \dots, x_n]$, порождённый J и многочленом $g(t, x) = 1 - tf(x)$, имеет пустое множество нулей в \mathbb{A}^{n+1} , поскольку $g(x, t) \equiv 1$ вдоль цилиндра $V(J) \subset \mathbb{A}^{n+1}$. Тем самым, по слабой теореме о нулях, идеал J' содержит единицу, т. е. существуют $q_0, q_1, \dots, q_s \in \mathbb{k}[t, x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $f_1, f_2, \dots, f_s \in J$, такие что

$$q_0(x, t) \cdot (1 - tf(x)) + q_1(t, x) \cdot f_1(x) + \dots + q_s(x, t) \cdot f_s(x) = 1.$$

¹Т. е. отличного от всего кольца многочленов

Применим к этому равенству гомоморфизм $\mathbb{k}[t, x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданный правилами $t \mapsto 1/f(x)$, $x_v \mapsto x_v$. Получим равенство

$$q_1(1/f(x), x) \cdot f_1(x) + \dots + q_s(1/f(x), x) \cdot f_s(x) = 1$$

в поле рациональных функций $\mathbb{k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Так как идеал J не содержит единицы, среди рациональных функций $q_v(1/f(x), x)$ есть функции с нетривиальными знаменателями, причём все их можно сократить умножением на некоторую степень f^m . После умножения обеих частей равенства на эту степень получаем искомое выражение $f^m(x) = \tilde{q}_1(x) \cdot f_1(x) + \dots + \tilde{q}_s(x) \cdot f_s(x)$ с $\tilde{q}_v \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. \square

3.1.7. Системы результантов. Рассмотрим систему полиномиальных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_m(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (3-5)$$

в которой многочлены $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ однородны и имеют степени $d_i = \deg f_i$. Множество ненулевых решений системы (3-5) в проективном пространстве $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ представляет собою пересечение m проективных гиперповерхностей $S_i = V(f_i) \subset \mathbb{P}(V)$. Фигура

$$\mathcal{R}(n; d_1, d_2, \dots, d_m) \subset \mathbb{P}(S^{d_1}V^*) \times \mathbb{P}(S^{d_2}V^*) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{d_m}V^*), \quad (3-6)$$

образованная всеми наборами гиперповерхностей

$$(S_1, S_2, \dots, S_m) \in \mathbb{P}(S^{d_1}V^*) \times \mathbb{P}(S^{d_2}V^*) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{d_m}V^*)$$

с непустым пересечением $\bigcap_i S_i \neq \emptyset$, называется *результантным многообразием* системы (3-5).

Например, если число уравнений равно числу переменных и все $d_i = 1$, система (3-5) превращается в систему однородных линейных уравнений с квадратной матрицей

$$\begin{cases} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n = 0 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

которая имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det(a_{ij}) = 0$. Таким образом, при $m = (n + 1)$ и $d_1 = d_2 = \dots = d_{n+1} = 1$ результантное многообразие

$$\mathcal{R}(n; 1, 1, \dots, 1) = V(\det(a_{ij})) \subset \mathbb{P}_n^* \times \mathbb{P}_n^* \times \dots \times \mathbb{P}_n^*$$

представляет собою гиперповерхность, заданную одним неприводимым полиномиальным уравнением степени $(n + 1)$ на коэффициенты $a_{i,j}$ многочленов f_1, f_2, \dots, f_{n+1} .

Покажем, что и в общем случае результирующее многообразие (3-6) является алгебраическим, т. е. задаётся конечной системой полиномиальных уравнений на коэффициенты многочленов f_ν , однородных по коэффициентам каждого из многочленов и зависящих только от n , m и d_1, d_2, \dots, d_m . Для этого рассмотрим идеал $I \subset \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$, порождённый многочленами f_ν . Отсутствие у системы (3-5) ненулевых решений означает, что аффинное алгебраическое многообразие $V(I) \subset \mathbb{A}(V)$ либо пусто, либо совпадает с началом координат. В обоих случаях каждая из координатных функций x_i тождественно зануляется на $V(I)$, и значит, существует m , такое что $x_i^m \in I$ для всех i . Наоборот, если I содержит некоторую степень каждой из переменных, то система уравнений с левыми частями из идеала I содержит уравнения $x_0^m = x_1^m = \dots = x_n^m = 0$, имеющие только нулевое решение. Таким образом, отсутствие ненулевых решений у системы (3-5) равносильно тому, что идеал I содержит все мономы x_i^m для некоторого m , а значит, и любой многочлен, степень которого больше $(n+1)(m-1)$, т. е.

$$S^d V^* \subset I \text{ при всех } d \gg 0. \quad (3-7)$$

Для каждого $d \in \mathbb{N}$ пересечение $I \cap S^d V^*$ является образом линейного отображения

$$\begin{aligned} \mu_d : S^{d-d_1} V^* \oplus S^{d-d_2} V^* \oplus \dots \oplus S^{d-d_m} V^* &\rightarrow S^d V^*, \\ (g_0, g_1, \dots, g_n) &\mapsto \sum g_\nu f_\nu. \end{aligned} \quad (3-8)$$

В стандартных базисах из мономов это отображение задаётся матрицей, элементы которой линейно зависят от коэффициентов многочленов f_ν . При $d \gg 0$ размерность левого пространства в (3-8) ведёт себя как $\sum_\nu \binom{n+d-d_\nu}{n} \sim \frac{m}{n!} d^n$ и становится больше, чем размерность правого, которая ведёт себя как $\binom{n+d}{n} \sim \frac{1}{n!} d^n$. Поэтому невыполнение условия (3-7) равносильно тому, что при всех d , для которых размерность левого пространства (3-8) больше, чем размерность правого, все максимальные миноры матрицы μ_d зануляются. В силу нётеровости кольца многочленов, эта бесконечная система полиномиальных уравнений эквивалентна некоторой конечной подсистеме, которую и называют *системой результатов*.

3.2. Аффинный алгебро-геометрический словарь. Всюду далее мы по умолчанию считаем, что основное поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто. Аффинные алгебраические многообразия, определённые над полем \mathbb{k} , образуют категорию $\mathcal{A}ff_{\mathbb{k}}$, морфизмами в которой являются *регулярные отображения*. По определению, отображение множеств $\varphi : X \rightarrow Y$ из аффинного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в аффинное алгебраическое многообразие $Y \subset \mathbb{A}^m$ называется *регулярным*¹, если оно переводит точку $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ в точку $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y$, координаты которой $y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ являются многочленами от координат точки x , т. е. $\varphi_i \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ для всех i . В частности, функция $f : X \rightarrow \mathbb{k}$ называется *регулярной*, если она является ограничением на X некоторого многочлена $f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Регулярные функции на X образуют конечно порождённую приведённую² \mathbb{k} -алгебру, которая обозначается

$$\mathbb{k}[X] \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{A}ff_{\mathbb{k}}}(X, \mathbb{k}) \simeq \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X), \quad (3-9)$$

¹Или *полиномиальным*.

²Напомню, что ненулевой элемент a в кольце называется *нильпотентом*, если $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Кольцо называется *приведённым*, если в нём нет ненулевых nilьпотентных элементов. Поскольку любая степень ненулевой функции со значениями в поле также является ненулевой функцией, в алгебре регулярных функций на аффинном алгебраическом многообразии нет nilьпотентов.

где $I(X) = \{f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f|_X \equiv 0\}$, как и выше, обозначает идеал всех многочленов, тождественно зануляющихся на X . Алгебры и кольца без нильпотентов называются *приведёнными*.

ЛЕММА 3.4

Всякая конечно порождённая приведённая алгебра A над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} является координатной алгеброй $A = \mathbb{k}[X]$ некоторого аффинного алгебраического многообразия X .

Доказательство. Зададим алгебру A образующими и соотношениями, т. е. представим её в виде фактор алгебры $A = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$. Приведённость алгебры A означает, что идеал соотношений I радикален, т. е. $f^n \in I \Rightarrow f \in I$ для всех $f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Так как $I = \sqrt{I}$, по сильной теореме о нулях $I = I(V(I))$ является идеалом аффинного алгебраического многообразия $X = V(I) \subset \mathbb{A}^n$. \square

3.2.1. Гомоморфизм поднятия. Со всяким отображением множеств $\varphi : X \rightarrow Y$ связан гомоморфизм поднятия, который действует из алгебры \mathbb{k}^Y всех функций на Y со значениями в \mathbb{k} в алгебру \mathbb{k}^X всех функций X со значениями в \mathbb{k} и переводит функцию $f : Y \rightarrow \mathbb{k}$ в её композицию с отображением φ :

$$\varphi^* : \mathbb{k}^Y \rightarrow \mathbb{k}^X, \quad f \mapsto f \circ \varphi. \quad (3-10)$$

Если $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$ являются алгебраическими многообразиями, а отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ действует на координаты точек по правилу

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

то его гомоморфизм поднятия переводит каждую образующую $y_i \pmod{I(Y)}$ координатной алгебры $\mathbb{k}[Y]$ в функцию $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)|_X : X \rightarrow \mathbb{k}$. Таким образом, регулярность теоретико-множественного отображения $\varphi : X \rightarrow Y$ равносильна тому, что гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \mathbb{k}^Y \rightarrow \mathbb{k}^X$ переводит подалгебру регулярных функций $\mathbb{k}[Y] \subset \mathbb{k}^Y$ в подалгебру регулярных функций $\mathbb{k}[X] \subset \mathbb{k}^X$, т. е. корректно задаёт гомоморфизм \mathbb{k} -алгебр $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$. Точно такая же характеристика регулярных отображений имеется и для других, не связанных с алгебраической геометрией геометрических структур.

УПРАЖНЕНИЕ 3.9. Проверьте, что теоретико-множественное отображение топологических пространств (соотв. гладких или аналитических многообразий) $X \rightarrow Y$ является непрерывным (соотв. гладким или аналитическим) тогда и только тогда, когда его гомоморфизм поднятия переводит подалгебру непрерывных функций $C^0(Y) \subset \mathbb{R}^Y$ (соотв. подалгебру гладких или аналитических функций на Y) в подалгебру непрерывных функций $C^0(X)$ (соотв. в подалгебру гладких или аналитических функций на X).

Обратите внимание, что вложение $\varphi(X) \subset Y$ влечёт вложение идеалов $\varphi^*(I(Y)) \subset I(X)$. Поэтому гомоморфизм алгебр многочленов

$$\mathbb{k}[y_1, y_2, \dots, y_m] \rightarrow \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n], \quad y_i \mapsto \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

автоматически корректно факторизуется до гомоморфизма координатных алгебр

$$\mathbb{k}[Y] = \mathbb{k}[y_1, y_2, \dots, y_m]/I(Y) \rightarrow \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X) = \mathbb{k}[X].$$

3.2.2. Максимальный спектр. С каждой точкой $p \in X$ аффинного алгебраического многообразия X связан гомоморфизм вычисления¹ $ev_p : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}, f \mapsto f(p)$. Он эпиморфен, поскольку переводит единицу в единицу, и значит, является гомоморфизмом факторизации по модулю своего ядра

$$\mathfrak{m}_p \stackrel{\text{def}}{=} \ker ev_p = I(\{p\}) = \{f \in \mathbb{k}[X] \mid f(p) = 0\}, \quad (3-11)$$

которое является максимальным идеалом в $\mathbb{k}[X]$, так как фактор $\mathbb{k}[X]/\mathfrak{m}_p \simeq \mathbb{k}$ это поле. Идеал (3-11) называется *максимальным идеалом точки* $p \in X$. Таким образом, значение каждого многочлена $f \in \mathbb{k}[X]$ в точке $p \in X$ совпадает с классом $f \pmod{\mathfrak{m}_p} \in \mathbb{k}[X]/\mathfrak{m}_p \simeq \mathbb{k}$.

Множество всех максимальных идеалов произвольной \mathbb{k} -алгебры A называется её *максимальным спектром* и обозначается $\text{Spec}_m(A)$. Каждой точке спектра $\mathfrak{m} \in \text{Spec}_m A$ отвечает гомоморфизм факторизации $\pi_{\mathfrak{m}} : A \rightarrow A/\mathfrak{m}, a \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}}$, принимающий значения в поле $A/\mathfrak{m} \supset \mathbb{k}$, конечно порождённом как алгебра над \mathbb{k} . По теор. 3.2 на стр. 49 такое поле является конечным алгебраическим расширением поля \mathbb{k} , а значит, совпадает с \mathbb{k} , коль скоро поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто. Это позволяет интерпретировать элементы произвольной алгебры A как функции на $\text{Spec}_m A$ со значениями в поле \mathbb{k} .

Лемма 3.5

Для любого аффинного алгебраического многообразия X над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} соответствия $p \longleftrightarrow ev_p \longleftrightarrow \mathfrak{m}_p = \ker(ev_p)$ устанавливают биекции между точками многообразия X , гомоморфизмами \mathbb{k} -алгебр $\mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}$, и максимальными идеалами алгебры $\mathbb{k}[X]$.

Доказательство. Биективность второго соответствия мы уже проверили выше². Сопоставление точке $p \in X \subset \mathbb{A}^n$ её максимального идеала $\mathfrak{m}_p = \ker ev_p$ вкладывает множество точек в множество максимальных идеалов, поскольку для $p \neq q$ всегда можно указать аффинно линейную функцию $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{k}$ зануляющуюся в p и отличную от нуля в q . Чтобы показать, что над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} любой максимальный идеал

$$\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$$

имеет вид $\mathfrak{m}_p = \ker ev_p$ для некоторой точки $p \in X$, обозначим через $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ полный прообраз идеала \mathfrak{m} относительно отображения факторизации $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \twoheadrightarrow \mathbb{k}[X]$. Так как $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/\tilde{\mathfrak{m}} = \mathbb{k}[X]/\mathfrak{m} = \mathbb{k}$, идеал $\tilde{\mathfrak{m}}$ является собственным, максимальным и содержит $I(X)$. По слабой теореме о нулях все многочлены $f \in \tilde{\mathfrak{m}}$ обращаются в нуль в некоторой точке $p \in \mathbb{A}^n$, лежащей на многообразии X , поскольку $I(X) \subset \tilde{\mathfrak{m}}$. Следовательно, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_p$, что в силу максимальности идеала \mathfrak{m} означает равенство $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$. \square

Соглашение 3.1. Всюду далее обозначение $\text{Spec}_m A$ используется как для множества гомоморфизмов \mathbb{k} -алгебр $A \rightarrow \mathbb{k}$, так и для множества максимальных идеалов в A , поскольку любой гомоморфизм факторизации $A \rightarrow \mathbb{k}$ однозначно задаётся своим ядром $\mathfrak{m} \subset A$.

¹Это специальный случай гомоморфизма поднятия, отвечающий вложению $p \hookrightarrow X$ одноточечного множества p в многообразии X .

²Отметим, что сопоставление $\varphi \mapsto \ker \varphi$ инъективно вкладывает множество гомоморфизмов \mathbb{k} -алгебр $\varphi : A \rightarrow \mathbb{k}$ в множество максимальных идеалов алгебры A над любым, не обязательно алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} . Однако, над незамкнутым полем \mathbb{k} не все максимальные идеалы являются ядрами гомоморфизмов вычисления со значениями в самом поле \mathbb{k} . Например, ядро гомоморфизма вычисления $ev_{\sqrt{-1}} : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f(\sqrt{-1})$, является максимальным идеалом \mathbb{R} -алгебры $\mathbb{R}[x]$, но его нельзя реализовать как ядро вычисления $\mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$, поскольку $\text{codim}_{\mathbb{R}} \ker ev_{\sqrt{-1}} = 2$.

ПРИМЕР 3.4 ($\text{Spec}_m \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \simeq \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\mathbb{k}^n)$)

Каждый гомоморфизм \mathbb{k} -алгебр $\varphi : \text{Spec}_m \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{k}$ однозначно определяется набором чисел $p_i = \varphi(x_i) \in \mathbb{k}$, образов свободных образующих полиномиальной алгебры. Сопоставление $\varphi \mapsto (p_1, p_2, \dots, p_n)$ устанавливает биекцию между такими гомоморфизмами и точками аффинного координатного пространства $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\mathbb{k}^n)$. Ядро гомоморфизма

$$\text{ev}_p : \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{k}$$

порождается линейными двучленами $x_i - p_i$, $1 \leq i \leq n$.

3.2.3. Нильрадикал и радикал Джекобсона. Для произвольного коммутативного кольца A радикал нулевого идеала¹ в A называется *нильрадикалом* кольца A и обозначается $\mathfrak{n}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{0} = \{a \in A \mid a^n = 0 \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}\}$. Пересечение всех максимальных идеалов кольца A называется *радикалом Джекобсона* и обозначается $\mathfrak{r}(A)$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.10. Убедитесь, что $\mathfrak{n}(A)$ является идеалом в A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4

Для любой конечно порождённой алгебры A над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} ядро гомоморфизма $A \rightarrow \mathbb{k}^{\text{Spec}_m A}$, сопоставляющего каждому элементу $a \in A$ функцию $a : \text{Spec}_m A \rightarrow \mathbb{k}$, $m \mapsto a \pmod{m} \in A/m = \mathbb{k}$, совпадает с нильрадикалом алгебры A , т. е. $\mathfrak{n}(A) = \mathfrak{r}(A)$.

Доказательство. Поскольку для любого $m \in \text{Spec}_m A$ фактор алгебра A/m является полем и не содержит ненулевых нильпотентов, каждый нильпотентный элемент кольца задаёт нулевую функцию на спектре, ибо аннулируется всеми гомоморфизмами вычисления $A \rightarrow A/m$. Тем самым, $\mathfrak{n}(A) \subset \mathfrak{r}(A)$. Чтобы доказать обратное включение, рассмотрим приведённую конечно порождённую \mathbb{k} -алгебру $A_{\text{red}} \stackrel{\text{def}}{=} A/\mathfrak{n}(A)$ и существующее по лем. 3.4 на стр. 56 алгебраическое многообразие $X \subset \mathbb{A}^n$ с координатной алгеброй $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X) \simeq A_{\text{red}}$. Если $a \in \mathfrak{r}(A)$, то класс элемента a в A_{red} лежит в $\mathfrak{r}(A_{\text{red}})$. Поэтому $a(p) = 0$ для всех точек $p \in X$, т. е. $a = 0$ в $\mathbb{k}[X] = A_{\text{red}}$. Следовательно, $a \in \mathfrak{n}(A)$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 3.11. Покажите, что для произвольного коммутативного кольца A с единицей нильрадикал $\mathfrak{n}(A)$ совпадает с пересечением всех простых² идеалов кольца A .

3.2.4. Эквивалентность категорий. Обозначим через $\mathcal{Alg}_{\mathbb{k}}$ категорию конечно порождённых приведённых алгебр с единицей над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} . Сопоставление аффинному алгебраическому многообразию X его координатной алгебры $\mathbb{k}[X]$, а регулярному морфизму аффинных многообразий $\varphi : X \rightarrow Y$ гомоморфизма поднятия $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ задаёт контравариантный функтор³

$$h_{\mathbb{A}^1} : \text{Aff}_{\mathbb{k}}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{Alg}_{\mathbb{k}}, \quad X \mapsto \text{Hom}_{\text{Aff}_{\mathbb{k}}}(X, \mathbb{A}^1) = \mathbb{k}[X], \quad (3-12)$$

из категории аффинных алгебраических многообразий над полем \mathbb{k} в категорию конечно порождённых приведённых \mathbb{k} -алгебр с единицей. Проверим, что этот функтор является оборачивающей стрелкой эквивалентностью категорий, т. е. *по-существу сюръективен и вполне строг*⁴.

¹Т. е. множество всех нильпотентных элементов кольца, включая нуль.

²Напомним, что идеал $\mathfrak{p} \subset A$ называется *простым*, если в фактор кольце A/\mathfrak{p} нет делителей нуля.

³Необходимые предварительные сведения о категориях и функторах можно почерпнуть из курса алгебры, см. например лекцию http://vyshka.math.ru/pspdf/1011/algebra-2/lec_10.pdf

⁴См. цитированную выше лекцию.

Первое означает, что каждая конечно порождённая приведённая \mathbb{k} -алгебра изоморфна координатной алгебре некоторого аффинного алгебраического многообразия, и было установлено нами в лем. 3.4 на стр. 56. Второе означает, что сопоставление регулярному морфизму многообразий его гомоморфизма подъёма задаёт биекцию

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aff}_{\mathbb{k}}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\mathbb{k}}}(\mathbb{k}[Y], \mathbb{k}[X]), \quad \varphi \mapsto \varphi^*. \quad (3-13)$$

Для построения обратного отображения рассмотрим функтор из категории конечно порождённых приведённых \mathbb{k} -алгебр с единицей в категорию множеств, сопоставляющий алгебре её максимальный спектр

$$h_{\mathbb{k}} : \mathrm{Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathrm{Set}, \quad A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\mathbb{k}}}(A, \mathbb{k}) = \mathrm{Spec}_{\mathbb{m}} A, \quad (3-14)$$

а гомоморфизму \mathbb{k} -алгебр $\psi : A \rightarrow B$ — отображение подъёма $\psi^* : \mathrm{Spec}_{\mathbb{m}} B \rightarrow \mathrm{Spec}_{\mathbb{m}} A$, переводящее сюръекцию $\mathrm{ev} : B \rightarrow \mathbb{k}$ с ядром $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{m}} B$ в сюръекцию $\psi^*(\mathrm{ev}) = \mathrm{ev} \circ \psi$ с ядром $\psi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{m}} \mathbb{k}[X]$. Сравнение определений показывает, что отображения множеств

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aff}_{\mathbb{k}}}(X, Y) \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi \mapsto \varphi^*} \\ \xleftarrow{\psi^* \mapsto \psi} \end{array} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\mathbb{k}}}(\mathbb{k}[Y], \mathbb{k}[X])$$

обратны друг другу. В самом деле, если регулярный морфизм из алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в алгебраическое многообразие $Y \subset \mathbb{A}^m$ действует по правилу $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$, где $\varphi_i(x) \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, то его гомоморфизм подъёма $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ действует на образующие по правилу $y_i \mapsto \varphi_i(\mathrm{mod} I(X))$. Подъём этого гомоморфизма подъёма, т. е. отображение $\varphi^{**} : \mathrm{Spec}_{\mathbb{m}} \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathrm{Spec}_{\mathbb{m}} \mathbb{k}[Y]$, переводит вычисление

$$\mathrm{ev}_p : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}, \quad f(x) \mapsto f(p),$$

в произвольной точке $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in X$ в композицию $\mathrm{ev}_p \circ \varphi^*$, которая переводит каждую образующую $y_i \in \mathbb{k}[Y]$ в число $\varphi_i(p) \in \mathbb{k}$ и, таким образом, является вычислением в точке $\varphi(p) \in Y$. Стало быть, $\varphi^{**} = \varphi$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.12. Установите для любого гомоморфизма \mathbb{k} -алгебр $\psi : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ равенство $\psi^{**} = \psi$.

Тем самым, отображение (3-13) биективно, и значит, функтор (3-13) является оборачивающей стрелки эквивалентностью категорий. Функтор (3-14) не является квазиобратным¹ к функтору (3-12) лишь потому, что принимает значения не в категории аффинных алгебраических многообразий, а в категории множеств. Для любой конечно порождённой приведённой \mathbb{k} алгебры A с единицей, множество $\mathrm{Spec}_{\mathbb{m}} A$ допускает много различных, но изоморфных друг другу структур аффинного алгебраического многообразия, если понимать под таковой структурой вложение множеств $\varphi : \mathrm{Spec}_{\mathbb{m}} A \hookrightarrow \mathbb{A}^n$, биективно отображающее $\mathrm{Spec}_{\mathbb{m}} A$ на аффинное алгебраическое многообразие $V(\ker \varphi^*) \subset \mathbb{A}^n$, где $\varphi^* : \mathbb{k}[\mathbb{A}^n] \twoheadrightarrow A$ это гомоморфизм подъёма вложения φ . Задание такой структуры равносильно выбору представления алгебры A образующими и соотношениями, т. е. фиксации изоморфизма $A \simeq \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$.

¹В смысле цитированной выше лекции.

ПРИМЕР 3.5 (ПРЯМАЯ И ГИПЕРБОЛА)

В прим. 3.4 на стр. 58 мы видели, что точки спектра $\text{Spec}_m \mathbb{k}[t]$ биективно соответствуют точкам аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \mathbb{k}$, ибо всякий гомоморфизм $\text{ev} : \mathbb{k}[t] \rightarrow \mathbb{k}$ однозначно определяется своим значением $\text{ev}(t) = \lambda \in \mathbb{k}$ на образующей алгебры $\mathbb{k}[t]$, и это значение может быть любым. Аналогично, спектр алгебры полиномов Лорана $\text{Spec}_m \mathbb{k}[t, t^{-1}]$ находится в естественной биекции с точками аффинной прямой с выколотым нулём, т. е. с открытым множеством $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = \mathbb{k}^*$, ибо значение $\lambda = \text{ev}(t) = 1/(\text{ev}(t^{-1}))$ может быть любым обратимым элементом поля \mathbb{k} . Если же задать алгебру полиномов Лорана образующими и соотношениями, например, посредством изоморфизма $\varphi^* : \mathbb{k}[t, t^{-1}] \simeq \mathbb{k}[x, y]/(xy - 1)$, переводящего t в x , а t^{-1} в y , то её спектр отождествится с множеством точек гиперболы $xy = 1$ в \mathbb{A}^2 . При этом отображение поднятия $\varphi = \varphi^{**} : V(xy - 1) \rightarrow \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ будет проекцией гиперболы на координатную ось.

3.2.5. Дизъюнктные объединения (копроизведения) многообразий. Для аффинных алгебраических многообразий X и Y прямое произведение алгебр $\mathbb{k}[X] \times \mathbb{k}[Y]$ конечно порождено, приведено, содержит единицу и обладает следующим универсальным свойством: для любой пары гомоморфизмов $\varphi^* : B \rightarrow \mathbb{k}[X]$, $\psi^* : B \rightarrow \mathbb{k}[Y]$ из произвольной \mathbb{k} -алгебры B существует единственный гомоморфизм $\eta^* : B \rightarrow \mathbb{k}[X] \times \mathbb{k}[Y]$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{k}[X] \times \mathbb{k}[Y] & \\
 i_X^* \swarrow & \uparrow \eta^* & \searrow i_Y^* \\
 \mathbb{k}[X] & & \mathbb{k}[Y] \\
 \varphi^* \swarrow & & \searrow \psi^* \\
 & B &
 \end{array}$$

в которой $i_X^* : \mathbb{k}[X] \times \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ и $i_Y^* : \mathbb{k}[X] \times \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[Y]$ суть проекции произведения на сомножители, переводящие $(f, g) \in \mathbb{k}[X] \times \mathbb{k}[Y]$ в $f \in \mathbb{k}[X]$ и $g \in \mathbb{k}[Y]$ соответственно.

УПРАЖНЕНИЕ 3.13. Проверьте это, и покажите любая алгебра A с парой гомоморфизмов

$$i_X^* : A \rightarrow \mathbb{k}[X] \quad \text{и} \quad i_Y^* : A \rightarrow \mathbb{k}[Y],$$

удовлетворяющих предыдущему универсальному свойству, канонически изоморфна алгебре $\mathbb{k}[X] \times \mathbb{k}[Y]$ посредством единственного изоморфизма, перестановочного с гомоморфизмами i_X^* и i_Y^* .

Из установленной в н° 3.2.4 эквивалентности категорий вытекает, что аффинное алгебраическое многообразие $X \sqcup Y \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spec}_m(\mathbb{k}[X] \times \mathbb{k}[Y])$ обладает двойственным универсальным свойством: для любой пары регулярных морфизмов $\varphi : X \rightarrow Z$, $\psi : Y \rightarrow Z$ в любое аффинное алгебраическое многообразие Z существует единственный регулярный морфизм $\eta : X \sqcup Y \rightarrow Z$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & X \sqcup Y & \\
 i_X \swarrow & \uparrow \eta & \searrow i_Y \\
 X & & Y \\
 \varphi \swarrow & & \searrow \psi \\
 & Z &
 \end{array}$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.14. Проверьте, что для любых объектов X, Y произвольной категории объект $X \sqcup Y$ и обладающие предыдущим универсальным свойством морфизмы

$$i_X : X \rightarrow X \sqcup Y, \quad i_Y : Y \rightarrow X \sqcup Y,$$

если существуют, то единственны точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с i_X и i_Y . Убедитесь также, что в категории множеств таким объектом является дизъюнктное объединение множеств X и Y .

УПРАЖНЕНИЕ 3.15. Пусть аффинное алгебраическое многообразие X является теоретико-множественным объединением двух непустых непересекающихся аффинных алгебраических многообразий Y и Z . Покажите, что $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[Y] \times \mathbb{k}[Z]$.

3.2.6. Прямые произведения многообразий. Для коммутативных \mathbb{k} -алгебр A и B и единицами тензорное произведение векторных пространств $A \otimes B$ имеет естественную структуру коммутативной \mathbb{k} -алгебры с единицей $1 \otimes 1$ и умножением, которое на разложимых тензорах задаётся формулой $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.16. Убедитесь в этом.

Из универсального свойства тензорного произведения вытекает, что гомоморфизмы \mathbb{k} -алгебр

$$\begin{aligned} \alpha : A &\rightarrow A \otimes B & a &\mapsto a \otimes 1, \\ \beta : B &\rightarrow A \otimes B & b &\mapsto 1 \otimes b, \end{aligned} \tag{3-15}$$

обладают универсальными свойствами *копроизведения*, т. е. для любой пары гомоморфизмов $\varphi : A \rightarrow C, \psi : B \rightarrow C$ существует единственный гомоморфизм $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \rightarrow C$ со свойствами $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ \alpha$ и $\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \beta$, и этот гомоморфизм действует на разложимые тензоры по правилу $\varphi \otimes \psi : a \otimes b \mapsto \varphi(a)\psi(b)$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.17. Убедитесь в этом.

Например, тензорное произведение алгебр $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \otimes \mathbb{k}[y_1, y_2, \dots, y_m]$ изоморфно алгебре многочленов $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m]$ посредством отображения

$$x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n} \otimes y_1^{r_1} y_2^{r_2} \cdots y_m^{r_m} \mapsto x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n} y_1^{r_1} y_2^{r_2} \cdots y_m^{r_m}.$$

Эквивалентность категорий из п° 3.2.4 превращает этот изоморфизм в изоморфизм аффинных алгебраических многообразий $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \simeq \mathbb{A}^{n+m}$.

Предложение 3.5

Тензорное произведение конечно порождённых приведённых \mathbb{k} -алгебр $A \otimes B$ является конечно порождённой приведённой \mathbb{k} -алгеброй с максимальным спектром $\text{Spec}_m(A \otimes B) = \text{Spec}_m(A) \times \text{Spec}_m(B)$. В частности, теоретико-множественное произведение аффинных алгебраических многообразий тоже является аффинным алгебраическим многообразием.

Доказательство. Биекция $\text{Spec}_m(A) \times \text{Spec}_m(B) \simeq \text{Spec}_m(A \otimes B)$ переводит точку (p, q) , представленную парой эпиморфизмов вычисления $ev_p : A \rightarrow \mathbb{k}, ev_q : B \rightarrow \mathbb{k}$ в эпиморфизм вычисления

$$A \otimes B \rightarrow \mathbb{k}, \quad a \otimes b \mapsto ev_p(a) ev_q(b),$$

существующий в силу универсального свойства тензорного произведения. Алгебра $A \otimes B$ порождается над \mathbb{k} всевозможными попарными тензорными произведениями образующих алгебр A и B , коих имеется конечное число. Чтобы показать, что $A \otimes B$ приведена, достаточно

согласно предл. 3.4 на стр. 58 убедиться в том, что всякий элемент $h \in A \otimes B$, задающий нулевую функцию на $\text{Spec}_m(A \otimes B)$, равен нулю. Для этого запишем такой элемент h в виде $\sum f_\nu \otimes g_\nu$ с линейно независимыми над \mathbb{k} элементами $g_\nu \in B$. Из равенства $(e\nu_p \otimes e\nu_q)h = 0$, справедливого для всех $(p, q) \in \text{Spec}_m(A \otimes B)$, вытекает, что при произвольно зафиксированном $p \in \text{Spec}_m A$ линейная комбинация $\sum f_\nu(p) \cdot g_\nu \in B$ является тождественно нулевой функцией на $\text{Spec}_m B$, и значит, равна нулю в B , так как алгебра B приведена. Это означает, что все константы $f_\nu(p)$ нулевые для любого $p \in \text{Spec}_m A$, т. е. элементы $f_\nu \in A$ задают тождественно нулевые функции $\text{Spec}_m A \rightarrow \mathbb{k}$. Поскольку алгебра A приведена, все $f_\nu = 0$, а значит и $h = 0$. \square

3.3. Топология Зарисского. На множестве $X = \text{Spec}_m A$ имеется каноническая топология, отражающая алгебраические свойства алгебры A . Она называется *топологией Зарисского* и имеет в качестве замкнутых подмножеств алгебраические подмногообразия в X , т. е. множества $V(I) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \ \forall f \in I\} = \{\mathfrak{m} \in \text{Spec}_m A \mid I \subset \mathfrak{m}\}$ для всевозможных идеалов $I \subset A$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.18. Убедитесь, что¹

$$\emptyset = V(1), \quad X = V(0), \quad \bigcap_\nu V(I_\nu) = V\left(\sum_\nu I_\nu\right), \quad V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(IJ), \quad (3-16)$$

где идеал $\sum_\nu I_\nu$ состоит из всех конечных сумм $\sum_\nu f_\nu$ с $f_\nu \in I_\nu$, а идеал IJ является \mathbb{k} -линейной оболочкой всевозможных произведений ab с $a \in I, b \in J$.

В топологии Зарисского вложение открытых окрестностей друг в друга выражает связано, скорее, с делимостью в алгебре функций, чем с «близостью» или «удалённостью» точек, составляющих эти окрестности. Поэтому многие свойства топологии Зарисского выглядят экзотическими с точки зрения интуиции, основанной на опыте работы с метрическими пространствами.

Например, топология Зарисского на произведении $X \times Y$ обычно тоньше произведения топологий Зарисского на X и Y , поскольку замкнутые подмножества $Z \subset X \times Y$ не исчерпываются пересечениями произведений замкнутых подмножеств в X, Y . Скажем, для $X = Y = \mathbb{A}^1$ любая плоская алгебраическая кривая замкнута в топологии Зарисского на $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$, в то время как произведения замкнутых множеств на \mathbb{A}^1 это конечные объединения изолированных точек и координатных прямых.

ЛЕММА 3.6

Всякий регулярный морфизм алгебраических многообразий $\varphi : X \rightarrow Y$ непрерывен в топологии Зарисского.

Доказательство. Прообраз $\varphi^{-1}(Z)$ замкнутого $Z = V(I) \subset Y$ состоит из всех $x \in X$, для которых $0 = f(\varphi(x)) = \varphi^* f(x) \ \forall f \in I$, т. е. является множеством нулей идеала, порождённого в $\mathbb{k}[X]$ образом $\varphi^*(I)$ идеала I при гомоморфизме поднятия $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$. \square

3.3.1. База и компактность. Поскольку всякий идеал $I \subset \mathbb{k}[X]$ конечно порождён, каждое замкнутое множество является пересечением конечного набора гиперповерхностей:

$$V(I) = V(f_1, f_2, \dots, f_m) = \bigcap_\nu V(f_\nu)$$

для идеала $I = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. Поэтому любое открытое множество

$$X \setminus V(I) = \bigcup_\nu (X \setminus V(f_\nu))$$

¹Обратите внимание, что последнее равенство в (3-16) равносильно равенству $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{IJ}$.

является конечным объединением главных открытых множеств

$$\mathcal{D}(f) \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus V(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

Таким образом, главные открытые множества составляют базу топологии Зарисского, и любое открытое подмножество $U \subset X$, включая само X , компактно в том смысле, что в каждом его открытом покрытии содержится конечное подпокрытие.

УПРАЖНЕНИЕ 3.19. Докажите это.

3.3.2. Неприводимые компоненты. Топологическое пространство X , представимое в виде объединения $X = X_1 \cup X_2$ собственных замкнутых подмножеств $X_1, X_2 \subsetneq X$, называется *приводимым*. В метрической топологии это понятие бессодержательно, поскольку любое пространство, содержащее более одной точки, приводимо. В топологии Зарисского неприводимые алгебраические многообразия играют примерно такую же роль, какую степени простых чисел играют в арифметике.

Предложение 3.6

Аффинное алгебраическое многообразие неприводимо тогда и только тогда, когда в его координатной алгебре $\mathbb{k}[X]$ нет делителей нуля.

Доказательство. Разложение $X = X_1 \cup X_2$, в котором каждое X_i замкнуто, непусто и отлично от X , означает наличие ненулевых регулярных функций $f_1 \in I(X_1)$ и $f_2 \in I(X_2)$, произведение которых $f_1 f_2$ тождественно зануляется на всём X , и значит, равно нулю $\mathbb{k}[X]$. Наоборот, если $f_1 f_2 = 0$ в $\mathbb{k}[X]$ каких-либо ненулевых функций $f_i \in \mathbb{k}[X]$, то обе они необратимы в $\mathbb{k}[X]$, а значит, замкнутые подмножества $V(f_1), V(f_2) \subset X$ оба непусты, отличны от X , и при этом $X = V(f_1) \cup V(f_2)$. \square

Упражнение 3.20. Убедитесь, что $V(f)$ непусто и отлично от X для всякого ненулевого необратимого многочлена $f \in \mathbb{k}[X]$.

Следствие 3.6

Аффинная гиперповерхность $\{g(x) = 0\} \subset \mathbb{A}^n$ неприводима тогда и только тогда, когда g является степенью неприводимого многочлена.

Доказательство. Поскольку алгебра $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ факториальна, радикал любого главного идеала $\sqrt{(f)}$ также является главным идеалом, порождённым произведением всех попарно неассоциированных неприводимых делителей многочлена f . Следовательно координатная алгебра $\mathbb{k}[V(f)] = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] / \sqrt{(f)}$ не имеет делителей нуля, если и только если у f имеется единственный с точностью до умножения на константы неприводимый делитель. \square

ТЕОРЕМА 3.4

Каждое аффинное алгебраическое многообразие имеет единственное разложение в конечное объединение $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ таких неприводимых замкнутых подмножеств $X_i \subset X$, что $X_i \not\subset X_j$ при $i \neq j$.

Доказательство. Разложение строится рекурсивно. Если X приводимо, мы представляем его в виде $X = Z_1 \cup Z_2$, где $Z_{1,2}$ являются собственными замкнутыми подмножествами в X , и далее повторяем эту процедуру с каждым Z_i , пока не придём к конечному разложению $X = \bigcup Z_\nu$,

в котором все Z_ν неприводимы. Выкидывая те Z_ν , которые содержатся в других Z_μ , получаем требуемое разложение. Если рекурсивная процедура никогда не остановится, возникнет бесконечная цепочка строго вложенных замкнутых подмножеств $X \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$, идеалы которых образуют бесконечную строго возрастающую цепочку $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$, а это противоречит нётеровости алгебры $\mathbb{k}[X]$.

Единственность разложения доказывается индукцией по числу неприводимых компонент. Пусть X раскладывается на k компонент и для всех многообразий, раскладывающихся на меньшее число компонент, разложение единственно. Для неприводимого Y включение $Y \subset Z_1 \cup Z_2$ означает разложение $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$ и влечёт включение $Y \subset Z_1$ или включение $Y \subset Z_2$. Поэтому равенство двух разложений на неприводимые компоненты

$$X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m$$

означает, что $X_1 \subset Y_\alpha \subset X_\beta$ для некоторых α, β , откуда $X_1 = Y_\alpha = X_\beta$ и $\beta = 1$. Перенумеруем Y_i так, чтобы $\alpha = 1$. Тогда из [упр. 3.21](#) ниже вытекает равенство

$$\begin{aligned} X_2 \cup \dots \cup X_k &= \overline{X_2 \setminus X_1} \cup \dots \cup \overline{X_k \setminus X_1} = \overline{X \setminus X_1} = \\ &= \overline{X \setminus Y_1} = \overline{Y_2 \setminus X_1} \cup \dots \cup \overline{Y_m \setminus Y_1} = Y_2 \cup \dots \cup Y_m, \end{aligned}$$

к которому применимо предположение индукции. \square

УПРАЖНЕНИЕ 3.21. Пусть $Z \subsetneq Y \subset X$ замкнуты и Y неприводимо. Убедитесь, что $Y = \overline{Y \setminus Z}$ (замыкание берётся в X) и что неприводимость Y для этого существенна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3

Неприводимые замкнутые подмножества $X_i \subset X$, о которых идёт речь в [теор. 3.4](#), называются *неприводимыми компонентами* многообразия X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7

Элемент $f \in \mathbb{k}[X]$ делит нуль, если и только если он обращается в нуль на какой-нибудь неприводимой компоненте многообразия X .

Доказательство. Пусть $fg = 0$ и $g \neq 0$. Обозначим ограничения функций f, g на неприводимые компоненты $X_i \subset X$ через $f_i, g_i \in \mathbb{k}[X_i]$. Поскольку $g \neq 0$ в $\mathbb{k}[X]$, хотя бы при одном i ограничение $g_i \neq 0$ в $\mathbb{k}[X_i]$. Так как в $\mathbb{k}[X_i]$ нет делителей нуля, мы заключаем, что $f_i = 0$ в $\mathbb{k}[X_i]$. Наоборот, если $f_i = 0$ для какого-нибудь i , то $fg = 0$ для любой ненулевой функции $g \in I\left(\bigcup_{\nu \neq i} X_\nu\right)$. \square

3.3.3. Большие открытые множества. Топология Зарисского нехаусдорфова. Если X неприводимо, любые два непустых открытых подмножества $U_1, U_2 \subset X$ имеют непустое пересечение, т. к. в противном случае возникает разложение $X = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$ в объединение собственных замкнутых подмножеств. Таким образом, каждое непустое открытое подмножество неприводимого многообразия всюду плотно в нём. Поскольку регулярные функции непрерывны в топологии Зарисского, из плотности непустых открытых множеств вытекает, что две регулярных функции f, g на неприводимом многообразии X , принимающие равные значения во всех точках какого-нибудь непустого открытого подмножества в X , совпадают как элементы алгебры $\mathbb{k}[X]$.

3.4. Рациональные функции. Все элементы координатной алгебры $\mathbb{k}[X]$, которые не являются делителями нуля, образуют мультипликативную систему¹ $S_X \subset \mathbb{k}[X]$. Кольцо частных² $\mathbb{k}[X]S_X^{-1}$ называется *кольцом рациональных функций* на X и обозначается $\mathbb{k}(X)$.

Если многообразие X неприводимо, то $S_X = \mathbb{k}[X]^* = \mathbb{k}[X] \setminus 0$ и $\mathbb{k}(X) = Q_{\mathbb{k}[X]}$ является полем частных целостного кольца $\mathbb{k}[X]$.

Скажем, что рациональная функция $f \in \mathbb{k}(X)$ определена в точке $x \in X$, если существует такое её представление в виде дроби $f = p/q$, в котором $p, q \in \mathbb{k}[X]$, q не делит нуля, и $q(x) \neq 0$. Число $f(x) = p(x)/q(x) \in \mathbb{k}$ называется *значением функции f в точке x* .

УПРАЖНЕНИЕ 3.22. Убедитесь, что $f(x)$ не зависит от выбора представления $f = p/q$ оговорённого выше вида.

Множество точек x , в которых определена рациональная функция f , называется *областью определения* функции f и обозначается $\text{Dom}(f)$. Из предл. 3.7 и п° 3.3.3 вытекает, что $\text{Dom}(f)$ является плотным открытым подмножеством в X .

УПРАЖНЕНИЕ 3.23. Убедитесь, что для совпадения двух рациональных функций как элементов кольца $\mathbb{k}(X)$ достаточно поточечного совпадения их значений на каком-нибудь плотном открытом подмножестве в X .

Для открытого $U \subset X$ положим $\mathbb{k}[U] \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathbb{k}(X) \mid \text{Dom}(f) \supset U\}$ и будем называть эту алгебру *алгеброй рациональных функций, регулярных в U* .

ЛЕММА 3.7

Если $h \in \mathbb{k}[X]$ не делит нуля, то $\mathbb{k}[\mathcal{D}(h)] = \mathbb{k}[X][h^{-1}]$ является кольцом частных $\mathbb{k}[X]$ со знаменателями из мультипликативной системы $\{h^k\}_{k \geq 0}$.

Доказательство. Для рациональной функции $f \in \mathbb{k}(X)$ положим

$$(f^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in \mathbb{k}[X] \mid gf \in \mathbb{k}[X]\}. \quad (3-17)$$

Это идеал в $\mathbb{k}[X]$, и лежащие в нём неделители нуля исчерпывают все знаменатели, встречающиеся во всевозможных представлениях функции f в виде дроби.

УПРАЖНЕНИЕ 3.24. Покажите, что они линейно порождают идеал (f^{-1}) как векторное пространство над \mathbb{k} .

Таким образом, $X \setminus \text{Dom}(f) = V((f^{-1}))$. Включение $\mathcal{D}(h) \subset \text{Dom}(f)$ равносильно включению $V(h) \supset V((f^{-1}))$, т. е. занулению функции h на общих нулях всех знаменателей функции f . По теоремам Гильберта о нулях $h^d \in (f^{-1})$ для некоторого $d \in \mathbb{N}$. Тем самым, $f = p/h^d$, где $p = h^d \cdot f \in \mathbb{k}[X]$. \square

¹Напомню, что подмножество S в коммутативном кольце A с единицей называется *мультипликативной системой*, если $1 \in S$, $0 \notin S$ и $s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 s_2 \in S$.

²Напомню, что кольцо частных AS^{-1} со знаменателями в мультипликативной системе S коммутативного кольца A с единицей называется фактор декартова произведения $A \times S$ по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему равенства $a/s = (at)/(st)$ со всевозможными $a \in A$ и $s, t \in S$. Классы эквивалентности пар (a, s) по модулю этого отношения называются *дробями*, обозначаются a/s и образуют коммутативное кольцо. Подробности см. в курсе алгебры, например, в лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-04.pdf>.

3.4.1. Аффинность главных открытых множеств. Если $h \in \mathbb{k}[X]$ не делит нуль, то главное открытое подмножество $\mathcal{D}(h) = \text{Spec}_m \mathbb{k}[X][h^{-1}] \simeq \text{Spec}_m \mathbb{k}[X][t]/(1 - ht)$ всюду плотно в X и является аффинным алгебраическим многообразием, реализуемым, например, замкнутой гиперповерхностью $V(1 - ht) \subset X \times \mathbb{A}^1$. Вложение $i : \mathcal{D} \hookrightarrow X$ является регулярным морфизмом аффинных многообразий. Его гомоморфизм подъёма задаёт каноническое вложение $i^* : \mathbb{k}[X] \hookrightarrow \mathbb{k}[X][h^{-1}] \simeq \mathbb{k}[\mathcal{D}(h)]$ и продолжается до изоморфизма колец частных $i^* : \mathbb{k}(X) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{k}(\mathcal{D}(h))$. Обратите внимание, что два *разных* толкования записи $\mathbb{k}[\mathcal{D}(h)]$ — как координатной алгебры замкнутого аффинного многообразия $\mathcal{D}(h) = \text{Spec}_m \mathbb{k}[X][h^{-1}]$ и как алгебры рациональных функций, регулярных на открытом множестве $\mathcal{D}(h) \subset X$, вполне *согласованы* друг с другом.

ТЕОРЕМА 3.5

Пусть $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ — разложение аффинного алгебраического многообразия X на неприводимые компоненты. Тогда $\mathbb{k}(X) = \mathbb{k}(X_1) \times \mathbb{k}(X_2) \times \dots \times \mathbb{k}(X_k)$.

Доказательство. Выберем в идеале $I = I\left(\bigcup_{i \neq j} (X_i \cap X_j)\right) \subset \mathbb{k}[X]$, который состоит из всех функций, зануляющихся на всех попарных пересечениях различных неприводимых компонент многообразия X , функцию $f \in I$, не делящую нуль в $\mathbb{k}[X]$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.25. Убедитесь, что идеал I в действительности линейно порождается такими функциями как векторное пространство над \mathbb{k} .

Главное открытое подмножество $W = \mathcal{D}(f) = \text{Spec}_m \mathbb{k}[X][f^{-1}] \subset X$ аффинно и является дизъюнктным объединением подмножеств $W_i = W \cap X_i \subset X_i$. Каждое W_i является главным открытым подмножеством многообразия X_i и тоже аффинно:

$$W_i = \mathcal{D}(f_i) = \text{Spec}_m \mathbb{k}[X_i][f_i^{-1}] \subset X_i, \quad \text{где } f_i = f \pmod{I(X_i)} \in \mathbb{k}[X_i].$$

Согласно [упр. 3.15](#), $\mathbb{k}[W] \simeq \mathbb{k}[W_1] \times \mathbb{k}[W_2] \times \dots \times \mathbb{k}[W_k]$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.26. Проверьте, что кольцо частных прямого произведения коммутативных колец с единицами изоморфно прямому произведению колец частных сомножителей

$$(K_1 \times K_2 \times \dots \times K_k)S_{K_1 \times K_2 \times \dots \times K_k}^{-1} \simeq K_1 S_{K_1}^{-1} \times K_2 S_{K_2}^{-1} \times \dots \times K_k S_{K_k}^{-1}.$$

Таким образом, $\mathbb{k}(X) \simeq \mathbb{k}(W) \simeq \prod \mathbb{k}(W_i) \simeq \prod \mathbb{k}(X_i)$. □

ПРЕДОСТЕРЕЖЕНИЕ 3.1. Хотя главные открытые множества $\mathcal{D}(f)$, задаваемые не делящими нуль регулярными функциями $f \in \mathbb{k}[X]$, и являются аффинными алгебраическими многообразиями, произвольное открытое подмножество $U \subset X$ аффинным алгебраическим многообразием, вообще говоря, *не является*, и вложение $U \hookrightarrow \text{Spec}_m \mathbb{k}[U]$, сопоставляющее точке $u \in U$ её максимальный идеал $\mathfrak{m}_u = \ker \text{ev}_u \subset \mathbb{k}[U]$, может не быть биективным.

УПРАЖНЕНИЕ 3.27. Пусть $n \geq 2$ и $U = \mathbb{A}^n \setminus \mathcal{O}$ — дополнение к началу координат в аффинном пространстве. Покажите, что $\mathbb{k}[U] = \mathbb{k}[\mathbb{A}^n]$, и тем самым, $\text{Spec}_m \mathbb{k}[U] = \mathbb{A}^n \neq U$.

3.5. Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр. Любой гомоморфизм \mathbb{k} -алгебр

$$\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$$

канонически разлагается в композицию эпиморфизма и вложения:

$$\mathbb{k}[Y] \twoheadrightarrow \mathbb{k}[Y]/\ker(\varphi^*) = \text{im}(\varphi^*) \hookrightarrow \mathbb{k}[X]. \quad (3-18)$$

Поскольку алгебра $\mathbb{k}[Y]$ конечно порождена, а алгебра $\mathbb{k}[X]$ приведена, алгебра

$$\mathbb{k}[Y]/\ker(\varphi^*) = \text{im}(\varphi^*) \subset \mathbb{k}[X]$$

тоже является конечно порождённой приведённой \mathbb{k} -алгеброй, отвечающей аффинному многообразию $Z = \text{Spec}_m(\text{im}(\varphi^*)) \simeq V(\ker(\varphi^*)) \subset Y$. Инъективность гомоморфизма

$$\varphi_1^* : \mathbb{k}[Z] \rightarrow \mathbb{k}[X]$$

означает отсутствие ненулевых функций $f \in \mathbb{k}[Z]$, зануляющихся на образе $\varphi_1(X) \subset Z$, т. е. *плотность* множества $\varphi_1(X)$ в Z . Тем самым, $Z = \overline{\varphi(X)} \subset Y$ является замыканием образа $\varphi(X)$ в многообразии Y . Оно вложено в Y как замкнутое подмногообразие $V(\ker \varphi^*)$ нулей идеала $\ker \varphi^* \subset \mathbb{k}[Y]$. Мы заключаем, что алгебраическому разложению (3-18) на геометрическом языке отвечает разложение регулярного морфизма многообразий $\varphi : X \rightarrow Y$ в композицию

$$X \xrightarrow{\varphi_1} Z = \overline{\varphi(X)} \xhookrightarrow{\varphi_2} Y$$

регулярного морфизма $X \rightarrow Z$ с плотным образом и регулярного вложения Z в Y в качестве замкнутого подмногообразия.

3.5.1. Замкнутые вложения. Морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ называется *замкнутым вложением*, если его гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ сюръективен. Это означает, что φ является изоморфизмом между X и замкнутым подмногообразием $V(\ker \varphi^*) \subset Y$. Если замкнутое подмножество $Z \subset X$ неприводимо, замкнутое вложение $i : Z \hookrightarrow X$ имеет сюръективный гомоморфизм подъёма $i^* : \mathbb{k}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{k}[Z]$, принимающий значения в целостном кольце $\mathbb{k}[Z]$, которое канонически вложено в своё поле частных $\mathbb{k}(Z)$. По универсальному свойству кольца частных $\mathbb{k}(X)$ эпиморфизм i^* однозначно продолжается до эпиморфизма

$$\text{ev}_Z : \mathbb{k}(X) \twoheadrightarrow \mathbb{k}(Z), \quad (3-19)$$

который ограничивает рациональные функции с X на Z . Сюръекцию (3-19) можно воспринимать как гомоморфизм вычисления рациональных функций на X в «общей точке» неприводимого подмногообразия $Z \subset X$, где всякая рациональная функция определена. Результатом такого вычисления является рациональная функция на подмногообразии Z , т. е. элемент поля $\mathbb{k}(Z)$, который в дальнейшем может быть вычислен в некоторых «конкретных» точках $z \in Z$. В частности, когда $Z \subset X$ является неприводимой компонентой приводимого аффинного многообразия X , сюръективность гомоморфизма (3-19) даёт возможность представить любую рациональную функцию на компоненте $Z \subset X$ в виде ограничения некоторой рациональной функции на X , т. е. в виде дроби p/q , знаменатель q которой не зануляется тождественно ни на одной из неприводимых компонент многообразия X .

УПРАЖНЕНИЕ 3.28. Укажите такое представление для рациональной функции $1/x$ на компоненте $Z = V(y)$ координатного креста $X = V(xy)$ на аффинной плоскости \mathbb{A}^2 .

3.5.2. Доминантные морфизмы. Если многообразие X неприводимо, то регулярное отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ называется *доминантным*, если его гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ инъективен. Как мы видели выше, это означает, что $\overline{\varphi(X)} = Y$. Регулярный морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ приводимого многообразия X называется *доминантным*, если доминантно его ограничение $\varphi_i = \varphi|_{X_i} : X_i \rightarrow Y$ на каждую неприводимую компоненту $X_i \subset X$. В этом случае все гомоморфизмы подъёма $\varphi_i^* : \mathbb{k}[Y] \hookrightarrow \mathbb{k}[X_i] \subset \mathbb{k}(X_i)$ инъективны, и по универсальному свойству кольца частных их прямое произведение однозначно продолжается до вложения колец рациональных функций $\mathbb{k}(Y) \hookrightarrow \prod \mathbb{k}(X_i) = \mathbb{k}(X)$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.29. Покажите, что любой доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий $\varphi : X \rightarrow Y$ является композицией замкнутого вложения $\psi : X \hookrightarrow Y \times \mathbb{A}^m$ с последующей проекцией $\pi : Y \times \mathbb{A}^m \rightarrow Y$ вдоль \mathbb{A}^m .

3.5.3. Конечные морфизмы. Регулярный морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ называется *конечным*, если расширение алгебр $\varphi^*(\mathbb{k}[Y]) \subset \mathbb{k}[X]$ является целым, т. е. когда координатная алгебра $\mathbb{k}[X]$ является конечно порождённым модулем над своей подалгеброй $\varphi^*(\mathbb{k}[Y])$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.30. Убедитесь, что конечность морфизма $\varphi : X \rightarrow Y$ равносильна конечности индуцированного им морфизма $X \rightarrow \overline{\varphi(X)}$.

Предложение 3.8

Любой конечный морфизм аффинных алгебраических многообразий $\varphi : X \rightarrow Y$ переводит каждое замкнутое подмножество $Z \subset X$ в замкнутое подмножество $\varphi(Z) \subset Y$, и ограничение

$$\varphi_Z : Z \rightarrow \varphi(Z)$$

тоже является конечным морфизмом. Если многообразие X неприводимо, собственные замкнутые подмножества в X переходят в собственные замкнутые подмножества в Y .

Доказательство. Если замкнутое множество $Z \subset X$ имеет идеал $I = I(Z) \subset \mathbb{k}[X]$, гомоморфизм подъёма для регулярного отображения $\varphi_Z : Z \rightarrow \overline{\varphi(Z)}$ является композицией гомоморфизма $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ с последующей факторизацией $\mathbb{k}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{k}[X]/I = \mathbb{k}[Z]$. Поскольку алгебра $\mathbb{k}[X]$ конечно порождена как модуль над $\varphi^*(\mathbb{k}[Y])$, её фактор алгебра $\mathbb{k}[Z] = \mathbb{k}[X]/I$ тоже конечно порождена как модуль над $\varphi_Z^*(\mathbb{k}[Y]) = \varphi^*(\mathbb{k}[Y])/(I \cap \varphi^*(\mathbb{k}[Y]))$. Поэтому морфизм $\varphi_Z : Z \rightarrow \overline{\varphi(Z)}$ конечен. Замкнутость множества $\varphi(Z)$ равносильна тому, что он сюръективен. Проверять это можно отдельно для каждой неприводимой компоненты множества Z . Таким образом, для доказательства первого утверждения леммы достаточно проверить, что каждый конечный доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий $\varphi : X \rightarrow Y$ сюръективен. Так как гомоморфизм подъёма $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \hookrightarrow \mathbb{k}[X]$ в этой ситуации инъективен, мы можем отождествить алгебру $\mathbb{k}[Y]$ с её образом $\varphi^*(\mathbb{k}[Y]) \subset \mathbb{k}[X]$. При таком отождествлении морфизм $\varphi = \varphi^{**} : \text{Spec}_m \mathbb{k}[X] \rightarrow \text{Spec}_m \mathbb{k}[Y]$ переводит каждый максимальный идеал из $\mathbb{k}[X]$ в его пересечение с подалгеброй $\mathbb{k}[Y] \subset \mathbb{k}[X]$, и сюръективность φ означает, что любой максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[Y]$ является пересечением подалгебры $\mathbb{k}[Y] \subset \mathbb{k}[X]$ с каким-нибудь максимальным идеалом $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathbb{k}[X]$. Если идеал $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[Y]$, порождённый элементами идеала \mathfrak{m} в объёмлющей алгебре $\mathbb{k}[X]$, является собственным, то нужное равенство $\mathfrak{m} = \tilde{\mathfrak{m}} \cap \mathbb{k}[Y]$ выполняется для любого максимального идеала $\tilde{\mathfrak{m}} \supset \mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[X]$. Проверим, для любого собственного идеала $J \subset \mathbb{k}[Y]$, идеал $J \mathbb{k}[X] \subsetneq \mathbb{k}[X]$ тоже собственный.

Пусть функции f_1, f_2, \dots, f_m порождают $\mathbb{k}[X]$ как модуль над $\mathbb{k}[Y]$. Если $J \mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[X]$, то каждую из них можно записать в виде $f_i = \sum_{\nu} f_{\nu} c_{\nu i}$, где все $c_{\nu i} \in J$. Как и в доказательстве

лем. 3.2 на стр. 46 это приводит к матричному равенству $(f_1, f_2, \dots, f_m) \cdot (E - C) = 0$, где матрица $C = (c_{vi}) \in \text{Mat}_{m \times m}(J)$, а E — единичная матрица. Поэтому умножение на $\det(E - C)$ аннулирует алгебру $\mathbb{k}[X]$, откуда $\det(E - C) = 0$. Раскрывая этот определитель, заключаем, что $1 \in J$, т. е. идеал J не является собственным.

Для доказательства последнего утверждения леммы рассмотрим произвольное собственное замкнутое подмножество $Z \subsetneq X$ и любую ненулевую функцию $f \in \mathbb{k}[X]$, тождественно зануляющуюся вдоль Z . Поскольку функция f цела над подалгеброй $\varphi^*(\mathbb{k}[Y])$, она удовлетворяет уравнению $f^m + \varphi^*(g_1)f^{m-1} + \dots + \varphi^*(g_{m-1})f + \varphi^*(g_m) = 0$, в котором $g_i \in \mathbb{k}[Y]$. Если X неприводимо, функция f не является делителем нуля, и сокращая, при необходимости, это уравнение на f , мы можем считать, что его свободный член $\varphi^*(g_m) \neq 0$, а значит, и $g_m \neq 0$. Вычисляя левую часть уравнения в точках $z \in Z$, заключаем, что функция g_m тождественно зануляется на $\varphi(Z) \subset Y$. Стало быть $\varphi(Z) \neq Y$. \square

3.5.4. Нормальные многообразия. Аффинное алгебраическое многообразие Y называется *нормальным*, если оно неприводимо и его координатная алгебра $\mathbb{k}[Y]$ целозамкнута в поле рациональных функций $\mathbb{k}(Y) = Q_{\mathbb{k}[Y]}$, т. е. является *нормальным кольцом* в смысле н° 3.1.5. Например, любое аффинное многообразие с факториальной координатной алгеброй нормально. В частности, нормальны все аффинные пространства¹ \mathbb{A}^n .

Предложение 3.9

Всякий сюръективный конечный морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ в нормальное многообразие Y открыт² и сюръективно отображает каждую неприводимую компоненту многообразия X на всё Y .

Доказательство. отождествим $\mathbb{k}[Y]$ с подалгеброй в $\mathbb{k}[X]$ при помощи инъективного гомоморфизма φ^* . Открытость φ означает, что образ любого главного открытого множества $\mathcal{D}(f) \subset X$ содержит некоторую главную открытую окрестность каждой своей точки, т. е. для любой функции $f \in \mathbb{k}[X]$ и любой точки $p \in X$, в которой $f(p) \neq 0$, существует такая функция $a \in \mathbb{k}[Y]$, что $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$ на многообразии Y . Чтобы предъявить такую функцию a , рассмотрим отображение $\psi = \varphi \times f : X \rightarrow Y \times \mathbb{A}^1$, $p \mapsto (\varphi(p), f(p))$. Его гомоморфизм поднятия

$$\psi^* : \mathbb{k}[Y \times \mathbb{A}^1] = \mathbb{k}[Y][t] \rightarrow \mathbb{k}[X]$$

является гомоморфизмом вычисления полиномов от t с коэффициентами из подалгебры $\mathbb{k}[Y] \subset \mathbb{k}[X]$ на элементе $f \in \mathbb{k}[X]$. Будучи целой над подалгеброй $\mathbb{k}[Y]$, алгебра $\mathbb{k}[X]$ тем более цела над образом гомоморфизма ψ^* . По сл. 3.5 на стр. 52 минимальный многочлен μ_f элемента f над полем $\mathbb{k}(Y)$ лежит в $\mathbb{k}[Y]$. Поэтому ядром гомоморфизма ψ^* является главный идеал $(\mu_f) \subset \mathbb{k}[Y][t]$. Таким образом, морфизм ψ конечен и сюръективно отображает многообразие X на гиперповерхность в $Y \times \mathbb{A}^1$, образованную нулями функции

$$\mu_f(y; t) = t^m + a_1(y)t^{m-1} + \dots + a_m(y). \quad (3-20)$$

Ограничение этой функции на аффинную прямую $u \times \mathbb{A}^1$ над точкой $u \in Y$ является полиномом от t , корни которого суть значения функции $f : X \rightarrow \mathbb{k}$ во всех точках многообразия X , которые переводятся в точку u отображением φ . В частности, образ $\varphi(\mathcal{D}(f))$ состоит из таких точек $u \in Y$, над которыми u многочлена $\mu(y; t)$ имеется ненулевой корень. Поскольку поле \mathbb{k}

¹Включая одноточечное пространство $\mathbb{A}^0 = \text{Spec}_m \mathbb{k}$.

²Т. е. $\varphi(U)$ открыто в Y для любого открытого $U \subset X$

алгебраически замкнуто, наличие ненулевого корня равносильно тому, что хоть один из коэффициентов $a_i(y)$ не равен в точке y нулю. По нашему предположению, в точке $y = \varphi(p)$ такой коэффициент a_i имеется. Тогда $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a_i) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$, поскольку многочлен $\mu_f(q; t) \in \mathbb{k}[t]$ имеет ненулевой корень над всеми точками $q \in \mathcal{D}(a_i) \subset Y$.

Что касается ограничения φ на неприводимые компоненты $X_i \subset X$, то для каждого i множество $U_i = X \setminus \bigcup_{v \neq i} X_v = X_i \setminus \bigcup_{v \neq i} (X_i \cap X_v)$ открыто в X и плотно в X_i . Поскольку $\varphi(U_i)$ открыто, а Y неприводимо, $\varphi(U_i)$ плотно в Y , откуда $\varphi(X_i) = \overline{\varphi(U_i)} = Y$. \square

Ответы и указания к некоторым упражнениям

- Упр. 3.1. Если a и b являются старшими коэффициентами многочленов $f(x)$ и $g(x)$ из идеала I , причём $\deg f = m$ и $\deg g = n$, где $m \geq n$, то $a + b$ либо равно нулю, либо является старшим коэффициентом многочлена $f(x) + x^{m-n} \cdot g(x) \in I$ степени m . Аналогично, для любого $\alpha \in A$ произведение αa является старшим коэффициентом многочлена $\alpha f(x) \in I$ степени m .
- Упр. 3.2. Пусть $\pi : A \rightarrow B$ — гомоморфизм факторизации. Полный прообраз $\pi^{-1}(I)$ любого идеала $I \subset B$ является конечно порождённым идеалом в A . Образы его образующих в B продят идеал I .
- Упр. 3.5. В силу универсального свойства поля частных, любой ненулевой гомоморфизм алгебры A без делителей нуля в любое поле однозначно продолжается до вложения в это поле поля частных алгебры A .
- Упр. 3.6. По предл. 3.2 целое замыкание $\mathbb{k}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ в Q_A является полем. Если оно содержит A , то содержит и Q_A .
- Упр. 3.10. Если $a^n = 0$ и $b^m = 0$, то $(a + b)^{m+n-1} = 0$ и $(ca)^n = 0$ для любого $c \in A$.
- Упр. 3.11. Так как для простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ фактор кольцо A/\mathfrak{p} не имеет делителей нуля, гомоморфизм факторизации $A \rightarrow A/\mathfrak{p}$ аннулирует все нильпотенты. Поэтому $\mathfrak{n}(A) \subset \bigcap \mathfrak{p}$. Если элемент $a \in A$ не является нильпотентом, его неотрицательные целые степени a^m образуют содержащее единицу и не содержащее нуля мультипликативно замкнутое подмножество в A . Локализация $A[a^{-1}]$ кольца A по этому мультипликативно замкнутому подмножеству¹ является ненулевым коммутативным кольцом с единицей. Полный прообраз любого простого идеала $\mathfrak{m} \subset A[a^{-1}]$ относительно канонического гомоморфизма $A \rightarrow A[a^{-1}]$ является не содержащим элемента a простым идеалом в кольце A .
- Упр. 3.15. Это геометрическая версия китайской теоремы об остатках. Отображение $\varphi : \mathbb{k}[X] \hookrightarrow \mathbb{k}[Y] \times \mathbb{k}[Z]$, переводящее $f \in \mathbb{k}[X]$ в пару $(f|_Y, f|_Z)$, инъективно, т.к. $Y \cup Z = X$. По теореме Гильберта нулей идеал $I(Y) + I(Z) \subset \mathbb{k}[X]$, задающий в X пересечение $Y \cap Z = \emptyset$, содержит единицу, т.е. существуют такие $s \in I(Y)$ и $t \in I(Z)$, что $1 = s + t$. Тогда $\varphi(s) = \varphi(1 - t) = (0, 1)$ и $\varphi(t) = \varphi(1 - s) = (1, 0)$, а произвольная пара классов $(f \pmod{I(Y)}, g \pmod{I(Z)}) \in \mathbb{k}[Y] \times \mathbb{k}[Z]$ равна $\varphi(ft + gs)$, что означает сюръективность φ .
- Упр. 3.18. Первые три равенства и включения $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J) \subset V(IJ) \subset V(I) \cup V(J)$ очевидны.
- Упр. 3.19. Объединение любого семейства главных открытых множеств $\mathcal{D}(f_\nu)$ является дополнением к множеству нулей идеала I , порождённого функциями f_ν . Но этот идеал порождается конечным числом функций f_1, f_2, \dots, f_k из числа f_ν . Поэтому, $V(I) = V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots \cap V(f_k)$, а значит $X \setminus V(I) = V(f_1) \cup V(f_2) \cup \dots \cup V(f_k)$.
- Упр. 3.20. Если $V(f) = X$, то $f \in I(X)$, и значит, $f = 0$ в $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$. Если $V(f) = \emptyset$, то множество нулей идеала $J \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, порождённого идеалом $I(X)$ и многочленом f пусто, и из слабой теоремы о нулях вытекает, что $1 \equiv sf \pmod{I(X)}$ для некоторого $s \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, т.е. f обратим в $\mathbb{k}[X]$.
- Упр. 3.21. $Y = (Y \cap Z) \cup \overline{Y \setminus Z}$, где по условию $Y \cap Z \neq Y$.
- Упр. 3.24. Делители нуля в (f^{-1}) исчерпываются пересечениями этого идеала с идеалами $I(X_i)$ неприводимых компонент X_i многообразия X . Так как неделители нуля в (f^{-1}) по определению имеются, каждое из пересечений $(f^{-1}) \cap I(X_i) \subsetneq (f^{-1})$ является собственным векторным

¹Т.е. кольцо дробей вида b/a^m с $b \in A$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

подпространством в (f^{-1}) . Если бы все делители нуля тоже содержались в каком-нибудь собственном подпространстве, всё пространство (f^{-1}) оказалось бы объединением конечного набора собственных подпространств, что невозможно над бесконечным полем.

Упр. 3.25. Как и в упр. 3.24 каждое пересечение $I \cap I(X_i)$ является собственным векторным подпространством в I , поскольку включение $I \subset I(X_\nu)$ означало бы, что $X_\nu \subset \bigcup_{i \neq j} (X_i \cap X_j)$, а это в силу неприводимости X_ν влечёт включение $X_\nu \subset X_i \cap X_j$ для некоторых $i \neq j$, что невозможно, т. к. ни одна из неприводимых компонент не содержится в другой. Если все делители нуля в I лежат в собственном подпространстве, то I оказывается объединением конечного числа собственных подпространств.

Упр. 3.26. Элемент прямого произведения не делит нуль тогда и только тогда, когда каждая из его компонент не делит нуль: $S_{K_1 \times K_2 \times \dots \times K_k}^{-1} = S_{K_1}^{-1} \times S_{K_2}^{-1} \times \dots \times S_{K_k}^{-1}$.

Упр. 3.27. Используйте покрытие $U = \bigcup \mathcal{D}(x_i)$ и лем. 3.7.

Упр. 3.29. Пусть $A = \mathbb{k}[X]$, $B = \mathbb{k}[Y]$. Вложение $\varphi^* : B \hookrightarrow A$ задаёт на A структуру конечно порождённой B -алгебры, т. е. представляет A в виде $A \simeq B[x_1, x_2, \dots, x_m]/J$, что и утверждается.

Упр. 3.30. $\varphi^*(\mathbb{k}[Y]) = \mathbb{k}[\overline{\varphi(X)}]$.