§4. Алгебраические многообразия

Всюду в этом параграфе мы продолжаем по умолчанию считать, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто.

4.1. Определения и примеры. Алгебраическое многообразие определяется по той же схеме, как и гладкие или аналитические многообразия в дифференциальной геометрии, т. е. как топологическое пространство, каждая точка которого обладает открытой окрестностью, гомеоморфной некой стандартной «локальной модели», и любые две таких модели, происходящие из разных окрестностей, регулярным образом согласованы на пересечении этих окрестностей. В качестве локальных моделей в алгебраической геометрии допускаются *произвольные*[1] аффинные алгебраические многообразия, а регулярная согласованность двух таких моделей на их пересечении означает, что переход от одной модели к другой задаётся рациональными функциями, регулярными на рассматриваемом пересечении. Точные определения таковы.

Алгебраической аффинной картой на топологическом пространстве X называется гомеоморфизм $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ какого либо аффинного алгебраического многообразия X_U с топологией Зарисского на открытое подмножество $U \subset X$ с индуцированной из X топологией. Две алгебраических аффинных карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ и $\varphi_W : X_W \xrightarrow{\sim} W$ на X называются *совместимыми*, если *гомеоморфизм склейки* между прообразами пересечения $U \cap W$ в X_U и X_W

$$\varphi_{WU} \overset{\text{def}}{=} \varphi_W^{-1} \circ \varphi_U\big|_{\varphi_U^{-1}(U\cap W)} : \varphi_U^{-1}(U \cap W) \xrightarrow{\sim} \varphi_W^{-1}(U \cap W)$$

регулярен в том смысле, что его гомоморфизм поднятия $\varphi_{WU}^* : f \mapsto f \circ \varphi_{WU}$ является изоморфизмом алгебры рациональных функций на X_U, регулярных на $\varphi_U^{-1}(U \cap W)$, с алгеброй рациональных функций на X_W, регулярных на $\varphi_W^{-1}(U \cap W)$, т. е.

$$\varphi_{WU}^* : \Bbbk\left[\varphi_W^{-1}(U \cap W)\right] \xrightarrow{\sim} \Bbbk\left[\varphi_U^{-1}(U \cap W)\right] .$$

Открытое покрытие $X = \bigcup U_\nu$ попарно совместимыми алгебраическими картами называется *алгебраическим атласом* на X. Два алгебраических атласа называются *эквивалентными*, если их объединение также представляет собой алгебраический атлас. Топологическое пространство X, с зафиксированным на нём классом эквивалентных алгебраических атласов называется *алгебраическим многообразием*. Алгебраические многообразия, обладающие конечным атласом, называются многообразиями *конечного типа*.

Пример 4.1 (проективные пространства)
Проективное пространство $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}\left(\Bbbk^{n+1}\right)$ с однородными координатами

$$x = (x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n)$$

обладает алгебраическим атласом из $(n+1)$ стандартных аффинных карт

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n) \,|\, x_i \neq 0\}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n .$$

Обозначим через $X_i \simeq \mathbb{A}^n$ аффинное пространство с координатами[2]

$$t_i = \left(t_{i,0}, \dots , t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots , t_{i,n}\right) .$$

[1] В том числе не гладкие — такие, как крест $\mathrm{Spec_m}\,(\Bbbk[x, y]/(xy))$.

[2] первый индекс i является номером карты, а сами координаты $t_{i,\nu}$ в i-той карте нумеруются вторым индексом $\nu \neq i$, $0 \leqslant \nu \leqslant n$

Отображение $\varphi_i : t_i \mapsto \left(t_{i,0} : \dots : t_{i,i-1} : 1 : t_{i,i+1} : \dots : t_{i,n}\right)$ задаёт биекцию

$$\varphi_i : X_i \xrightarrow{\sim} U_i\,, \tag{4-1}$$

в которой прообразом пересечения $U_i \cap U_j$ является главное открытое множество $\mathcal{D}\left(t_{i,j}\right) \subset X_i$. Отображение склейки

$$\varphi_{ji} = \varphi_j^{-1}\varphi_i : X_i \supset \mathcal{D}\left(t_{i,j}\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}\left(t_{j,i}\right) \subset X_j$$

действует по формуле $t_i \mapsto t_{i,j}^{-1} \cdot t_j$ и устанавливает изоморфизм между аффинными алгебраическими многообразиями

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left(t_{i,j}\right) &= \operatorname{Spec_m} \Bbbk\left[t_{i,j}^{-1}, t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}\right],\\ \mathcal{D}\left(t_{j,i}\right) &= \operatorname{Spec_m} \Bbbk\left[t_{j,i}^{-1}, t_{j,0}, \dots, t_{j,j-1}, t_{j,j+1}, \dots, t_{j,n}\right].\end{aligned}$$

Упражнение 4.1. Убедитесь в этом.

Поэтому перенос топологии Зарисского с $X_i \simeq \mathbb{A}^n$ на U_i при помощи биекции (4-1) определяет согласованные индуцированные топологии на пересечениях $U_i \cap U_j$ и корректно наделяет $\mathbb{P}_n$ топологией, в которой все отображения (4-1) являются гомеоморфизмами.

Пример 4.2 (грассманианы)

Точками грассманова многообразия $\operatorname{Gr}(k,m)$ являются k-мерные векторные подпространства в координатном векторном пространстве $\Bbbk^m$. Иначе их можно воспринимать как орбиты матриц x ранга k из k строк ширины m под действием полной линейной группы $\mathrm{GL}_k(\Bbbk)$ левыми умножениями. При этом орбите матрицы x отвечает линейная оболочка её строк, а подпространству — орбита матрицы, по строкам которой записаны координаты базисных векторов любого базиса этого подпространства в стандартном базисе пространства $\Bbbk^m$. Грассманиан $\operatorname{Gr}(k,m)$ покрывается $\binom{m}{k}$ стандартными аффинными картами U_I, занумерованными строго возрастающими наборами индексов $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant m$. Если обозначить через $s_I(x)$ подматрицу матрицы x, образованную столбцами с номерами из I, то

$$U_I = \{x \in \operatorname{Mat}_{k\times m}(\Bbbk) \mid \det s_I(x) \neq 0\}.$$

Упражнение 4.2. Убедитесь, что карта U_I состоит из всех k-мерных подпространств $W \subset \Bbbk^m$, которые изоморфно проектируются на k-мерную координатную плоскость, натянутую на стандартные базисные векторы e_i с $i \in I$ пространства $\Bbbk^m$, вдоль дополнительной $(m-k)$-мерной координатной плоскости, натянутой на остальные базисные векторы.

Обозначим через $X_I \simeq \operatorname{Mat}_{k\times(m-k)}(\Bbbk) \simeq \mathbb{A}^{k(m-k)}$ аффинное пространство всех матриц из k строк ширины $m-k$ и будем нумеровать столбцы этих матриц индексами ν из дополнительного к I набора $\hat{I} = \{1, 2, \dots, m\} \smallsetminus I$. Отображение

$$\varphi_I : X_I \xrightarrow{\sim} U_I\,, \tag{4-2}$$

превращающее $k\times(m-k)$-матрицу $t \in X_I$ в $k\times m$-матрицу $\varphi_I(t)$ дописыванием к ней единичной $k\times k$-матрицы в столбцы с номерами из I, биективно. Прообраз

$$\varphi_I^{-1}\left(U_I \cap U_J\right) = \mathcal{D}\Big(\det s_J\big(\varphi_I(t)\big)\Big) \subset X_I\,.$$

Упражнение 4.3. Убедитесь, что отображение склейки

$$\varphi_{JI} = \varphi_J^{-1}\varphi_I \,:\, X_I \supset \mathcal{D}\Big(\det s_J\big(\varphi_I(t)\big)\Big) \to \mathcal{D}\Big(\det s_I\big(\varphi_J(t)\big)\Big) \subset X_J$$

действует по формуле $t \mapsto s_{\hat{J}}\Big(s_J^{-1}\big(\varphi_I(t)\big) \cdot \varphi_I(t)\Big)$ и является изоморфизмом аффинных алгебраических многообразий.

Отсюда мы как и в предыдущем примере заключаем, что грассманиан $\mathrm{Gr}(k, n)$ является алгебраическим многообразием конечного типа. Отметим, что при $k = 1$, $m = n + 1$ проделанное только что построение превращается в построение из прим. 4.1.

Пример 4.3 (прямое произведение многообразий)
Структура алгебраического многообразия на прямом произведении алгебраических многообразий X и Y задаётся атласом, состоящим из всех попарных произведений $U \times W$ аффинных карт $U \subset X$ и $W \subset X$ на X, Y.

4.1.1. Структурный пучок и регулярные морфизмы. Функция $f : X \to \Bbbk$ называется *регулярной* в точке x алгебраического многообразия X, если существуют такие порывающая x аффинная карта $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U \ni x$ и определённая в x рациональная функция $\widetilde{f} \in \Bbbk(X_U)$, что значения $\varphi_U^* f(z) = \widetilde{f}(z)$ совпадают во всех точках $z \in \mathrm{Dom}\widetilde{f}$. Функции $U \to \Bbbk$ на открытом подмножестве $U \subset X$, регулярные в каждой точке этого подмножества, образуют коммутативное кольцо, которое обозначается $\mathcal{O}_X(U)$ и называется кольцом *локальных регулярных функций* на U. Сопоставление $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$ задаёт пучок $\Bbbk$-алгебр на топологическом пространстве X. Он называется *структурным пучком* алгебраического многообразия X.

Отображение алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ называется *регулярным*, если для любой точки $x \in X$ и локальной регулярной функции $f \in \mathcal{O}_Y(W)$, определённой в какой-либо окрестности $W \ni \varphi(x)$, существует такая окрестность $U \subset \varphi^{-1}(W)$ точки x, что $\varphi^*(f) \in \mathcal{O}_X(U)$. Иными словами, над каждым открытом $U \subset Y$ гомоморфизм поднятия должен переводить локальные регулярные функции на U в локальные регулярные функции на $\varphi^{-1}(U)$, т. е. быть гомоморфизмом $\varphi^* : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X\left(\varphi^{-1}(U)\right)$. Например, множество регулярных морфизмов $X \to \mathbb{A}^1$ совпадает с $\mathcal{O}_X(X)$.

Упражнение 4.4. Покажите, что для каждой аффинной карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ гомоморфизм подъёма $\varphi_U^* : \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\sim} \Bbbk[X_U]$ отождествляет кольцо локальных регулярных на U функций с координатной алгеброй аффинного многообразия X_U.

4.1.2. Замкнутые подмногообразия. Каждое замкнутое подмножество Z алгебраического многообразия X имеет естественную структуру алгебраического многообразия. А именно, для каждой аффинной карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ прообраз пересечения $\varphi_U^{-1}(Z \cap U)$ является замкнутым подмножеством в X_U, т. е. аффинным алгебраическим многообразием с координатным кольцом

$$\Bbbk[X_U]/\varphi_U^* I(Z \cap U) \simeq \mathcal{O}_X(U)/I(Z \cap U)\,,$$

где идеал $I(Z \cap U) \subset \mathcal{O}_X(U)$ состоит из всех локальных регулярных на U функций[1], тождественно зануляющихся на $Z \cap U$. Аффинные карты $\varphi_U^{-1}(Z \cap U) \xrightarrow{\sim} Z \cap U \subset Z$ образуют алгебраический атлас на Z. Сопоставление $U \mapsto I(Z \cap U)$ является подпучком идеалов в структурном пучке $\Bbbk$-алгебр $\mathcal{O}_X$. Он называется *пучком идеалов* замкнутого подмногообразия $Z \subset X$ и обозначается $\mathcal{I}_z \subset \mathcal{O}_X$. В этой ситуации пишут, что $Z = V(\mathcal{I}_Z)$.

[1]ср. с упр. 4.4

Регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *замкнутым вложением*, если его образ $\varphi(X) \subset \subset Y$ является замкнутым подмногообразием и φ устанавливает изоморфизм между X и $\varphi(X)$. В частности, алгебраическое многообразие X тогда и только тогда допускает замкнутое вложение в аффинное пространство, когда оно является аффинным алгебраическим многообразием в смысле n° 3.1.6 на стр. 52, т. е. является множеством нулей системы полиномиальных уравнений в аффинном пространстве.

Пример 4.4 (семейства подмногообразий)
Каждый регулярный морфизм $\pi : X \to Y$ может восприниматься как семейство замкнутых подмногообразий $X_y = \pi^{-1}(y) \subset X$, параметризованное точками $y \in Y$. Если $\pi : X \to Y$, $\pi' : X' \to Y$ — два семейства с одной и той же базой, то регулярный морфизм $\varphi : X \to X'$ называется *морфизмом семейств*[1], если он переводит X_y в X'_y для каждого $y \in Y$, т. е. если $\pi = \pi' \circ \varphi$. Семейство $\pi : X \to Y$ называется *постоянным* или *тривиальным*, если оно изоморфно над Y прямому произведению $\pi_Y : X_0 \times Y \to Y$ для некоторого многообразия X_0.

4.1.3. Отделимость. Стандартный атлас на $\mathbb{P}_1$ состоит из двух карт $\varphi_i : \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} U_i \subset \mathbb{P}_1$, где $i = 0, 1$. Их пересечение видно внутри каждой из них как дополнение к началу координат:

$$\varphi_0^{-1}(U_0 \cap U_1) = \varphi_1^{-1}(U_0 \cap U_1) = \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\} = \{t \in \mathbb{A}^1 \mid t \neq 0\}.$$

Карты склеены по этому пересечению посредством отображения склейки

$$\varphi_{01} : t \mapsto 1/t. \tag{4-3}$$

Если вместо этого отображения воспользоваться тождественным отображением

$$\tilde{\varphi}_{01} : t \mapsto t, \tag{4-4}$$

получится другое многообразие — «прямая с раздвоенной точкой»: ————:————. Такого рода патология называется *неотделимостью*. Причина её возникновения в том, что правило склейки (4-4) «не замкнуто»: его можно «продолжить по непрерывности» с $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}$ на всё $\mathbb{A}^1 = \overline{\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}}$. В общем случае явление (не) отделимости формализуется так. Включения

$$U_0 \hookleftarrow U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_1$$

задают вложение $U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_0 \times U_1$, образ которого является пересечением аффинной карты $U_0 \cap U_1 \subset X \times X$ с диагональю $\Delta = (x, x) \subset X \times X$. Правило (4-3) задаёт вложение $(\mathbb{A}^1 \smallsetminus O) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по формуле $t \mapsto (t, t^{-1})$ и отождествляет пересечение $U_0 \cap U_1 \simeq \big(U_0 \times U_1\big) \cap \Delta$ с *замкнутым* подмножеством в $U_0 \times U_1 \simeq \mathbb{A}^2$ — а именно, с гиперболой $xy = 1$. Правило (4-4) задаёт вложение $(\mathbb{A}^1 \smallsetminus O) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по формуле $t \mapsto (t, t)$. Образ этого вложения не замкнут в $U_0 \times U_1 \simeq \mathbb{A}^2$ — он получается выкидыванием начала координат из диагонали $x = y$.

Алгебраическое многообразие X называется *отделимым*, если для любой пары аффинных карт U, W на X образ канонического вложения $U \cap W \hookrightarrow U \times W$ замкнут, или, что то же самое, если диагональ $\Delta \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

Например, $\mathbb{A}^n$ и $\mathbb{P}_n$ отделимы, поскольку диагонали в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ и в $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$ задаются, соответственно, уравнениями $x_i = y_i$ и $x_i y_j = x_j y_i$. Замкнутое подмногообразие $X \subset Y$ отделимого многообразия Y тоже отделимо, ибо диагональ в $X \times X$ является прообразом диагонали в $Y \times Y$ при вложении $X \times X \hookrightarrow Y \times Y$. В частности, всякое аффинное или проективное многообразие отделимо и имеет конечный тип.

[1] Или *морфизмом над* Y.

Пример 4.5 (график морфизма)
Пусть $\varphi : X \to Y$ — регулярный морфизм. Прообраз диагонали $\Delta \subset Y \times Y$ при индуцированном морфизме $\varphi \times \mathrm{Id}_Y : X \times Y \to Y \times Y$ называется *графиком* φ и обозначается через Γ_φ. Геометрически, $\Gamma_\varphi = \{(x, f(x))\} \subset X \times Y$. Если Y отделимо, то график замкнут. Например, график регулярного морфизма аффинных многообразий $\varphi : \mathrm{Spec_m}(A) \to \mathrm{Spec_m}(B)$ задаётся в $A \otimes B$ системой уравнений $1 \otimes f = \varphi^*(f) \otimes 1$, где f пробегает B.

4.1.4. Рациональные отображения. Регулярный морфизм $\varphi : U \to Y$, определённый на некотором открытом плотном подмножестве U алгебраического многообразия X, называется *рациональным отображением* из X в Y. Рациональное отображение $\psi : W \to Y$, заданное на открытом множестве $W \supset U$ и совпадающее с φ на U, называется *продолжением* рационального отображения $\varphi : U \to Y$. Объединение всех открытых множеств $W \supset U$, на которые продолжается φ, называется *областью определения* рационального отображения $\varphi : X \dashrightarrow Y$.

Упражнение 4.5 (квадратичная инволюция Кремоны). Покажите, что правило

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^{-1} : x_1^{-1} : x_2^{-1})$$

задаёт рациональное отображение $\varkappa : \mathbb{P}_2 \dashrightarrow \mathbb{P}_2$, определённое всюду, кроме трёх точек, найдите эти точки и опишите образ $\varkappa$.

Рациональные отображения $\varphi : X \dashrightarrow Y$ не являются отображениями «из X» в теоретико-множественном смысле, ибо определены не везде. В частности, композиция рациональных отображений не определена, когда образ первого отображения оказывается целиком вне области определения второго. Тем не менее, рациональные отображения часто возникают и играют важную роль в алгебраической геометрии. Например, естественная проекция $\mathbb{A}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$, переводящая точку пространства $\mathbb{A}(V)$, представленную вектором $v \in V$, в точку пространства $\mathbb{P}(V)$, представленную тем же самым вектором v, является сюрьективным рациональным отображением определённым всюду, кроме нуля.

4.2. Проективные многообразия. Алгебраическое многообразие X называется *проективным*, если оно допускает замкнутое вложение в проективное пространство, т. е. изоморфно замкнутому подмногообразию в $\mathbb{P}_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Упражнение 4.6. Покажите, что множество решений системы однородных полиномиальных уравнений на однородные координаты пространства $\mathbb{P}_n$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_n$.

В частности, проективными алгебраическими многообразиями являются грассманианы $\mathrm{Gr}(k, V)$, задаваемые квадратичными соотношениями Плюккера в $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$.

Упражнение 4.7. Покажите, что прямое произведение проективных многообразий проективно, и выведите из этого, что подмножество в $\mathbb{P}_{n_1} \times \mathbb{P}_{n_2} \times \dots \times \mathbb{P}_{n_m}$, задаваемое набором однородных по координатам каждого сомножителя полиномиальных уравнений на однородные координаты, является проективными алгебраическим многообразием.

Пример 4.6 (раздутие точки в $\mathbb{P}_n$)
Прямые, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_n$, образуют проективное пространство $E \simeq \mathbb{P}_{n-1}$. График инцидентности $\mathcal{B}_p = \{(q, \ell) \in \mathbb{P}_n \times E \mid q \in \ell\}$ называется *раздутием* точки $p \in \mathbb{P}_n$. Проекция $\sigma_p : \mathcal{B}_p \twoheadrightarrow \mathbb{P}_n$ биективна всюду над $\mathbb{P}_n \smallsetminus \{p\}$, но прообразом самой точки

p является весь слой $\sigma_p^{-1}(p) = \{p\} \times E \subset \mathbb{P}_n \times E$. Он называется *исключительным дивизором*[1]. Вторая проекция $\varrho_E : \mathcal{B}_p \twoheadrightarrow E$ реализует $\mathcal{B}_p$ как *линейное расслоение* над E, слой которого над точкой $q \in E$ — это прямая $(pq) \subset \mathbb{P}_n$. Это расслоение называется *тавтологическим* линейным расслоением над E. Из упр. 4.7 вытекает, что $\mathcal{B}_p$ является проективным многообразием: выберем однородные координаты на $\mathbb{P}_n$ так, чтобы

$$p = (1 : 0 : \ldots : 0),$$

и отождествим E с гиперплоскостью $V\left(x_0\right) = \{(0 : \lambda_1 : \ldots : \lambda_n)\} \subset \mathbb{P}_n$, сопоставляя прямой $\ell \ni p$ точку $\lambda = \ell \cap V(x_0)$; тогда коллинеарность точек p, q, λ запишется системой однородных квадратичных уравнений

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ q_0 & q_1 & \cdots & q_n \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = 2, \quad \text{или} \quad q_i t_j = q_j t_i \quad \forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

на $(q, \lambda) \in \mathbb{P}_n \times E$. Иначе раздутие точки p можно представлять себе как результат вклеивания проективного пространства E в проделанное на $\mathbb{P}_n$ вместо p точечное отверстие таким образом, что приход в точку p вдоль прямой $\ell \subset \mathbb{P}_n$ приводит в точку $\ell \in E$.

Лемма 4.1

Каждое замкнутое подмногообразие $X \subset \mathbb{P}_n$ является множеством решений конечной системы полиномиальных уравнений на однородные координаты пространства $\mathbb{P}_n$.

Доказательство. В обозначениях из прим. 4.1 на стр. 71 пересечение $X \cap U_i$ со стандартной открытой картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ является множеством нулей некоторого идеала I_i в кольце многочленов от n переменных $t_{i,\nu} = x_\nu / x_i$, где $0 \leqslant \nu \leqslant n$ и $\nu \neq i$. Каждый такой многочлен f можно переписать как $\overline{f}(x_0, x_1, \ldots, x_n)/x_i^d$, где $d = \deg f$, а $\overline{f} \in \Bbbk[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ — такой однородный многочлен степени d, что $\overline{f}\left(t_{i,0}, \ldots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \ldots, t_{i,n}\right) = f\left(t_{i,0}, \ldots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \ldots, t_{i,n}\right)$. Для каждого i рассмотрим какое-нибудь конечное множество образующих $f_{i,\alpha}$ идеала I_i и построим по ним однородные многочлены $\overline{f}_{i,\alpha} \in \Bbbk[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Покажем, что многообразие X совпадает с множеством Z решений системы однородных полиномиальных уравнений

$$x_i \cdot \overline{f}_{i,\alpha}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant i \leqslant n,$$

и при каждом i второй индекс α нумерует образующие $f_{i,\alpha}$ идеала I_i. Достаточно для каждого i установить равенство $Z \cap U_i = X \cap U_i$. Поскольку пересечение множества нулей однородного многочлена $x_i \cdot \overline{f}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ со картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ задаётся в аффинных координатах t_i на U_i уравнением $\overline{f}\left(t_{i,0}, \ldots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \ldots, t_{i,n}\right) = f\left(t_{i,0}, \ldots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \ldots, t_{i,n}\right) = 0$, пересечение карты U_i с множеством общих нулей однородных многочленов $x_i \cdot \overline{f}_{i,\alpha}$, индекс i которых равен номеру карты, совпадает с $X \cap U_i$. Тем самым, $Z \cap U_i \subset X \cap U_i$, и для доказательства равенства остаётся убедиться, что каждый однородный многочлен $x_j \cdot \overline{f}_{j,\beta}$ с $j \neq i$ также зануляется на $X \cap U_i$. Но множитель x_j зануляется на гиперплоскости $V(t_{i,j}) \subset U_i$, а множитель $\overline{f}_{j,\beta}$ зануляется на дополнительном к этой гиперплоскости главном открытом множестве $\mathcal{D}(t_{i,j}) = X \cap U_i \cap U_j \subset X \cap U_i$, т. к. последнее содержится в пересечении $X \cap U_j$, на котором $\overline{f}_{j,\beta}$ равен нулю. □

[1] Вообще, *дивизорами* (*Вейля*) на алгебраическом многообразии называются элементы свободной абелевой группы, порождённой неприводимыми замкнутыми подмногообразиями коразмерности 1 (размерности алгебраических многообразий обсуждаются в n° 4.3 ниже).

Пример 4.7 (иллюстрация доказательства лем. 4.1)
Проективное многообразие $X = V(x_0x_1x_2) \subset \mathbb{P}_2$ представляет собою объединение трёх координатных прямых и локально, в стандартных картах U_0, U_1, U_2, задаётся, соответственно, уравнениями $t_{0,1}t_{0,2} = 0$, $t_{1,0}t_{1,2} = 0$, $t_{2,0}t_{2,1} = 0$, которым в предыдущем доказательстве отвечают однородные многочлены $\overline{f}_{0,1} = x_1x_2$, $\overline{f}_{1,1} = x_0x_2$, $\overline{f}_{2,1} = x_0x_1$, а задающее X глобальное однородное уравнение $x_0x_1x_2 = 0$ имеет в левой части многочлен

$$x_0x_1x_2 = x_0 \cdot \overline{f}_{0,1} = x_1 \cdot \overline{f}_{1,1} = x_2 \cdot \overline{f}_{2,1}\,.$$

4.2.1. Замкнутость проективных морфизмов. Проективные многообразия занимают в алгебраической геометрии примерно такое же место, как компактные многообразия в дифференциальной геометрии.

Лемма 4.2
Проекция $\pi : \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ *замкнута*, т. е. переводит замкнутые множества в замкнутые.

Доказательство. Зафиксируем однородные координаты x на $\mathbb{P}_m$ и аффинные координаты t на $\mathbb{A}^n$. Замкнутое подмножество $X \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$ задаётся системой однородных по x полиномиальных уравнений $f_\nu(x,t) = 0$. Его образ $\pi(X) \subset \mathbb{A}^n$ состоит из всех точек p, при подстановке которых в эти уравнения вместо t получается обладающая ненулевым решением система однородных уравнений $f_\nu(x,p) = 0$ на x. Это означает, что полиномиально зависящие от p коэффициенты форм $f_\nu(x,p)$ удовлетворяют системе полиномиальных результантных уравнений[1]. Таким образом, $\pi(X)$ задаётся полиномиальными уравнениями. □

Следствие 4.1
Если многообразие X проективно, то для любого многообразия Y проекция $\pi : X \times Y \twoheadrightarrow Y$ замкнута.

Доказательство. Утверждение можно доказывать отдельно для каждой аффинной карты многообразия Y, т. е. мы можем считать Y аффинным. Тогда $X \times Y$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$, и проекция π получается ограничением замкнутой проекции $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ на замкнутое подмножество $X \times Y \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$. □

Следствие 4.2
Если X проективно, а Y отделимо, то любой морфизм $\varphi : X \to Y$ замкнут.

Доказательство. Если Y отделимо, график $\Gamma_\varphi \overset{\text{def}}{=} \{(x, \varphi(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ отображения φ замкнут в $X \times Y$, поскольку является прообразом диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ при отображении $\varphi \times \mathrm{Id}_Y : X \times Y \to Y \times Y$. Образ $\varphi(Z) \subset Y$ любого подмножества $Z \subset X$ совпадает с образом пересечения $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y) \subset X \times Y$ при проекции $X \times Y \twoheadrightarrow Y$. Если Z замкнуто в X, произведение $Z \times Y$ замкнуто в $X \times Y$. Если X проективно, проекция $X \times Y \twoheadrightarrow Y$ замкнута и переводит замкнутое множество $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y) \subset X \times Y$ в замкнутое множество $\varphi(Z) \subset Y$. □

Следствие 4.3
Любое регулярное отображение из связного проективного многообразия X в аффинное многообразие стягивает X в одну точку. В частности, $\mathcal{O}_X(X) = \Bbbk$.

[1] См. n° 3.1.7 на стр. 54.

Доказательство. Беря композицию такого отображения с координатными функциями на аффинном многообразии, мы заключаем, что достаточно доказать утверждение для любого регулярного морфизма $\varphi : X \to \mathbb{A}^1$. Композиция φ с последующим вложением $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_1$ в качестве стандартной аффинной карты является регулярном и не сюрьективным отображением $X \to \mathbb{P}_1$. Так как его образ замкнут и связен, он состоит из одной точки. □

4.2.2. Конечные проекции. Регулярное отображение алгебраических многообразий

$$\varphi : X \to Y$$

называется *конечным*, если прообраз $W = \varphi^{-1}(U)$ любой аффинной карты $U \subset Y$ является аффинной картой на X, и ограничение $\varphi_W : W \to U$ является конечным морфизмом аффинных многообразий в смысле n° 3.5.3 на стр. 68. Из предл. 3.8 на стр. 68 следует, что каждый конечный морфизм замкнут, и его ограничение на любое замкнутое подмногообразие $Z \subset X$ также является конечным морфизмом. Более того, если X неприводимо, то собственные замкнутые подмножества многообразия X переводятся конечным морфизмом в *собственные* замкнутые подмножества в Y.

Упражнение 4.8. Проверьте, что композиция конечных морфизмов конечна.

Предложение 4.1
Проекция любого проективного многообразия $X \subsetneq \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \notin X$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ является конечным морфизмом.

Доказательство. Рассмотрим аффинную карту $U \subset H$ и выберем на $\mathbb{P}_n$ однородные координаты $(x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n)$ так, что $p = (1 : 0 : \ \dots \ : 0)$, гиперплоскость $H = V(x_0)$ состоит из точек $q = (0 : q_1 : \dots : q_n)$, а карта $U \subset H$ — из точек $u = (0 : u_1 : \dots : u_{n-1} : 1)$. Пусть X задаётся в этих координатах системой однородных уравнений $f_\nu(x) = 0$. Поскольку $p \notin X$, прообраз $Y = \pi_p^{-1}(U) \subset X$ высекается из X проколотым конусом C над U, который образован всеми прямыми $(pu) \subset \mathbb{P}_n$ с выколотой точкой[1] p. Конус C является является аффинным алгебраическим многообразием, изоморфным аффинному пространству $\mathbb{A}^n = U \times \mathbb{A}^1$. Изоморфизм переводит точку $(u, t) \in U \times \mathbb{A}_1$ в точку $x = tp + u \in \mathbb{P}_n$. Пересечение $Y = C \cap X$ задаётся в координатах (u, t) уравнениями

$$f_\nu(tp + u) = \alpha_0^{(\nu)}(u)\,t^m + \alpha_1^{(\nu)}(u)\,t^{m-1} + \dots + \alpha_m^{(\nu)}(u) = 0\,, \tag{4-5}$$

и, тем самым, является аффинным алгебраическим многообразием. Покажем, что его координатная алгебра $\Bbbk[Y] = \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_{n-1}]/I$, где идеал I порождается многочленами $f_\nu(tp+u)$ из уравнений (4-5), цела над $\Bbbk[U] = \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_{n-1}]$. Для этого достаточно найти в идеале I приведённый многочлен от t с коэффициентами из $\Bbbk[U]$ — тогда класс $t \pmod I$, являющийся его корнем, будет цел над $\Bbbk[U]$. Наличие в идеале I такого многочлена равносильно тому, что идеал, порождённый в $\Bbbk[U]$ старшими коэффициентами $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ всех уравнений (4-5), содержит единицу, что по теореме Гильберта означает отсутствие у многочленов $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ общих нулей в U. Но если такой общий нуль u_0 имеется, то однородные версии уравнений (4-5)

$$f_\nu(\vartheta_0\, p + \vartheta_1\, u_0) = \alpha_0^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^m + \alpha_1^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^{m-1}\vartheta_1 + \dots + \alpha_m^{(\nu)}(u_0)\vartheta_1^m = 0\,,$$

[1] Т. е. аффинными прямыми $u + pt$, $t \in \Bbbk$.

получающиеся ограничением задающих X уравнений на проективную прямую (p, u_0), имеют на этой прямой общий корень $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (1 : 0)$, находящийся в самой точке p, что противоречит условию $p \notin X$. □

Следствие 4.4
Каждое проективное многообразие допускает конечный сюрьективный морфизм на проективное пространство. □

Следствие 4.5
Каждое аффинное многообразие X допускает конечный сюрьективный морфизм на аффинное пространство.

Доказательство. Пусть $X \subsetneq \mathbb{A}^n$, где $\mathbb{A}^n$ вложено в $\mathbb{P}_n$ как стандартная карта U_0. Положим $H_\infty \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}_n \smallsetminus U_0$ и обозначим через $\overline{X} \subset \mathbb{P}_n$ проективное замыкание аффинного многообразия X. Проекция $\overline{X}$ из любой точки $p \in H_\infty \smallsetminus \overline{X}$ на любую гиперплоскость $L \not\ni p$ выглядит в аффинной карте U_0 как параллельная проекция многообразия $X = \overline{X} \smallsetminus H_\infty$ на гиперплоскость $U_0 \cap L = L \smallsetminus H_\infty$ в направлении вектора p и по предл. 4.1 является конечным морфизмом аффинных многообразий. Если он не сюрьективен, повторяем процедуру. □

Упражнение 4.9. Убедитесь, что если $X \neq \mathbb{A}^n$, то $\overline{X} \cap H_\infty \neq H_\infty$.

Пример 4.8 (нормализация Нётер)
Рассмотрим аффинную гиперповерхность $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$, заданную многочленом

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_d \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n],$$

где каждое слагаемое f_k однородно степени k. Замыкание $\overline{X}$ в проективном пространстве $\mathbb{P}_n$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, куда $\mathbb{A}^n$ вложено в качестве стандартной карты U_0, задаётся однородным многочленом

$$\overline{f} = f_0 x_0^d + f_1 x_0^{d-1} + \dots + f_{d-1} x_0 + f_d .$$

Бесконечно удалённая точка $p = (0 : p_1 : p_2 : \dots : p_n)$ не лежит на $\overline{X}$, если и только если $f_d(p_1, p_2, \dots, p_n) \neq 0$. Над *любым* бесконечным полем $\Bbbk$ такая точка существует. Изменяя при необходимости нумерацию координат, мы можем считать, что $p = (0, p_1, \dots, p_{n-1}, -1)$. Проекция из такой точки на гиперплоскость $x_n = 0$ выглядит в $\mathbb{A}^n$ как параллельная проекция $\pi_p : X \to \mathbb{A}^{n-1}$ вдоль вектора $p = (p_1, \dots, p_{n-1}, 1)$ и действует по формуле

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(x_1 - p_1 x_n,\, x_2 - p_2 x_n,\, \dots,\, x_{n-1} - p_{n-1} x_n,\, 0\right) .$$

Её гомоморфизм подъёма $\pi_p^* : \Bbbk[t_1, t_2, \dots, t_{n-1}] \to \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/(f)$ переводит t_i в $x_i - p_i x_n$. Подставляя $x_i = t_i + p_i x_n$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ в уравнение $f = 0$ получаем полиномиальное уравнение на x_n с коэффициентами в $\Bbbk[t_1, t_2, \dots, t_{n-1}]$ и ненулевым старшим коэффициентом $f_d(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \Bbbk$. Таким образом x_n, а с ним и все остальные $x_i = t_i + p_i x_n$, целы над $\Bbbk[\mathbb{A}^{n-1}]$. Таким образом, параллельная проекция гиперповерхности $V(f)$ в любом неасимптотическом направлении на трансверсальную этому направлению гиперплоскость конечна (над любым бесконечным полем) и сюрьективна (над алгебраически замкнутым полем). Этот факт известен как *лемма Нётер о нормализации*. Из него, в частности, вытекает, что $\operatorname{tr}\deg_{\Bbbk} \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/(f) = n - 1$.

4.3. Размерность. Максимальное число $n \in \mathbb{N}$, для которого существует цепочка таких неприводимых замкнутых подмногообразий $X_1, X_2, \dots, X_n \subset X$, что

$$X_0 = \{x\} \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n \subset X, \tag{4-6}$$

называется *размерностью* алгебраического многообразия X в точке $x \in X$ и обозначается $\dim_x X$. Если многообразие X само неприводимо, то с неизбежностью $X_n = X$ в любой максимальной цепочке (4-6). Если многообразие X приводимо, размерность $\dim_x X$ равна максимальной из размерностей всех проходящих через точку x неприводимых компонент многообразия X.

Упражнение 4.10. Покажите, что $\dim_x X = \dim_x U$ для любой аффинной окрестности U точки x.

Предложение 4.2

Для любого конечного морфизма неприводимых алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ в каждой точке $x \in X$ выполняется неравенство $\dim_x X \leqslant \dim_{\varphi(x)} Y$, равенство в котором равносильно сюрьективности морфизма φ.

Доказательство. В силу упр. 4.10 можно считать X и Y аффинными. Каждая цепочка (4-6) в X по предл. 3.8 на стр. 68 порождает цепочку строго вложенных друг в друга замкнутых неприводимых подмногообразий $\varphi(X_i)$ в Y. Отсюда вытекает требуемое неравенство, и при $\varphi(X) \neq Y$ оно строгое. Если $\varphi(X) = Y$, то для любой цепочки $Y_0 = \{\varphi(x)\} \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_m = Y$ при каждом i многообразие $\varphi^{-1}(Y_i) \subset X$ имеет неприводимую компоненту X_i сюрьективно отображающуюся на[1] Y_i, и из них составляется цепочка вида (4-6) в X. Это даёт противоположное неравенство $\dim_x X \geqslant \dim_{\varphi(x)} Y$. □

Следствие 4.6

Размерность аффинного пространства $\dim_x \mathbb{A}^n = n$ в любой точке $x \in \mathbb{A}^n$.

Доказательство. Неравенство $\dim_x \mathbb{A}^n \geqslant n$ выполняется, поскольку в $\mathbb{A}^n$ имеется цепочка (4-6), образованная проходящими через x аффинными подпространствами. Противоположное неравенство доказывается по индукции. Очевидно, что $\dim \mathbb{A}^0 = 0$. Пусть $\dim \mathbb{A}^k = k$ для всех $k < n$. Поскольку последний отличный от $\mathbb{A}_n$ элемент X_{m-1} любой цепочки $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{m-1} \subsetneq X_m = \mathbb{A}^n$ допускает конечную сюрьекцию на аффинное подпространство $\mathbb{A}^k \subset \mathbb{A}^n$ с $k < n$, из предл. 4.2 вытекает неравенство $\dim X_{m-1} < n$, из которого вытекает, что $m \leqslant n$. □

Следствие 4.7

Пусть X — неприводимое аффинное многообразие, и $\varphi : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ — конечный сюрьективный морфизм. Тогда $\dim_x X = m$ в каждой точке $x \in X$, и число m не зависит от выбора φ. □

Следствие 4.8

Размерность аффинного неприводимого многообразия X равна степени трансцендентности[2] алгебры $\Bbbk[X]$ над $\Bbbk$.

[1] Иначе Y_i окажется объединением конечного числа собственных замкнутых подмножеств — образов неприводимых компонент прообраза $\varphi^{-1}(Y_i) \subset X$.

[2] См. опр. 3.2 на стр. 51.

Доказательство. Гомоморфизм подъёма конечной сюрьекции $\pi : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ задаёт целое расширение $\pi^* : \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m] \hookrightarrow \Bbbk[X]$. Следовательно алгебраически независимые функции $\pi^* u_i$ образуют базис трансцендентности алгебры $\Bbbk[X]$ над $\Bbbk$. □

Упражнение 4.11. Докажите, что $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ для любых неприводимых многообразий X, Y.

4.3.1. Размерности подмногообразий. Если функция $f \in \Bbbk[X]$ тождественно обращается в ноль на одной из проходящих через точку $x \in X$ неприводимых компонент размерности $\dim_x X$ многообразия X, гиперповерхность $V(f) \subset X$ имеет в точке x ту же размерность, что и объемлющее многообразие X. Но такое бывает, только если f делит нуль в $\Bbbk[X]$.

Предложение 4.3
Для любой ненулевой регулярной функции $f \in \Bbbk[X]$ на неприводимом аффинном многообразии X в каждой точке $p \in V(f)$ выполняется неравенство $\dim_p V(f) = \dim_p(X) - 1$.

Доказательство. Случай $X = \mathbb{A}^n$ уже был разобран в прим. 4.8. Общий случай сводится к нему при помощи рассуждения, аналогичного тому, что использовалось в доказательстве предл. 3.9 на стр. 69. Зафиксируем конечную сюрьекцию $\pi : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ и рассмотрим отображение

$$\varphi = \pi \times f : X \to \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1, \quad x \mapsto \big(\pi(x), f(x)\big).$$

В предл. 3.9 мы видели, что оно конечно и сюрьективно отображает X на аффинную гиперповерхность $V(\mu_f) \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$ — множество нулей минимального многочлена

$$\mu_f(u, t) = t^n + \alpha_1(u) t^{n-1} + \cdots + \alpha_n(u) \in \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m][t]$$

функции f над полем $\Bbbk(\mathbb{A}^m)$. Гиперповерхность $V(f) \subset X$ отображается морфизмом φ в пересечение гиперповерхности $V(\mu_f)$ с аффинной гиперплоскостью $t = 0$, внутри которой это пересечение задаётся уравнением $\alpha_n(u) = 0$, т. е. является аффинной гиперповерхностью $V(\alpha_n) \subset \mathbb{A}^m$ размерности $m - 1$. По предл. 4.2 $\dim V(f) = \dim V(\alpha_n) = m - 1 = \dim X - 1$. □

Следствие 4.9
Для любых функций $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$ на аффинном многообразии X в каждой точке $p \in V(f_1, f_2, \dots, f_m)$ выполнятся неравенство

$$\dim_p V(f_1, f_2, \dots, f_m) \geqslant \dim_p(X) - m.$$

Если при каждом i класс функции f_i не делит нуль в фактор кольце[1] $\Bbbk[X]/(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$. □

Предостережение 4.1. Ни предл. 4.3, ни сл. 4.9 не утверждают, что гиперповерхность $V(f)$ или подмногообразие $V(f_1, f_2, \dots, f_m)$ непусты. Оба утверждения формально верны и для пустых гиперповерхности и/или подмногообразия. По слабой теореме Гильберта о нулях $V(f_1, f_2, \dots, f_m) = \varnothing$, если и только если при некотором i класс f_i в $\Bbbk[X]/(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$ равен ненулевой константе. И такое вполне случается, например, $V(1) = \varnothing$ на любом многообразии X, и $V(x, x+1) = \varnothing$ на плоскости $\mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec}_m \Bbbk[x, y]$. Это предупреждение относится и к следующему предложению.

[1] При $i = 1$ это условие означает, что f_1 не делит нуль в $\Bbbk[X]$. Последовательности функций $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$, обладающие указанным в следствии свойством, называются *регулярными*.

Предложение 4.4
Для любых аффинных многообразий $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}^n$ в каждой точке $x \in X_1 \cap X_2$ выполняется неравенство $\dim_x(X_1 \cap X_2) \geqslant \dim_x(X_1) + \dim_x(X_2) - n$.

Доказательство. Пусть $\varphi_1 : X_1 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ и $\varphi_2 : X_2 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ — замкнутые вложения. Тогда $X_1 \cap X_2$ является прообразом диагонали $\Delta \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ при отображении $\varphi_1 \times \varphi_2 : X_1 \times X_2 \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Внутри $X_1 \times X_2$ он задаётся n уравнениями $(\varphi_1 \times \varphi_2)^*(x_i) = (\varphi_1 \times \varphi_2)^*(y_i)$, которые являются поднятиями линейных уравнений $x_i = y_i$, задающих диагональ Δ в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Остаётся применить сл. 4.9. □

Предложение 4.5
Если размерности неприводимых проективных многообразий $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ удовлетворяют неравенству $\dim(X_1) + \dim(X_2) \geqslant n$, то $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.

Доказательство. Для неприводимого проективного многообразия $Z \subset \mathbb{P}(V)$ обозначим через $Z' \subset \mathbb{A}(V)$ аффинный конус над Z, задаваемый теми же самими однородными уравнениями, что и Z, но только теперь в аффинном пространстве. Он содержит начало координат $O \in \mathbb{A}^{n+1}$ и имеет размерность $\dim_O Z' \geqslant \dim Z + 1$, так как любая цепочка $\{z\} \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_m = Z$ в проективном многообразии порождает в аффинном конусе цепочку $\{O\} \subsetneq (O, z) \subsetneq Z_1' \subsetneq \cdots \subsetneq Z_m' = Z'$, первыми элементами которой служат начало координат O и прямая (O, z). По предл. 4.4 для аффинных конусов $X_1', X_2' \subset \mathbb{A}^{n+1}$ выполняются неравенства

$$\dim_O(X_1' \cap X_2') \geqslant \dim_O(X_1') + \dim_O(X_2') - n - 1 \geqslant \dim(X_1) + \dim_O(X_2) - n + 1 \geqslant 1 .$$

Поэтому $X_1' \cap X_2''$ не исчерпывается одной только точкой O. □

4.3.2. Размерности слоёв регулярных морфизмов. В алгебраической геометрии размерность прообраза при регулярном отображении контролируется почти столь же жёстко, как в линейной алгебре.

Теорема 4.1
Для любого доминантного морфизма $\varphi : X \to Y$ неприводимых алгебраических многообразий в каждой точке $x \in X$ выполняется неравенство $\dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant \dim X - \dim Y$, причём существует такое плотное открытое подмножество $U \subset Y$, что для всех $y \in U$ и $x \in \varphi^{-1}(y)$ имеет место равенство $\dim_x \varphi^{-1}(y) = \dim_x X - \dim_y Y$.

Доказательство. Беря композицию φ с конечным сюрьективным морфизмом какой-нибудь аффинной окрестности точки $\varphi(x)$ на аффинное пространство $\mathbb{A}^m$ и заменяя X прообразом этой окрестности, мы сводим первое утверждение теоремы к случаю

$$Y = \mathbb{A}^m = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m], \quad \varphi(x) = 0 .$$

Заменяя X аффинной окрестностью точки x, мы можем считать X аффинным. В этом случае $\varphi^{-1}(0)$ является непустым пересечением m гиперповерхностей $V(\varphi^*(u_i)) \subset X$, и требуемое неравенство вытекает из сл. 4.9. В доказательстве второго утверждения мы также можем считать оба многообразия аффинными. Более того, по форм. (упр. 3.29) на стр. 68 можно считать X замкнутым подмногообразием в $Y \times \mathbb{A}^m$, а морфизм $\varphi : X \to Y$ ограничением проекции $\pi : Y \times \mathbb{A}^m \twoheadrightarrow Y$. Мы собираемся применить к слоям этой проекции сл. 4.5. Для этого рассмотрим проективное замыкание $\overline{X} \subset Y \times \mathbb{P}_m$ и выберем в одном из слоёв проекции $\overline{\pi} : Y \times \mathbb{P}_m \twoheadrightarrow Y$

не лежащую на $\overline{X}$ точку $p \in \mathbb{P}_m \smallsetminus \mathbb{A}^m$ и любую гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}_m$, не проходящую через p. Проекция из p на H является конечным морфизмом во всех слоях, где точка p не лежит в $\overline{X}$. Пересечение $(Y \times \{p\}) \cap \overline{X}$ является собственным замкнутым подмножеством в $\overline{X}$, а его образ при проекции $\overline{\pi}$ — собственным замкнутым подмножеством в Y. Над каждой точкой y из дополнительного к $\overline{\pi}\big((Y \times \{p\}) \cap \overline{X}\big)$ плотного открытого подмножества $U \subset Y$ проекция из p на H конечна. Заменяя Y на любое содержащееся в U главное открытое подмножество (также являющееся аффинным алгебраическим многообразием), мы можем, как в сл. 4.5, конечно спроектировать $X \subset Y \times \mathbb{A}^m$ на аффинную гиперплоскость $Y \times \mathbb{A}^{m-1} \subset Y \times \mathbb{A}^m$. Повторяя эту конструкцию, мы получим конечную сюрьекцию $\psi : X \twoheadrightarrow Y \times \mathbb{A}^n$, ограничение которого на каждый слой $\varphi^{-1}(y)$ является конечным сюрьективным морфизмом $\varphi^{-1}(y) \twoheadrightarrow \{y\} \times \mathbb{A}^n$. Конечность ψ влечёт равенство $n = \dim X - \dim Y$, а конечность его ограничений на слои — равенство $\dim_x \varphi^{-1}(y) = n$. □

Следствие 4.10 (теорема о полунепрерывности размерностей слоёв)
Для любого морфизма алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ и каждого $k \in \mathbb{Z}$ множество

$$X_k \overset{\text{def}}{=} \{\, x \in X \mid \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant k \,\}$$

замкнуто в X.

Доказательство. Если $\dim Y = 0$, то теорема тривиально верна для всех X и k. Пусть теперь $\dim Y = m$ и для всех Y меньшей размерности теорема верна для всех X и k. Покажем, что она верна для Y. Можно считать X и Y неприводимыми. Если $k \leqslant \dim(X) - \dim(Y)$, то $X_k = X$ по теор. 4.1. Для $k > \dim(X) - \dim(Y)$ заменим Y на $Y' = Y \smallsetminus U$, где U взято из теор. 4.1, а X — на $X' = \varphi^{-1}(Y')$. Тогда $\dim Y' < \dim Y$, и множество $X_k \subset X'$ замкнуто по индуктивному предположению. □

Следствие 4.11
Для любого замкнутого морфизма алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ и каждого $k \in \mathbb{Z}$ множество $Y_k \overset{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geqslant k\}$ замкнуто в Y.

Теорема 4.2 (размерностный критерий неприводимости)
Если замкнутый регулярный морфизм $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ сюрьективен, а все его слои неприводимы и имеют одинаковые размерности, то неприводимость Y влечёт неприводимость X.

Доказательство. Пусть $X = X_1 \cup X_2$, где X_1, X_2 замкнуты. Положим $Y_i \overset{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_i\}$, где $i = 1, 2$. Так как каждый слой φ, будучи неприводимым, целиком содержится либо в X_1, либо в X_2, мы заключаем, что $Y = Y_1 \cup Y_2$, и если $X_i \neq X$, то и $Y_i \neq Y$. Поскольку множество Y_i состоит из всех таких точек в Y, над которыми слой отображения $\varphi|_{X_i} : X_i \to Y$ имеет максимальную из достигаемых слоями этого отображения размерностей, множество Y_i замкнуто по сл. 4.11. Тем самым, приводимость X влечёт приводимость Y. □

4.4. Размерности проективных многообразий. Согласно предл. 4.5, каждое d-мерное неприводимое многообразие $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ пересекается со всеми проективными подпространствами $H \subset \mathbb{P}_n$ размерности $\dim H \geqslant n - d$. Покажем, что общее подпространство H коразмерности $d + 1$ не пересекается с X, и тем самым, размерность неприводимого проективного многообразия равна наибольшему такому числу d, что X пересекается со всеми проективными подпространствами коразмерности d.

Проективные подпространства $H \subset \mathbb{P}(V)$ размерности $n-d-1$ являются точками грассманиана $\mathrm{Gr}(n-d, n+1) = \mathrm{Gr}(n-d, V)$. Рассмотрим многообразие инцидентности

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, H) \in X \times \mathrm{Gr}(n-d, V) \mid x \in H\}. \tag{4-7}$$

Упражнение 4.12. Убедитесь, что Γ является проективным алгебраическим многообразием.

Проекция $\pi_1 : \Gamma \twoheadrightarrow X$ сюрьективна, и её слой над каждой точкой x состоит из всех проходящих через x проективных подпространств размерности $n-d-1$. Такие подпространства образуют грассманиан $\mathrm{Gr}(n-d-1, n) = \mathrm{Gr}(n-d-1, V/\Bbbk \cdot x)$ всех векторных $(n-d-1)$-мерных подпространств в фактор пространстве $V/\Bbbk \cdot x$. По теор. 4.2 многообразие Γ неприводимо и имеет размерность $d + (n-d-1)(d+1) = (n-d)(d+1) - 1$. Образ $\pi_2(\Gamma) \subset \mathrm{Gr}(n-d, V)$ второй проекции $\pi_2 : \Gamma \to \mathrm{Gr}(n-d, V)$ состоит из всех $(n-d-1)$-мерных подпространств, пересекающих X. Это неприводимое замкнутое подмногообразие размерности, не превышающей $\dim \Gamma$ и, тем самым, строго меньшей, чем $\dim \mathrm{Gr}(n-d, V) = (n-d)(d+1)$. Поэтому множество не пересекающих X $(n-d-1)$-мерных подпространств содержит в себе открытое по Зарисскому всюду плотное подмножество грассманиана $\dim \mathrm{Gr}(n-d, V)$.

Соображения размерности позволяют сказать и больше. Повторяя предыдущее рассуждение для $(n-d)$-мерных подпространств H' вместо $(n-d-1)$-мерных, мы получим неприводимое проективное многообразие

$$\Gamma' \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, H') \in X \times \mathrm{Gr}(n-d+1, V) \mid x \in H\}$$

размерности $\dim X + \dim \mathrm{Gr}(n-d, n) = d + d(n-d) = d(n-d+1)$. Так как $X \cap H' \neq \varnothing$ для всех H', проекция $\pi_2 : \Gamma' \twoheadrightarrow \mathrm{Gr}(n-d+1, V)$ эпиморфна, и её *общий слой*[1] имеет по теор. 4.1 размерность $\dim \Gamma - \dim \mathrm{Gr}(n-d+1, n+1) = d(n-d+1) - (n-d+1)d = 0$. Это означает, что *общее подпространство H' коразмерности d пересекает X по конечному числу точек*.

Беря одну из таких плоскостей H' и проводя внутри неё $(n-d-1)$-мерную плоскость H через одну из точек пересечения $p \in X \cap H'$, мы видим, что $H \cap X$ конечно и непусто. Это означает, что у проекции $\pi_2 : \Gamma \to \mathrm{Gr}(n-d, V)$ первого многообразия инцидентности (4-7) имеется нульмерный слой. Тем самым, минимальная размерность непустого слоя этой проекции нулевая, откуда по теор. 4.1 вытекает, что $\dim \pi_2(\Gamma) = \dim \Gamma = \dim \mathrm{Gr}(n-d, V) - 1$, т. е. *пересекающие X подпространства размерности $(n-d-1)$ образуют неприводимую гиперповерхность*[2] в грассманиане $\mathrm{Gr}(n-d, n+1)$.

Упражнение 4.13. Выведите отсюда, что существует неприводимый многочлен от плюккеровых координат $(n-d-1)$-мерного подпространства в $\mathbb{P}_n$, обращение которого в нуль на данном подпространстве H равносильно тому, что $H \cap X \neq \varnothing$.

Проделанные рассуждения иллюстрируют стандартный метод подсчёта размерностей при помощи многообразий инцидентности, часто используемый в геометрии.

Пример 4.9 (результант)

Фиксируем $(n+1)$ степеней $d_0, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$ и обозначим через $\mathbb{P}_{N_i} = \mathbb{P}\left(S^{d_i} V^*\right)$ пространство проективных гиперповерхностей степени d_i в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, как в n° 3.1.7 на стр. 54. Покажем, что результантное многообразие системы из $(n+1)$ однородных полиномиальных уравнений на $n+1$ неизвестных $\mathcal{R} = \{(S_0, S_1, \dots, S_n) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \mid \cap S_i \neq \varnothing\}$ является неприводимой гиперповерхностью[3] в $\mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$, т. е. существует такой (единственный с

[1] Т. е. слой над любой точкой из некоторого плотного открытого подмножества в грассманиане.

[2] т. е. подмногообразие коразмерности 1

[3] т. е.

точностью до пропорциональности) неприводимый многочлен от коэффициентов уравнений системы, однородный по коэффициентам каждого уравнения, что его обращение в нуль на наборе многочленов $f_0, f_1, \dots, f_n$ равносильно существованию ненулевого решения у системы полиномиальных уравнений $f_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Этот многочлен называется *результантом* системы однородных полиномиальных уравнений степеней $d_0, d_1, \dots, d_n$ на $n+1$ переменных. Рассмотрим многообразие инцидентности

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{(S_1, S_2, \dots, S_n, p) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \times \mathbb{P}_n \mid p \in \cap S_i\}.$$

Упражнение 4.14. Убедитесь, что G является проективным алгебраическим многообразием.

Поскольку уравнение $f(p) = 0$ линейно по f, проективные гиперповерхности степени d_i, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_n$, образуют гиперплоскость в пространстве $\mathbb{P}_{N_i}$. Поэтому проекция $\pi_2 : \Gamma \twoheadrightarrow \mathbb{P}_n$ сюрьективна, а все её слои являются произведениями проективных гиперплоскостей и имеют одинаковую размерность $\sum(N_i - 1) = \sum N_i - n - 1$. Поэтому Γ является неприводимым проективным многообразием размерности $\sum N_i - 1$.

Упражнение 4.15. Предъявите в $\mathbb{P}_n$ набор из $n+1$ гиперповерхностей S_i заданных степеней d_i, пересекающихся ровно в одной точке.

Из упражнения вытекает, что у проекции $\pi_1 : \Gamma \to \mathbb{P}_{N_0} \times \mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$ имеется нульмерный слой. Поэтому общий непустой слой тоже нульмерен, и $\dim \pi_1(\Gamma) = \dim \Gamma$. Тем самым, $\pi_1(\Gamma)$ является неприводимой гиперповерхностью в $\mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$.

Упражнение 4.16. Покажите, что всякое неприводимое подмногообразие коразмерности 1 в произведении проективных пространств задаётся неприводимым многочленом от однородных координат, однородным по координатам каждого из проективных пространств.

Пример 4.10 (прямые на поверхностях в $\mathbb{P}_3$)

Поверхности заданной степени d в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ образуют проективное пространство $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^d V^*)$ размерности $N = \frac{1}{6}(d+1)(d+2)(d+3) - 1$. Прямые в $\mathbb{P}_3$ образуют грассманиан $\mathrm{Gr}(2,4) = \mathrm{Gr}(2, V)$, который мы отождествим с квадрикой Плюккера $P \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. Рассмотрим многообразие всех прямых, лежащих на поверхностях степени d

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{\, (S, \ell) \in \mathbb{P}_N \times P \mid \ \ell \subset S \,\} \subset \mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_5 .$$

Упражнение 4.17. Докажите, что Γ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_5$.

Проекция $\pi_2 : \Gamma \twoheadrightarrow Q_P$ сюрьективна, и все её слои являются проективными пространствами одинаковой размерности $\frac{1}{6}\, d(d+1)(d+5) - 1$. В самом деле, прямая $\ell \subset \mathbb{P}(V)$, заданная уравнениями $x_0 = x_1 = 0$, лежит на поверхности $f = 0$, если и только если $f = x_2 \cdot g(x) + x_3 \cdot h(x)$ для некоторых $g, h \in S^{d-1}V^*$. Такие многочлены f составляют образ линейного отображения

$$S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^* \to S^d V^* , \quad (g, h) \mapsto x_2 g + x_3 h ,$$

ядро которого состоит из всех таких (g, h), что $x_2 g = -x_3 h$. В силу факториальности кольца многочленов, последнее равенство равносильно тому, что $g = x_3 p$, $h = -x_2 p$ для некоторого $p \in S^{d-2}V^*$. Таким образом, ядро изоморфно $S^{d-2}V^*$, и значит, образ является векторным пространством размерности

$$2\ \dim(S^{d-1}V^*) - \dim(S^{d-1}V^*) = \frac{1}{6}\left(2d(d+1)(d+2) - (d-1)d(d+1)\right) = \frac{1}{6} d(d+1)(d+5) .$$

Согласно теор. 4.2, многообразие Γ неприводимо и $\dim \Gamma = \frac{1}{6}\,d(d+1)(d+5)+3$.

Образ проекции $\pi_1 : \Gamma \to \mathbb{P}_N$ состоит из поверхностей, содержащих хотя бы одну прямую. По сл. 4.2 на стр. 77 он является замкнутым неприводимым подмногообразием в $\mathbb{P}_N$, а его размерность равна разности $\dim \Gamma$ и минимальной из размерностей непустых слоёв проекции π_1. Поскольку $\dim \mathbb{P}_N - \dim \Gamma = \frac{1}{6}\left((d+1)(d+2)(d+3) - d(d+1)(d+5)\right) - 4 = d-3$, мы заключаем, что при $d \geqslant 4$ образ $\pi_1(\Gamma) \subset \mathbb{P}_N$ заведомо является собственным подмногообразием. Это означает, что на общей[1] поверхность степени $d \geqslant 4$ в $\mathbb{P}_3$ нет прямых.

Упражнение 4.18. Убедитесь, что на проективном замыкании аффинной кубической поверхности $xyz = 1$ лежат ровно три прямых.

Упражнение показывает, что при $d = 3$ у проекции $\pi_1 : \Gamma \to \mathbb{P}_N$ есть непустой нульмерный слой. Следовательно, $\dim \pi_1(\Gamma) = \dim \Gamma = N$, и из неприводимости $\pi_1(\Gamma)$ вытекает равенство $\pi_1(\Gamma) = \mathbb{P}_N$. Таким образом, каждая кубическая поверхность $S_3 \subset \mathbb{P}_3$ содержит хотя бы одну прямую, причём для общей кубики множество лежащих на ней прямых конечно.

Упражнение 4.19. Опишите все слои проекции $\pi_1 : \Gamma \to \mathbb{P}_N$ для $d = 2$.

Упражнение 4.20. Найдите все прямые на кубике Ферма $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$.

4.5. Отступление: 27 прямых на гладкой кубической поверхности. Рассмотрим гладкую[2] кубическую поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$, заданную уравнением $F(x) = 0$.

Лемма 4.3
Всякое приводимое плоское сечение S распадается либо в объединение прямой и гладкой коники, либо в объединение трёх различных прямых.

Доказательство. Предложение утверждает, что никакое плоское сечение $\pi \cap S$ не содержит двойной прямой. Допустим, что такая двойная прямая $\ell \subset \pi \cap S$ имеется. Выберем координаты так, чтобы плоскость π имела уравнение $x_2 = 0$, а прямая ℓ — уравнения $x_2 = x_3 = 0$. Тогда $F(x) = x_2 Q(x) + x_3^2 L(x)$ с линейным L и квадратичным Q. Обозначим через a одну из точек пересечения прямой ℓ с квадрикой $Q(x) = 0$. Тогда $x_2(a) = x_3(a) = Q(a) = 0$ и все частные производные $\partial F / \partial x_i$ равны нулю в точке a, т. е. кубика S особа в точке a. □

Следствие 4.12
В одной точке поверхности S может пересекаться не более трёх лежащих на S прямых, и в этом случае все три прямые лежат в одной плоскости.

Доказательство. Все проходящие через $p \in S$ прямые, лежащие на S, принадлежат $S \cap T_p S$. □

Лемма 4.4
Для каждой прямой $\ell \subset S$ существуют ровно 5 различных плоскостей $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_5$, содержащих ℓ и пересекающих S по тройке прямых $\pi_i \cap S = \ell \cup \ell_i \cup \ell_i'$. При этом $\ell_i \cap \ell_j = \ell_i \cap \ell_j' = \ell_i' \cap \ell_j' = \varnothing$ для всех $i \neq j$, и любая лежащая на S и не пересекающая ℓ прямая при каждом i пересекает ровно одну из двух прямых ℓ_i, ℓ_i'.

[1] Т. е. на любой из некоторого плотного по Зарисскому открытого подмножества в пространстве всех гиперповерхностей.

[2] См. n° 2.2.2 на стр. 29.

Доказательство. Рассмотрим такой базис $e_0, e_1, e_2, e_3 \in V$, что прямая $\ell = (e_0 e_1)$ задаётся уравнениями $x_2 = x_3 = 0$. Тогда задающий поверхность S многочлен F имеет вид

$$L_{00}(x_2, x_3) \cdot x_0^2 + 2\,L_{01}(x_2, x_3) \cdot x_0 x_1 + L_{11}(x_2, x_3) \cdot x_1^2 + \\ + 2\,Q_0(x_2, x_3) \cdot x_0 + 2\,Q_1(x_2, x_3) \cdot x_1 + R(x_2, x_3) = 0\,, \quad (4\text{-}8)$$

где $L_{ij}, Q_\nu, R \in k[x_2, x_3]$ являются однородными многочленами степеней 1, 2, 3 соответственно. Каждая содержащая прямую ℓ плоскость пересекает прямую $(e_2 e_3)$ в единственной точке $e_\vartheta = \vartheta_2 e_2 + \vartheta_3 e_3$. Обозначим такую плоскость через $\pi_\vartheta = (e_0 e_1 e_\vartheta)$ и будем использовать однородную координату $\vartheta = (\vartheta_2 : \vartheta_3) \in \mathbb{P}_1$ точки e_ϑ относительно базиса e_2, e_3 в качестве параметра в пучке плоскостей, проходящих через прямую ℓ. Обозначим через $(t_0 : t_1 : t_2)$ однородные координаты в плоскости π_ϑ относительно базиса e_0, e_1, e_ϑ. Прямая $\ell \subset \pi_\vartheta$ задаётся в этих координатах уравнением $t_2 = 0$, а уравнение плоской коники $\left(\pi_\vartheta \cap S\right) \smallsetminus \ell$ получается из уравнения (4-8) подстановкой $x = (t_0 : t_1 : \vartheta_2 t_2 : \vartheta_3 t_2)$ и сокращением общего множителя t_2 в левой части. Таким образом, матрица Грама этой коники равна

$$G = \begin{pmatrix} L_{00}(\vartheta) & L_{01}(\vartheta) & Q_0(\vartheta) \\ L_{01}(\vartheta) & L_{11}(\vartheta) & Q_1(\vartheta) \\ Q_0(\vartheta) & Q_1(\vartheta) & R(\vartheta) \end{pmatrix}$$

а её определитель $D(\vartheta) = \det G$ является однородным многочленом степени 5 от ϑ

$$D(\vartheta) = L_{00}(\vartheta) L_{11}(\vartheta) R(\vartheta) + 2\,L_{01}(\vartheta) Q_0(\vartheta) Q_1(\vartheta) - \\ - L_{11}(\vartheta) Q_0^2(\vartheta) - L_{00}(\vartheta) Q_1^2(\vartheta) - L_{01}(\vartheta)^2 R(\vartheta) \in \Bbbk[\vartheta_2, \vartheta_3]\,. \quad (4\text{-}9)$$

Он обращается в нуль в пяти точках $\vartheta \in \mathbb{P}_1$, учтённых с кратностями. Мы должны показать, что все эти кратности равны единице. Каждый нуль детерминанта (4-9) соответствует вырождению коники в пару прямых. Точка пересечения этих прямых либо лежит на ℓ, либо нет.

В первом случае выберем базис так, чтобы этими двумя прямыми были прямые $\ell' = (e_0 e_2)$ и $\ell'' = \bigl(e_0 (e_1 + e_2)\bigr)$, которые задаются уравнениями $x_3 = x_1 = 0$ и $x_3 = (x_1 - x_2) = 0$. Это вырождение происходит при $\vartheta = (1 : 0)$, и кратность этого корня равна наибольшей степени ϑ_3, на которую делится $D(\vartheta_2, \vartheta_3)$. Так как $\ell, \ell', \ell'' \subset S$, уравнение (4-8) имеет вид

$$x_1 x_2 (x_1 - x_2) + x_3 \cdot q(x) = 0$$

для некоторого квадратичного многочлена $q(x)$. Не делящимися на ϑ_3 элементами матрицы G могут быть лишь $L_{11} \equiv x_2 \pmod{\vartheta_3}$ и $Q_1 \equiv -x_2^2/2 \pmod{\vartheta_3}$, при условии, что мономы $x_1 x_2^2$ и $x_0^2 x_2$ входят в (4-8) с ненулевыми коэффициентами. Если это так, то

$$D(\vartheta_2, \vartheta_3) \equiv -L_{00} Q_1^2 \equiv \vartheta_3 \pmod{\vartheta_3^2}$$

имеет нужный порядок по ϑ_3. Поскольку моном $x_1 x_2^2$ является единственным, дающим ненулевой вклад в частные производные от F в точке $e_2 \in S$, а моном $x_0^2 x_2$ — единственным моном с ненулевым вкладом в частные производные от F в точке $e_0 \in S$.

Во втором случае выберем базис так, чтобы $\ell' = (e_0 e_2)$, $\ell'' = (e_1 e_2)$ задавались уравнениями $x_3 = x_1 = 0$ и $x_3 = x_0 = 0$. Это вырождение также происходит при $\vartheta = (1 : 0)$, а уравнение (4-8) имеет вид $x_0 x_1 x_2 + x_3 \cdot q(x) = 0$. Не делящимся на ϑ_3 элементом матрицы G является лишь $L_{01} \equiv x_2/2 \pmod{\vartheta_3}$, и определитель $D(\vartheta_2, \vartheta_3) \equiv -L_{01}^2 R \equiv \vartheta_3 \pmod{\vartheta_3^2}$ имеет первый порядок по ϑ_3.

Оставшиеся утверждения о пересечениях прямых вытекают из сл. 4.12, лем. 4.3 и того, что каждая прямая в $\mathbb{P}_3$ пересекает любую плоскость. □

Следствие 4.13
Любая гладкая кубическая поверхность содержит не пересекающиеся прямые. □

Лемма 4.5
Ни через какие четыре лежащие на поверхности S попарно не пересекающиеся прямые нельзя провести квадрику, и для любой такой четвёрки прямых существует по крайней мере одна, но не более двух лежащих на S прямых, пересекающих каждую прямую четвёрки.

Доказательство. Если заданные четыре попарно скрещивающиеся прямые на S лежат на квадрике Q, то Q это гладкая квадрика Сегре[1], заметаемая двумя семействами прямых, и все прямые четвёрки лежат в одном из этих двух семейств. Каждая прямая из другого семейства пересекает все четыре заданные прямые, и стало быть, лежит на кубической поверхности S, ибо всякая прямая, проходящая через 4 различных точки кубической поверхности обязана лежать на поверхности целиком. Следовательно $Q \subset S$, т. е. поверхность S приводима, а значит, особа. □

Теорема 4.3
Каждая гладкая кубическая поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$ содержит ровно 27 прямых, причём матрица их попарных пересечений[2] с точностью до нумерации прямых не зависит от поверхности.

Доказательство. Зафиксируем пару скрещивающихся прямых a, $b \subset S$ и построим 5 пар прямых ℓ_i, ℓ'_i, расположенных в проходящих через прямую a плоскостях согласно лем. 4.4, причём в каждой паре обозначим через ℓ_i ту прямую, которая пересекается с b, а через ℓ'_i — ту, что не пересекает. Далее, обозначим через ℓ''_i ещё 5 прямых, образующих вместе с прямыми ℓ_i пять пар прямых, расположенных согласно лем. 4.4 в плоскостях проходящих через прямую b. Таким образом, каждая из прямых ℓ''_i не пересекается ни с a, ни с прямым ℓ_j, у которых $j \neq i$, но пересекается с b и со всеми прямыми ℓ'_j, у которых $j \neq i$.

Любая прямая $c \subset S$, отличная от 17 перечисленных, не пересекает ни a, ни b, но при каждом i пересекает ровно одну из двух прямых ℓ_i, ℓ'_i. Из лем. 4.5 вытекает, что все лежащие на S прямые, пересекающие не менее четырёх прямых ℓ_i, исчерпываются парой прямых a, b. С другой стороны, если лежащая на S прямая c пересекает не более двух прямых ℓ_i, то с точностью до перестановки индексов, она пересекается с тремя прямыми ℓ'_1, ℓ'_2, ℓ'_3 и ещё либо с прямой ℓ'_4, либо с прямой ℓ_5. В обоих случаях по лем. 4.5 прямая c это одна из двух прямых a, ℓ''_5.

Таким образом, каждая прямая $c \subset S$, отличная от 17 прямых a, b, ℓ_i, ℓ'_i, ℓ''_i, пересекается в точности с тремя прямыми ℓ_i. Покажем, что на поверхности S есть ровно 10 таких прямых, и они биективно соответствуют $\binom{5}{3} = 10$ тройкам $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Для каждой тройки прямых ℓ_i имеется самое большее одна отличная от a прямая c, пересекающая все прямые из тройки и оставшиеся две прямые ℓ'_j. С другой стороны, по лем. 4.4 для каждого i на S лежит

[1] См. формулу (1-14) на стр. 19.

[2] Т. е. симметричная матрица размера 27×27, в позиции ij которой стоит нуль, если $\ell_i \cap \ell_j = \varnothing$, и единица, если $\ell_i \cap \ell_j \neq \varnothing$. При перенумерации прямых эта матрица сопрягается матрицей перестановки номеров.

ровно 10 прямых, пересекающих прямую ℓ_i. В их число входят 4 прямые a, b, ℓ_i', ℓ_i'', а оставшиеся 6 должны, как мы знаем, пересекать ещё ровно две из оставшихся четырёх прямых ℓ_j. Поскольку таких пар и имеется ровно $\binom{4}{2} = 6$, мы получаем нужную биекцию между прямыми c и тройками (i, j, k). □

Упражнение 4.21. Найдите порядок подгруппы $G \subset S_{27}$, состоящей из всех тех перестановок 27 прямых, которые сохраняют матрицу их попарных пересечений.

Упражнение 4.22. Напомню, что поле $\mathbb{F}_4 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ является квадратичным расширением поля $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2)$ и обладает автоморфизмом Фробениуса $z \mapsto \overline{z} \overset{\text{def}}{=} z^2$, который оставляет на месте подполе $\mathbb{F}_2$ и переставляет друг с другом корни многочлена[1] $x^2 + x + 1$. Покажите, что *проективная унитарная группа*[2] $\mathrm{PU}_4(\mathbb{F}_4)$ канонически вкладывается в группу G из упр. 4.21 в качестве нормальной подгруппы индекса 2.

[1] В этом смысле расширение $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_4$ аналогично расширению $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, в котором поле $\mathbb{C}$ определяется как $\mathbb{R}[\omega]$, где $\omega \in \mathbb{C}$ это нетривиальный кубический корень из единицы (он удовлетворяет уравнению $\omega^2 + \omega + 1 = 0$). Автоморфизм Фробениуса аналогичен комплексному сопряжению $\omega \mapsto \overline{\omega} = \omega^2$.

[2] Т. е. фактор *унитарной группы* $\mathrm{U}_4(\mathbb{F}_4) = \{M \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_4) \mid \overline{M}M^t = E\}$ по подгруппе скалярных унитарных матриц.

Упр. 4.1. Если $x_i x_j \neq 0$, то $t_{j,\nu} = x_\nu/x_j = \left(x_\nu : x_i\right) / \left(x_j : x_i\right) = t_{i,\nu}/t_{i,j}$ (при $\nu = i$ надо считать $t_{i,i} = 1$). Поэтому $\varphi_{ji}^* : t_{j,\nu} \mapsto t_{i,\nu}/t_{i,j}$. Обратный к φ_{ji}^* гомоморфизм $\Bbbk\left[\mathcal{D}\left(t_{i,j}\right)\right] \to \Bbbk\left[\mathcal{D}\left(t_{j,i}\right)\right]$ действует по той же формуле $t_j^{(i)} \mapsto 1/t_i^{(j)}$, $t_{i,\nu} \mapsto t_{j,\nu}/t_{j,i}$.

Упр. 4.2. В каждом таком W имеется единственный базис $w_1, w_2, \dots, w_k$, проектирующийся в стандартный базис $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ координатной k-плоскости. Матрица z, по строкам которой стоят координаты векторов w_i в стандартном базисе пространства $\Bbbk^m$, имеет $s_I(z) = E$. В GL_k-орбите каждой матрицы x im U_I также имеется единственная матрица z с $s_I(z) = E$ — именно, $z = s_I(x)^{-1} \cdot x$.

Упр. 4.3. Элементы $k \times m$-матрицы $s_J^{-1}\left(\varphi_I(t)\right) \cdot \varphi_I(t)$ являются рациональными функциями от элементов матрицы t со знаменателями $\det s_J\left(\varphi_I(t)\right)$ и, стало быть, регулярны в $\mathcal{D}\left(\det s_J\left(\varphi_I(t)\right)\right)$. Поэтому отображение φ_{JI}, переводящее эту матрицу в её $k \times (m-k)$-подматрицу, образованную столбцами с не лежащими в J номерами, регулярно. Обратное отображение задаётся той же формулой: $t \mapsto s_{\hat{I}}\left(s_I^{-1}\left(\varphi_J(t)\right) \cdot \varphi_J(t)\right)$ (удостоверьтесь в этом!).

Упр. 4.4. Это следует из определения локальной регулярной функции и **??** на стр. **??**.

Упр. 4.5. Отображение $\varkappa$ можно задать формулой $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1 x_2 : x_0 x_2 : x_0 x_1)$, из которой видно, что оно не определено только в точках $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ и образ $\varkappa$ тоже равен дополнению до этих трёх точек.

Упр. 4.6. В обозначения из прим. 4.1 на стр. 71 пересечение множества нулей однородного многочлена $\overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ со стандартной картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ задаётся в аффинных координатах t_i карты U_i полиномиальным уравнением

$$\overline{f}\left(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}\right) = 0\,.$$

Упр. 4.10. Пусть $X_1, X_2 \subset X$ — два замкнутых неприводимых подмножества и $U \subset X$ — открытое множество, такое что оба пересечения $X_1 \cap U$, $X_2 \cap U$ непусты. Тогда $X_1 = X_2 \iff X_1 \cap U = X_2 \cap U$, поскольку $X_i = \overline{X_i \cap U}$.

Упр. 4.11. Докажите, что произведение конечных сюрьекций $X \to \mathbb{A}^n$, $Y \to \mathbb{A}^m$ является конечной сюрьекцией $X \times Y \to \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$.

Упр. 4.12. Выберите в H какой-нибудь базис, запишите координаты векторов этого базиса и координаты точки p по строкам $(n-d+1) \times (n+1)$-матрицы. Условие $p \in H$ означает, что ранг этой матрицы равен $n-d$. Зануление всех миноров порядка $n-d+1$ является системой билинейных уравнений на плюккеровы координаты[1] подпространства H и однородные координаты точки p.

Упр. 4.14. Γ задаётся однородными по каждому f_i и по p уравнениями $f_0(p) = f_1(p) = \dots = f_n(p) = 0$.

Упр. 4.15. Возьмите $n+1$ гиперплоскостей, пересекающихся в одной точке, и возведите задающие их линейные формы в подходящие степени.

Упр. 4.17. Линейная оболочка векторов $u, w \in V$ является образом линейного отображения

$$V^* \to V\,, \quad \xi \mapsto \partial_\xi(u \wedge w) = \langle\, \xi\,,\, u \otimes w - w \otimes u\,\rangle\,.$$

[1] напомню, что плюккеровыми координатами подпространства являются старшие миноры матрицы, составленной из координат какого-нибудь базиса в этом подпространстве

Прямая $(uw) \subset \mathbb{P}_3$ лежит на поверхности $V(f) \subset \mathbb{P}_3$, если и только если $f\left(\partial_\xi(u \wedge w)\right) = 0$ для всех $\xi \in V^*$. Пусть векторы e_ν образуют базис в V, $u = \sum u_i e_i$, $v = \sum v_i e_i$, $\xi = \sum \xi_i e_i^*$. Тогда

$$u \wedge w = \sum_{i \neq j} p_{ij}\, e_i \wedge e_j\,, \quad \text{где} \quad p_{ij} = -p_{ji} = u_i v_j - u_j v_i$$

обозначают плюккеровы координаты на $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. Поскольку

$$\partial_\xi(u \wedge w) = \sum_k \sum_{i \neq j} \xi_k p_{ij} \frac{\partial}{\partial e_k}(e_i \wedge e_j) = \sum_k \Big(\sum_{i \neq j} p_{ij} \xi_k\Big) \cdot e_j\,,$$

подставляя $x_j = \sum_{i \neq j} p_{ij} \xi_i$ в $f(x)$ и приравнивая к нулю коэффициент при каждом мономе от ξ_j, получаем систему полиномиальных уравнений на коэффициенты многочлена f и плюккеровы координаты p_{ij}, описывающую Γ как замкнутое алгебраическое подмногообразие в $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_5$.

Упр. 4.18. В аффинной части прямых нет вообще, так как подставляя вместо (x, y, z) точку, бегущую по прямой с параметрическим уравнением $x = x_0 + \alpha\, t$, $y = y_0 + \beta\, t$, $z = z_0 + \gamma\, t$ получаем несовместную систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = 0 \\ \alpha\beta z_0 + \beta\gamma x_0 + \gamma\alpha y_0 = 0 \\ \alpha y_0 z_0 + \beta x_0 z_0 + \gamma x_0 y_0 = 0 \\ x_0 y_0 z_0 = 1 \end{cases}$$

(убедитесь в этом!). Пересечение поверхности с бесконечно удалённой гиперплоскостью задаётся уравнением $xyz = 3$ и является объединением трёх прямых.

Упр. 4.19. В этом случае $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2 V^*) = \mathbb{P}_5$ это пространство квадрик. Слой проекции $\pi_1 : \Gamma \to \mathbb{P}_5$ над каждой гладкой квадрикой является дизъюнктным объединением двух проективных прямых, слой над любой гладкой точкой гиперповерхности вырожденных квадрик $V(\det) \subset \mathbb{P}_5$ является одной проективной прямой, слой над парой пересекающихся плоскостей изоморфен дизъюнктному объединению двойственных плоскостей, а слой над двойной плоскостью — двойственной плоскости.

Упр. 4.20. С точностью до перенумерации координат, пара линейных уравнений, задающих прямую на кубике Ферма, приводится методом Гаусса к виду $x_0 = \alpha x_2 + \beta x_3$, $x_1 = \gamma x_2 + \delta x_3$. Подставьте эти значения в уравнение кубики, покажите, что $\alpha\beta\gamma\delta = 0$, а затем найдите их.

Упр. 4.21. Ответ: $|G| = 51\,840 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$

Упр. 4.22. Кубическая форма Ферма над $\mathbb{F}_4$ совпадает с эрмитовой формой $\sum x_i \overline{x}_i$. Поэтому кубика Ферма C_F из упр. 4.20 переводится в себя проективизированной унитарной группой $\mathrm{PU}_4(\mathbb{F}_4)$, отображающей прямые в прямые.