А. Л. Городенцев[1]

Геометрическое введение в алгебраическую геометрию

Цель этого курса — знакомство с классическими примерами проективных многообразий, геометрическими свойствами абстрактных алгебраических многообразий и морфизмов между ними, а также с современным языком схем. Курс задумывался одновременно и как трамплин для тех, кто собирается в дальнейшем посещать более продвинутые курсы и семинары по алгебраической геометрии, и как дайджест алгебраической геометрии, адресованный тем, кто специализируется в других областях, но хотел бы освоиться с языком алгебраической геометрии и её простейшими инструментами.

Москва
осень 2016

[1]факультет математики НИУ ВШЭ, Независимый Московский университет, группа математической физики ИТЭФ, e-mail:gorod@itep.ru , http://gorod.bogomolov-lab.ru

Оглавление

§1. Проективная геометрия

1.1. Соглашения об обозначениях. Всюду далее мы обозначаем через V векторное пространство над произвольным полем $\Bbbk$, а через V^* — двойственное пространство однородных линейных функций $V \to \Bbbk$. Значение ковектора $\varphi \in V^*$ на векторе $v \in V$ обозначается одним из трёх способов: $\varphi(v) = \langle\, \varphi\,,\, v\,\rangle = \mathrm{ev}_v(\xi)$. Через $e_0, e_1, \dots, e_n$ и $x_0, x_1, \dots, x_n$, где $n + 1 = \dim V$, по умолчанию обозначаются двойственные базисы пространств V и V^*, так что

$$\langle\, x_i\,,\, e_j\,\rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j\,. \end{cases}$$

Через $\mathbb{A}(V)$ мы обозначаем ассоциированное с V *аффинное пространство*[1]. Через

$$SV^* = \bigoplus_{d \geqslant 0} S^d V^* \simeq \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

обозначается *симметрическая алгебра* пространства V^*, изоморфная алгебре *многочленов* от переменных x_i. Она градуирована подпространствами $S^d V^* \subset SV^*$ *однородных* многочленов степени d, которые являются конечными линейными произведений $\varphi_1 \varphi_2 \,\dots\, \varphi_d$ с $\varphi_i \in V^*$.

1.2. Проективное пространство. Со всяким $(n+1)$-мерным векторным пространством V, помимо $(n+1)$-мерного аффинного пространства $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$, связано n-мерное *проективное пространство* $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, точками которого, по-определению, являются одномерные векторные подпространства в V, или, что то же самое, проходящие через начало координат аффинные прямые в $\mathbb{A}(V)$. Чтобы видеть их как «обычные» точки, внутрь $\mathbb{A}(V)$ следует поместить экран — не содержащую начала координат аффинную гиперплоскость $U_\xi \subset \mathbb{A}(V)$, задаваемую неоднородным линейным уравнением $\xi(x) = 1$, где $\xi \in V^*$ — любая ненулевая линейная форма на V (см. рис. 1◇1).

Упражнение 1.1. Убедитесь, что соответствие $\xi \mapsto U_\xi$ задаёт биекцию между ненулевыми ковекторами $\xi \in V^*$ и не проходящими через начало координат аффинными гиперплоскостями в $\mathbb{A}(V)$.

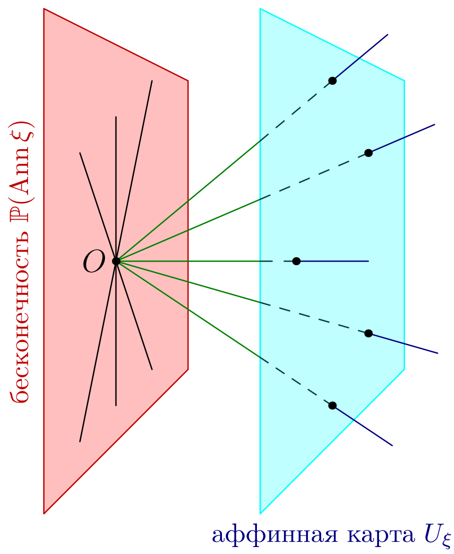


Рис. 1◇1. Проективный мир.

Всякий такого рода экран U_ξ называется *аффинной картой* на $\mathbb{P}(V)$. В карте U_ξ видны все одномерные подпространства, порождённые векторами $v \in V$ с $\xi(v) \neq 0$. Дополнение $\mathbb{P}_n \smallsetminus U_\xi$ состоит из одномерных подпространств n-мерного векторного подпространства $\mathrm{Ann}(\xi) = \{v \in V \mid \langle\, \xi\,,\, v\,\rangle = 0\}$ — проходящей через начало координат параллельной копии гиперплоскости U_ξ. Эти одномерные подпространства составляют $(n-1)$-мерное проективное пространство $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}\big(\mathrm{Ann}(\xi)\big)$, которое называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью* карты U_ξ. Точки $\mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,\xi)$ можно воспринимать как *направления* в аффинной карте U_ξ. Итак, n-мерное проективное пространство $\mathbb{P}_n$ раз-

[1] Его точки, по определению, взаимно однозначно соответствуют векторам из V, и их можно представлять себе как «концы» этих векторов, отложенных от отвечающей нулевому вектору точки $O \in \mathbb{A}(V)$

бивается в объединение непересекающихся аффинных пространств всех промежуточных размерностей:

$$\mathbb{P}_n = U_\xi \sqcup \mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,\xi) = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \cdots = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{A}^0$$

(где $\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}_0$ это одна точка).

Упражнение 1.2. Какое соотношение на q получится, если независимо подсчитать количества точек, из которых состоят левая и правая части этого разбиения над конечным полем из q элементов?

1.2.1. Глобальные однородные координаты. Ненулевые векторы

$$v = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{и} \quad w = (y_0, y_1, \ldots, y_n),$$

заданные строками своих координат в каком-нибудь базисе $e_0, e_1, \ldots, e_n$ пространства V, изображаются одной и той же точкой $p \in \mathbb{P}_n$, если и только если их координаты пропорциональны, что означает равенство отношений[1] $x_\mu : x_\nu = y_\mu : y_\nu$ для всех $0 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant n$. Таким образом, точке $p \in \mathbb{P}_n$ корректно соответствует не набор из $n+1$ координат, а набор из n отношений $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ между ними. Эти отношения называется *однородными координатами* точки p в базисе $e_0, e_1, \ldots, e_n$.

1.2.2. Локальные аффинные координаты. Рассмотрим на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинную карту $U_\xi = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}(V) \mid \xi(x) = 1\}$, отвечающую какому-нибудь ненулевому ковектору $\xi \in V^*$. Любые n ковекторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in V^*$, таких что $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ образуют базис в V^*, задают внутри карты U_ξ *локальные аффинные координаты*. А именно, если векторы $e_0, e_1, \ldots, e_m \in V$ составляют двойственный к $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ базис, то точка $e_0 \in U_\xi$ будет началом отсчёта аффинной координатной системы, а векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ будут базисными векторами в векторном пространстве $\mathrm{Ann}\,\xi$, с которым ассоциировано аффинное пространство U_ξ. Чтобы вычислить локальные аффинные координаты точки $p \in \mathbb{P}_n$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$, следует сначала выбрать в одномерном подпространстве, отвечающем точке p, вектор $v = p/\xi(p) \in U_\xi$, такой что $\xi(v) = 1$, а затем вычислить значения n линейных форм ξ_ν на этом векторе. Отметим, что получающиеся таким образом значения локальных аффинных координат $x_i(p) = \xi_i(v) = \xi_i(p)/\xi(p)$ *нелинейно* зависят от однородных координат точки p.

Пример 1.1 (проективная прямая)
$\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ покрывается двумя аффинными картами $U_0 = U_{x_0}$ и $U_1 = U_{x_1}$, представляющими собою аффинные прямые с уравнениями $x_0 = 1$ и $x_1 = 1$ (см. рис. 1◇2). Карта U_0 покрывает все точки $\mathbb{P}_1$ кроме вертикальной координатной оси $(0 : 1)$, которая является единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_0. Точка $(x_0 : x_1)$ с $x_0 \neq 0$ видна в карте U_1 как $\left(1 : \frac{x_1}{x_0}\right)$ и функция $t = x_1|_{U_0} = x_1/x_0$ может использоваться в качестве локальной аффинной координаты в этой карте. Карта U_1 покрывает все точки $(x_0 : x_1) = (x_0/x_1 : 1)$ с $x_1 \neq 0$, и функция $s = x_0|_{U_1} = x_0/x_1$ годится в качестве локальной координаты в U_1. Единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_1 является горизонтальная координатная ось $(1 : 0)$. Координаты s и t одной и той же точки $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$, видимой сразу в обеих картах, связаны соотношением $s = 1/t$.

Упражнение 1.3. Убедитесь в этом.

[1] где равенства вида $0 : x = 0 : y$ и $x : 0 = y : 0$ также допускаются

Поэтому $\mathbb{P}_1$ можно воспринимать как результат склейки двух аффинных координатных прямых $\mathbb{A}^1$ (одна — с координатой s, другая — с координатой t) вдоль дополнения до начала координат по следующему правилу: точка с координатой s на одной прямой приклеивается к точке с координатой $t = 1/s$ на другой.

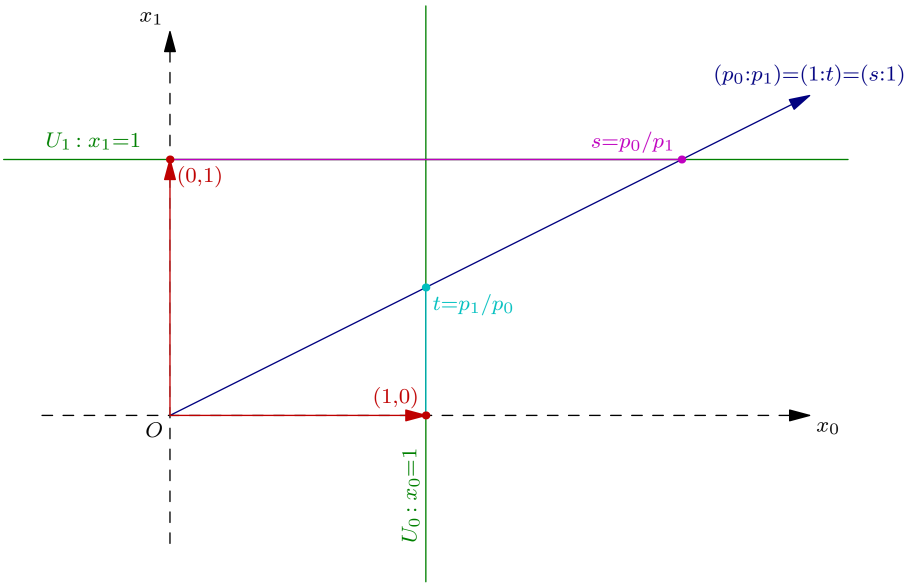


Рис. 1⋄2. Стандартные карты на $\mathbb{P}_1$

Если основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$, то в результате такой склейки мы получим окружность диаметра 1, картами на которой служат две диаметрально противоположные касательные прямые (см. рис. 1⋄3), а отображения окружности на карты суть центральные проекции из точек, диаметрально противоположных к точке касания этой карты с окружностью.

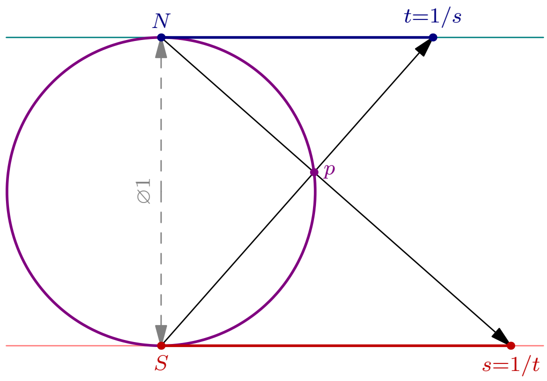


Рис. 1⋄3. $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$

Точно также при $\Bbbk = \mathbb{C}$ в результате склейки двух экземпляров комплексной аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ по правилу $s \leftrightarrow t = 1/s$ мы получим сферу диаметра 1, для которой наши карты являются диаметрально противоположными касательными плоскостями, а сопоставление точке сферы точки на карте задаётся центральной проекцией из диаметрально противоположного к точке касания «полюса» сферы, как на рис. 1⋄4: если ориентации касательных плоскостей выбраны согласованным образом, как на рис. 1⋄4, комплексные числа s и t будут иметь противоположные аргументы и — согласно рис. 1⋄3 — обратные модули.

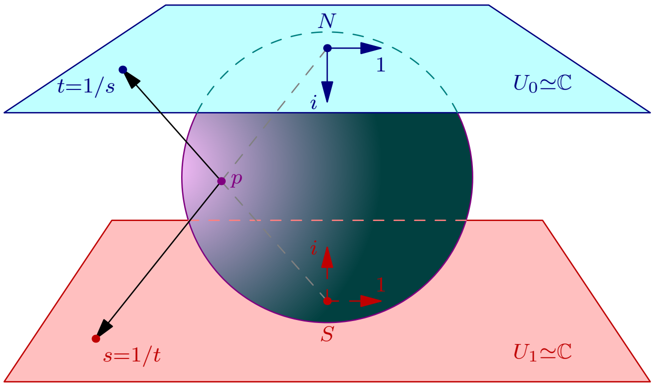


Рис. 1◇4. $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$

Пример 1.2 (стандартное аффинное покрытие $\mathbb{P}_n$)

Набор из $(n+1)$ аффинных карт $U_\nu = U_{x_\nu}$, задаваемых в $\mathbb{A}^{n+1}$ уравнениями $\{x_\nu = 1\}$, называется *стандартным открытым покрытием* $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\Bbbk^{n+1})$. Для каждого $\nu = 0, 1, \dots, n$ в качестве стандартных локальных аффинных координат на U_ν берутся n форм

$$t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = \frac{x_i}{x_\nu} \quad \text{с} \quad 0 \leqslant i \leqslant n\,,\ i \neq \nu\,.$$

Таким образом, пространство $\mathbb{P}_n$ можно представлять себе как результат склейки $(n+1)$ различных копий $U_0, U_1, \dots, U_n$ аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ по их фактическим пересечениям внутри $\mathbb{P}_n$. В однородных координатах на $\mathbb{P}_n$ пересечение $U_\mu \cap U_\nu$ состоит из всех таких x, у которых обе координаты x_μ и x_ν не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на U_μ и U_ν это подмножество задаётся, соответственно, неравенствами $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$ и $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$. При этом точка $t^{(\mu)} \in U_\mu$ склеивается с точкой $t^{(\nu)} \in U_\nu$, если и только если $t_\nu^{(\mu)} = 1/t_\mu^{(\nu)}$ и $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)}/t_\mu^{(\nu)}$ для $i \neq \mu, \nu$. Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат $t^{(\nu)}$ к локальным координатам $t^{(\mu)}$.

Пример 1.3 (аффинные коники)

Посмотрим как выглядит в различных аффинных картах плоская проективная кривая C второй степени, заданная в однородных координатах на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 \tag{1-1}$$

В стандартной карте U_{x_1}, где $x_1 = 1$, в локальных координатах

$$t_0 = x_0|_{U_{x_1}} = x_0/x_1\,, \quad t_2 = x_2|_{U_{x_1}} = x_2/x_1$$

уравнение (1-1) превращается в уравнение гиперболы $t_2^2 - t_0^2 = 1$. В стандартной карте U_{x_2}, где $x_2 = 1$, с локальными координатами $t_0 = x_0|_{U_{x_2}} = x_0/x_2$, $t_1 = x_1|_{U_{x_2}} = x_1/x_2$ возникает уравнение окружности $t_0^2 + t_1^2 = 1$. В карте $U_{x_1+x_2}$, где $x_1+x_2 = 1$, в локальных аффинных координатах $t = x_0|_{U_{x_1+x_2}} = x_0/(x_1+x_2)$, $u = (x_2-x_1)|_{U_{x_1+x_2}} = (x_2-x_1)/(x_2+x_1)$ получается[1] уравнение параболы $t^2 = u$. Таким образом, аффинные эллипс, гипербола и парабола суть изображения одной и той же проективной кривой (1-1) в различных картах. Вид C в карте $U \subset \mathbb{P}_2$ определяется тем, как располагается по отношению к C бесконечно удалённая прямая этой карты: эллипс, парабола и гипербола возникают, соответственно, когда эта прямая не пересекается с C, касается C и пересекается с C в двух различных точках (см. рис. 1◇5).

[1] Надо перенести x_1^2 в (1-1) слева направо и поделить обе части на $x_2 + x_1$.

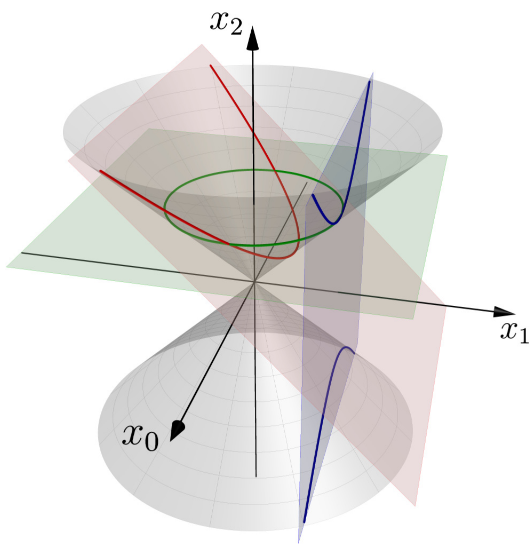


Рис. 1⋄5. Аффинные коники.

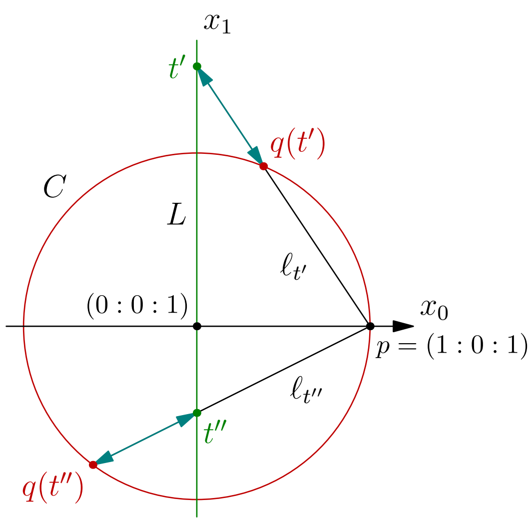


Рис. 1⋄6. Проекция коники на прямую.

1.2.3. Дополнительные подпространства и проекции. Проективные подпространства $K = \mathbb{P}(U)$ и $L = \mathbb{P}(W)$ пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называются *дополнительными*, если $K \cap L = \varnothing$ и $\dim K + \dim L = n - 1$. Например, любые две непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ дополнительны. На языке линейной алгебры дополнительность означает, что $U \cap W = 0$ и $\dim U + \dim W = \dim V$, т. е. $V = U \oplus W$. В этом случае любой вектор $v \in V$ имеет единственное разложение $v = u + w$ с $u \in U$ и $w \in W$, причём обе компоненты этого разложения отличны от нуля, если v не содержится ни в U, ни в W. Геометрически это означает, что для любой точки $p \notin K \sqcup L$ существует единственная прямая $\ell = (q, r)$, проходящая через p и пересекающая оба подпространства K, L.

Упражнение 1.4. Убедитесь в этом.

Для каждой пары дополнительных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ *проекция на L из K*

$$\pi_L^K : (\mathbb{P}_n \smallsetminus K) \to L\,,$$

тождественно действует на L и переводит каждую точку $p \in \mathbb{P}_n \smallsetminus (K \sqcup L)$ в точку пересечения с L единственной прямой, проходящей через p и пересекающей как K, так и L. В однородных координатах $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$, согласованных с разложением $V = U \oplus W$ так, что $(x_0 : x_1 : \ldots : x_m)$ являются координатами в K, а $(x_{m+1} : x_{m+2} : \ldots : x_n)$ — координатами в L, проекция π_L^K просто удаляет первые $(m+1)$ координат x_ν с $0 \leqslant \nu \leqslant m$.

Пример 1.4 (проектирование коники на прямую)

Спроектируем гладкую конику C из прим. 1.3 из точки $p = (1 : 0 : 1) \in C$ на прямую L, заданную уравнением $x_0 = 0$. В стандартной аффинной карте U_2, где $x_2 = 1$, эта проекция $\pi_L^p : C \to L$ выглядит как на рис. 1⋄6. Она является *бирациональной биекцией* между L и C, т. е. однородные координаты соответственных точек $q = (q_0 : q_1 : q_2) \in C$ и $t = (0 : t_1 : t_2) = \pi_L^p(q) \in L$ суть *рациональные* алгебраические функции друг друга:

$$\begin{aligned}(t_1 : t_2) &= (q_1 : (q_2 - q_0))\\ (q_0 : q_1 : q_2) &= ((t_1^2 - t_2^2) : 2t_1t_2 : (t_1^2 + t_2^2))\end{aligned} \tag{1-2}$$

Упражнение 1.5. Проверьте эти формулы и убедитесь, что когда пара (t_1, t_2) пробегает $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, тройка $(q_0 : q_1 : q_2)$ пробегает все пифагоровы тройки[1] с точностью до пропорциональности.

а само отображение $\pi_L^p : C \to L$ взаимно однозначно, если доопределить его в точке p так, чтобы она переходила в точку пересечения прямой L и касательной к C в точке p прямой $x_0 = x_2$ (на рис. 1◇6 это пересечение происходит в бесконечной точке $t = (0 : 1 : 0)$). В самом деле, каждая проходящая через p прямая $\ell_t = (pt)$, за исключением касательной, пересекает C ещё ровно в одной точке $q = q(t)$, отличной от p, и координаты этой точки q рационально выражаются через коэффициенты уравнения прямой ℓ_t, являющиеся рациональными функциями от t, и координаты точки p.

1.2.4. Линейные проективные изоморфизмы. Всякий линейный изоморфизм векторных пространств $F : U \xrightarrow{\sim} W$ корректно определяет биекцию $\overline{F} : \mathbb{P}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(W)$, которая называется *проективным линейным преобразованием* или *проективным изоморфизмом*.

Упражнение 1.6. Рассмотрим две гиперплоскости $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и точку $p \notin L_1 \cup L_2$. Убедитесь, что проекция из p задаёт проективный изоморфизм $\gamma_p : L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$.

Лемма 1.1
Для любых двух упорядоченных наборов из $(n+2)$ точек

$$\{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}\} \in \mathbb{P}(U), \quad \{q_0, q_1, \dots, q_{n+1}\} \in \mathbb{P}(W),$$

в каждом из которых никакие $(n+1)$ точек не лежат в одной гиперплоскости, существует единственный с точностью до пропорциональности линейный изоморфизм $F : U \xrightarrow{\sim} W$, такой что $\overline{F}(p_i) = q_i$ при всех i.

Доказательство. Зафиксируем некоторые векторы u_i и w_i, представляющие точки p_i и q_i, и возьмём $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ и $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ в качестве базисов в U и W. Оператор $F : U \to W$ тогда и только тогда переводит точку p_i в точку q_i, когда $F(u_i) = \lambda_i w_i$ для некоторых ненулевых $\lambda_i \in \Bbbk$. В частности, для того, чтобы точки $p_0, p_1, \dots, p_n$ переводились преобразованием $\overline{F}$ в точки $q_0, q_1, \dots, q_n$, необходимо и достаточно, чтобы оператор F в выбранных нами базисах имел диагональную матрицу с произвольными ненулевыми константами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ по главной диагонали. Заметим теперь, что в разложении

$$u_{n+1} = x_0 u_0 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$$

все координаты x_i отличны от нуля, поскольку в противном случае $n+1$ точка[2] оказались бы в одной гиперплоскости, заданной условием обращения этой координаты в нуль. Если аналогичным образом разложить вектор $w_{n+1} = y_0 w_0 + y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$ и записать равенство $F(u_{n+1}) = \lambda_{n+1} w_{n+1}$ в виде системы равенств на координаты, мы получим на константы $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ соотношения $y_i = \lambda_{n+1} \lambda_i x_i$ (при всех $0 \leqslant i \leqslant n$), из которых $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_{n+1}^{-1} \cdot \big(y_1/x_1, y_2/x_2, \dots, y_n/x_n\big)$. Таким образом, матрица оператора F определена однозначно с точностью до постоянного множителя $\lambda_{n+1}^{-1} \neq 0$. □

Следствие 1.1
Две матрицы тогда и только тогда задают одинаковые проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны. □

[1] Т. е. все целые решения уравнения Пифагора $q_0^2 + q_1^2 = q_2^2$

[2] а именно, p_{n+1} и все p_i с номерами, отличными от номера занулившейся координаты вектора u_{n+1}

1.2.5. Линейная проективная группа. Согласно лем. 1.1 линейные проективные автоморфизмы пространства $\mathbb{P}(V)$ образуют группу, изоморфную фактор группе полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ по подгруппе гомотетий $H = \{\lambda \cdot \mathrm{Id} \mid \lambda \neq 0\} \subset \mathrm{GL}(V)$. Эта фактор группа обозначается $\mathrm{PGL}(V) = \mathrm{GL}(V)/H$ и называется *проективной линейной группой*. Если при помощи выбора базиса отождествить линейную группу $\mathrm{GL}(V)$ с группой невырожденных матриц GL_{n+1}, проективная группа $\mathrm{PGL}(V)$ отождествится с группой PGL_{n+1} невырожденных матриц, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

1.2.6. Дробно-линейные преобразования прямой и двойное отношение. Группа $\mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$ состоит из классов пропорциональности матриц $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $ad - bc \neq 0$. Она действует на $\mathbb{P}_1$ по правилу $\overline{A} : (x_0 : x_1) \mapsto ((ax_0 + bx_1) : (cx_0 + dx_1))$. В стандартной аффинной карте $U_1 \simeq \mathbb{A}^1$ с аффинной координатой $t = x_0/x_1$, это действие имеет вид дробно линейного преобразования $t \mapsto (at+b)/(ct+d)$. Единственное дробно линейное преобразование, переводящее три заданных различных точки q, r, s в ∞, 0, 1, очевидно, таково:

$$t \mapsto \frac{t-r}{t-q} \cdot \frac{s-r}{s-q} \tag{1-3}$$

Отметим, что разность аффинных координат $a = a_0/a_1$ и $b = b_0/b_1$ пары точек $a = (a_0 : a_1)$ и $b = (b_0 : b_1)$ на $\mathbb{P}_1$ с точностью до множителя совпадает с определителем их однородных координат:

$$a - b = \frac{a_0}{a_1} - \frac{b_0}{b_1} = \frac{a_0b_1 - a_1b_0}{a_1b_1} = \frac{\det(a,b)}{a_1b_1}\,.$$

Для четырёх различных точек $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_1$ величина

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}{(p_1 - p_4)(p_2 - p_3)} = \frac{\det(p_1, p_3) \cdot \det(p_2, p_4)}{\det(p_1, p_4) \cdot \det(p_2, p_3)}\,. \tag{1-4}$$

называется *двойным отношением*[1] этих четырёх точек. Согласно (1-3), двойное отношение (1-4) представляет собою образ точки p_4 при единственном дробно линейном автоморфизме $\mathbb{P}_1$, переводящем точки p_1, p_2, p_3 в точки $\infty,\ 0,\ 1$ соответственно. Отсюда сразу следует, что двойное отношение четырёх различных точек может принимать любые значения кроме ∞, 0 и 1 и что две упорядоченных четвёрки точек тогда и только тогда переводятся одна в другую дробно линейным преобразованием прямой, когда их двойные отношения одинаковы.

Упражнение I.7. Докажите последнее утверждение.

Поскольку замена однородных координат является именно таким преобразованием, мы заключаем, что правая часть равенства (1-4) не зависит от выбора однородных координат, а средняя часть (содержащая разности аффинных координат точек) не зависит ни от выбора аффинной карты, ни от выбора локальной аффинной координаты в ней (при условии, что карта содержит все четыре точки, т. е. значения p_1, p_2, p_3, p_4 конечны).

Упражнение I.8. Убедитесь, при действии симметрической группы S_4 перестановками точек p_1, p_2, p_3, p_4, четвертная подгруппа Клейна $V_4 \subset S_4$ сохраняет двойное отношение этих

[1] по-английски *cross-ratio*

точек, и если $[p_1, p_2, p_3, p_4] = \vartheta$, то

$$\begin{aligned}
[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_2, p_1] = [p_4, p_3, p_2, p_1] &= \vartheta \\
[p_2, p_1, p_3, p_4] = [p_1, p_2, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_1, p_2] &= 1/\vartheta \\
[p_3, p_2, p_1, p_4] = [p_2, p_3, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_2, p_3] = [p_4, p_1, p_2, p_3] &= \vartheta/(\vartheta - 1) \\
[p_4, p_2, p_3, p_1] = [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_3, p_1, p_2, p_4] = [p_1, p_3, p_2, p_4] &= 1 - \vartheta \\
[p_2, p_3, p_1, p_4] = [p_3, p_2, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_3, p_2] = [p_4, p_1, p_3, p_2] &= (\vartheta - 1)/\vartheta \\
[p_3, p_1, p_2, p_4] = [p_1, p_3, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_4, p_2, p_1, p_3] &= 1/(1 - \vartheta)\,.
\end{aligned} \tag{1-5}$$

Пример 1.5 (гармонические пары точек)
Четыре точки $a, b, c, d \in \mathbb{P}_1$ называются *гармоническими*, если $[a, b, c, d] = -1$. Геометрически это условие означает, что в аффинной карте, для которой точка a является бесконечностью, точка b является центром тяжести точек c и d. Из формул (1-5) вытекает, что гармоничность равносильна тому, что двойное отношение не меняется при перестановке точек в одной пар $\{a, b\}$, $\{c, d\}$, или при перестановке этих пар между собою. Таким образом, *гармоничность* — это *симметричное* отношение на множестве *неупорядоченных* пар точек $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ на $\mathbb{P}_1$.

Пример 1.6 (четырёхвешинник)
С каждой четвёркой точек $a, b, c, d \in \mathbb{P}_2$, никакие 3 из которых не коллинеарны, связана конфигурация из трёх пар прямых, соединяющих пары данных точек (см. рис. 1◇7) и называемых *сторонами* четырёхвершинника $abcd$. Пусть эти прямые пересекаются в точках

$$x = (ab) \cap (cd)\,, \quad y = (ac) \cap (bd)\,, \quad z = (ab) \cap (cd)\,. \tag{1-6}$$

Покажем, что в каждом из трёх пучков прямых с центрами в точках x, y, z пара сторон четырёхвершинника гармонична паре сторон треугольника xyz. Для этого запараметризуем пучок всех проходящих через точку x прямых точками прямой (ad) или точками прямой (bc) и проверим, что прямая (xy) пересекает прямые (ad) и (bc) по таким точкам x', x'', что

$$[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = -1\,.$$

Поскольку центральные проекции из x и из y являются дробно линейными изоморфизмами между прямыми (ad) и (bc), мы имеем следующие равенства двойных отношений соответственных точек: $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = [d, a, z, x']$. Коль скоро при перестановке первых двух точек двойное отношение не поменялось, оно равно -1, как и утверждалось.

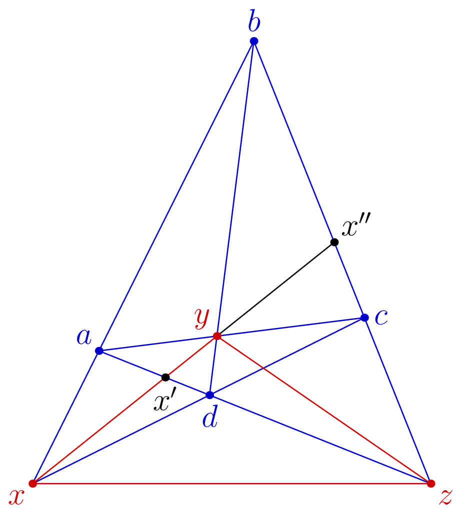


Рис. 1◇7. Четырёхвешинник.

1.3. Задание фигур полиномиальными уравнениями. С каждым вектором $v \in V$ связано отображение вычисления $\mathrm{ev}_v : SV^* \to \Bbbk$, $f \mapsto f(v)$, переводящее произведение линейных форм $f = \varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_m \in S^m V^*$ в произведение их значений $f(v) \overset{\text{def}}{=} \prod \varphi(v)$ на векторе v. В терминах координат, значение многочлена $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ на векторе v равно результату подстановки вместо каждой переменной x_i значения i-той координаты вектора v в базисе пространства V, двойственном к выбранному базису $x_0, x_1, \dots, x_n$ пространства V^*. Таким образом, каждый многочлен $f \in SV^*$ задаёт функцию $f : \mathbb{A}(V) \to \Bbbk$, $v \mapsto f(v)$, на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$. Все такие функции называются *полиномиальными*.

Упражнение 1.9. Покажите, что над конечным полем $\Bbbk$ любая функция $\mathbb{A}(V) \to \Bbbk$ является полиномиальной, причём существуют ненулевые многочлены, задающие нулевую полиномиальную функцию. Напротив, над бесконечным полем имеются неполиномиальные функции $\mathbb{A}(V) \to \Bbbk$, а два многочлена задают одинаковые полиномиальные функции только когда они равны как многочлены.

1.3.1. Аффинные многообразия. Множество нулей многочлена f на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ обозначается через $V(f) = \{p \in \mathbb{A}(V) \mid f(p) = 0\}$ и называется *аффинной алгебраической гиперповерхностью*. Пересечения аффинных алгебраических гиперповерхностей, т. е. множества решений систем полиномиальных уравнений на координаты, называются *аффинными алгебраическими многообразиями*. Например, аффинными многообразиями являются аффинные подпространства — они задаются системами линейных уравнений.

1.3.2. Проективные многообразия. На проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ отличный от константы многочлен от однородных координат обычно *не задаёт* никакой функции, т. к. значение $f(\lambda v)$ зависит от λ. Тем не менее, для любого *однородного* многочлена f степени d множество его нулей $V(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$ является корректно определенным подмножеством в $\mathbb{P}(V)$, поскольку $f(v) = 0 \iff f(\lambda v) = \lambda^d f(v) = 0$. Иначе говоря, аффинная гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}(V)$, заданная однородным многочленом f, представляет собой конус, образованный проходящими через начало координат прямыми, которые являются точками проективного пространства. Множество этих точек $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$ называется *проективной алгебраической гиперповерхностью* степени $\deg f$. Пересечения проективных гиперповерхностей, т. е. множества ненулевых решений[1] систем однородных полиномиальных уравнений, называются *проективными алгебраическими многообразиями*.

Простейшими примерами проективных многообразий являются *проективные подпространства* $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$, ассоциированные с векторными подпространствами $U \subset V$ — они задаются системами однородных линейных уравнений. Например, проективная прямая (ab) представляет собою проективизацию линейной оболочки векторов a и b, т. е. состоит из всевозможных точек вида $\lambda a + \mu b$ и может быть задана системой линейных уравнений $\xi(x) = 0$, где ξ пробегает подпространство $\operatorname{Ann}(a) \cap \operatorname{Ann}(b)$ (или любой базис в этом подпространстве). Отношение $(\lambda : \mu)$ коэффициентов из разложения вектора $\lambda a + \mu b \in (a, b)$ можно использовать в качестве внутренней однородной координаты на прямой (ab).

Упражнение 1.10. Покажите, что для любых двух проективных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ выполняется неравенство $\dim(K \cap L) \geqslant \dim K + \dim L - n$ (в частности, любые две прямые на $\mathbb{P}_2$ пересекаются).

1.3.3. Проективное замыкание аффинной гиперповерхности $S = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ это проективная гиперповерхность $\overline{S} = V(\overline{f}) \subset \mathbb{P}_n$, задаваемая однородным многочленом $\overline{f}$ степени $d = \deg f$, пересечение которой со стандартной аффинной картой U_0 совпадает с X. Если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \cdots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

[1] рассматриваемых с точностью до умножения на ненулевые константы

где каждый f_i однороден степени i, то

$$\overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) = f_0 \cdot x_0^d + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot x_0^{d-1} + \dots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

получается из f умножением каждого монома на подходящую степень x_0, дополняющую степень всего монома до d, и превращается в f при $x_0 = 1$. Дополнение $\overline{S} \smallsetminus S = \overline{S} \cap U_0^{(\infty)}$ задаётся в однородных координатах $(x_1 : x_2 : \dots : x_n)$ на бесконечно удалённой гиперплоскости $x_0 = 0$ уравнением $f_d(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Таким образом, лежащие на бесконечности точки гиперповерхности $\overline{S}$ — это в точности нули старшей однородной компоненты уравнения, задающего S. В аффинной геометрии их обычно называют *асимптотическими направлениями* гиперповерхности S.

Например проективным замыканием аффинной кубической кривой $x_1 = x_2^3$ является проективная кривая $x_0^2 x_1 = x_2^3$, которая имеет ровно одну бесконечно удалённую точку $(0 : 1 : 0)$ и выглядит в аффинной карте U_1 как полукубическая парабола $x_0^2 = x_2^3$ с остриём в этой точке.

1.3.4. Пространство гиперповерхностей. Поскольку пропорциональные уравнения задают одну и ту же гиперповерхность, гиперповерхности степени d являются точками проективного пространства $\mathbb{P}(S^d V^*)$, которое мы будем называть *пространством гиперповерхностей* степени d в $\mathbb{P}(V)$.

Упражнение 1.11. Найдите размерность пространства гиперповерхностей d-той степени в $\mathbb{P}_n$.

Поскольку уравнение $f(p) = 0$ при фиксированном $p \in \mathbb{P}(V)$ является *линейным уравнением на* $f \in S^d V^*$, гиперповерхности степени d, проходящие через заданную точку p, образуют проективную гиперплоскость в пространстве всех гиперповерхностей.

Проективные подпространства в пространстве гиперповерхностей называются *линейными системами* гиперповерхностей. По определению, всякая гиперповерхность из линейной системы, порождённой гиперповерхностями $V(f_1)$, $V(f_2)$, …, $V(f_m)$, задаётся уравнением вида

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m = 0,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \Bbbk$ — некоторые константы. В частности, любая гиперповерхность из такой системы обязательно содержит пересечение $V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots \cap V(f_m)$. По старинной традиции, одномерные и двумерные линейные системы также называются *пучками* и *связками* соответственно. Поскольку любая прямая в проективном пространстве имеет непустое пересечение с любой гиперплоскостью, всякий пучок гиперповерхностей[1] всегда содержит гиперповерхность, проходящую через любую наперёд заданную точку.

Пример 1.7 (наборы точек на $\mathbb{P}_1$ и кривая Веронезе)

Фиксируем двумерное векторное пространство $U \simeq \Bbbk^2$ с координатами x_0, x_1 и рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$. Всякое конечное множество точек

$$p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$$

(среди которых допускаются и совпадающие) является алгебраической гиперповерхностью, а именно, множеством нулей однородного многочлена d-той степени

$$f(x_0, x_1) = \prod_{\nu=1}^{d} \det(x, p_\nu) = \prod_{\nu=1}^{d} (p_{\nu,1} x_0 - p_{\nu,0} x_1), \quad \text{где } p_\nu = (p_{\nu,0} : p_{\nu,1}). \tag{1-7}$$

[1] над любым полем

По аналогии с (неоднородными) многочленами от одной переменной, задающими конфигурации точек на аффинной прямой $\mathbb{A}_1$, мы будем называть точки $p_\nu \in \mathbb{P}_1$ *корнями* однородного многочлена f от переменных x_0, x_1. В этом смысле разложение (1-7) аналогично разложению многочлена от одной переменной на линейные множители, отвечающие корням. В частности, у однородного многочлена степени d от двух переменных имеется не более d различных корней на $\mathbb{P}_1$, а если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то таковых корней, с учётом кратностей[1], будет ровно d. Таким образом, над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ всевозможные d-точечные конфигурации на $\mathbb{P}_1$ взаимно однозначно соответствуют точкам проективного пространства $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$, ассоциированного с $(d+1)$-мерным векторным пространством однородных многочленов степени d от x_0, x_1.

Конфигурации, в которых все d точек слипаются в одну, образуют алгебраическую кривую $C_d \subset \mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$, которая называется *кривой Веронезе* степени d или *рациональной нормальной кривой* d-той степени. Эта кривая является образом *отображения Веронезе*

$$\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*) \xrightarrow{v_d} \mathbb{P}_d = \mathbb{P}\left(S^d U^*\right), \tag{1-8}$$

переводящего линейную форму $\varphi \in U^*$ (задающую одну точку $p \in \mathbb{P}(U)$) в её d-ю степень $\varphi^d \in S^d(U^*)$, задающую d-кратную точку p. Если записывать формы $\varphi \in U^*$ и $f \in S^d(U^*)$ в виде

$$\varphi(x) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \quad \text{и} \quad f(x) = \sum_\nu a_\nu \cdot \binom{d}{\nu} x_0^{d-\nu} x_1^\nu$$

и использовать отношения коэффициентов $(\alpha_0 : \alpha_1)$ и $(a_0 : a_1 : \dots : a_d)$ в качестве однородных координат на $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$ и $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$ соответственно, то при не делящейся на характеристику поля $\Bbbk$ степени d кривая Веронезе запишется параметрическим уравнением[2]

$$(\alpha_0 : \alpha_1) \mapsto (a_0 : a_1 : \dots : a_d) = \left(\alpha_0^d : \alpha_0^{d-1}\alpha_1 : \alpha_0^{d-2}\alpha_1^2 : \dots : \alpha_1^d\right). \tag{1-9}$$

Таким образом, при $\operatorname{char}\Bbbk \nmid d$ кривая C_d состоит из всех точек $(a_0 : a_1 : \dots : a_d) \in \mathbb{P}_d$, координаты которых составляют геометрическую прогрессию. Это условие равносильно тому, что

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{d-2} & a_{d-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{d-1} & a_d \end{pmatrix} = 1,$$

и может быть выражено системой однородных уравнений второй степени — обращением в нуль всех 2×2-миноров этой матрицы. Например, кривая $C_2 \subset \mathbb{P}_2$ образована всеми квадратными трёхчленами $a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2$, которые являются полными квадратами. Она задаётся известным из школы уравнением

$$D/4 = -\det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 - a_0 a_2 = 0 \tag{1-10}$$

и допускает следующее параметрическое задание:

$$a_0 = \alpha_0^2, \quad a_1 = \alpha_0\alpha_1, \quad a_2 = \alpha_1^2. \tag{1-11}$$

[1] Под кратностью корня p понимается максимальная степень линейной формы $\det(t, p)$, на которую делится f.

[2] Если d кратно $p = \operatorname{char}\Bbbk$, то формула (1-9) превращается в $(\alpha_0 : \alpha_1) \mapsto \left(\alpha_0^d : 0 : 0 : \dots : 0 : \alpha_1^d\right)$.

Пересечение кривой (1-9) с произвольной гиперплоскостью, заданной уравнением

$$A_0 a_0 + A_1 a_1 + \dots + A_d a_d = 0\,,$$

состоит из Веронезе-образов тех точек $(\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}_1$, в которых обращается в нуль однородный многочлен $\sum A_\nu \cdot \alpha_0^{d-\nu}\alpha_1^\nu$ степени d. Поскольку таких точек не более d, никакие $d+1$ точек кривой Веронезе не лежат в одной гиперплоскости. Отсюда вытекает, что при $2 \leqslant m \leqslant d$ никакие $m+1$ точек кривой C_d не лежат в одном $(m-1)$-мерном подпространстве. Над алгебраически замкнутым полем пересечение кривой C_d с любой гиперплоскостью состоит в точности из d точек[1] — именно поэтому мы и сказали выше, что *степень* кривой C_d равна d.

1.4. Проективные квадрики. Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$. Проективная гиперповерхность второй степени $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$, $q \in S^2V^*$, называется *проективной квадрикой*. В однородных координатах $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ квадратичный многочлен q можно записать как

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i x_j = x \cdot A \cdot {}^t x\,,$$

где $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ — строка координат, ${}^t x$ — транспонированный ей столбец координат, а $A = (a_{ij})$ — *симметричная* матрица, которая при $i \neq j$ имеет в качестве $a_{ij} = a_{ji}$ половину[2] коэффициента при $x_i x_j$ в многочлене $q(x)$. Другими словами, для любого однородного многочлена $q(x)$ второй степени существует единственная симметричная билинейная форма $\widetilde{q} : V \times V \to \Bbbk$, такая что $q(x) = \widetilde{q}(x, x)$. Она называется *поляризацией* квадратичной формы q и выражается через q несколькими эквивалентными способами:

$$\widetilde{q}(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i y_j = x \cdot A \cdot {}^t y = \frac{1}{2} \sum_i y_i \frac{\partial q(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\Big(q(x+y) - q(x) - q(y)\Big)\,. \tag{1-12}$$

Матрица A представляет собою *матрицу Грама* формы $\widetilde{q}$ в двойственном к x_i базисе e_i пространства V, т. е. $a_{ij} = \widetilde{q}(e_i, e_j)$. В любом другом базисе $(e_0', e_1', \dots, e_n') = (e_0, e_1, \dots, e_n) \cdot C$ новая матрица Грама A' выражается через A по известной из курса линейной алгебры формуле $A' = {}^tC \cdot A \cdot C$. В частности, при линейной замене координат *определитель Грама* $\det A$ умножается на *ненулевой квадрат* определителя матрицы перехода: $\det(A') = \det(A) \cdot \det^2(C)$. Таким образом, класс определителя Грама по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля $\Bbbk$, не зависит от выбора базиса и является инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат. Мы будем называть этот класс *определителем* формы q и обозначать $\det(q)$. Если $\det q \neq 0$, квадрика $V(q)$ называется *невырожденной* (или *гладкой*), в противном случае — *вырожденной* (или *особой*).

1.4.1. Корреляция, ядро и ранг. Со всякой билинейной формой $\widetilde{q}$ на V связан линейный *оператор корреляции* $\hat{q} : V \to V^*$, переводящий вектор $v \in V$ в линейную форму «скалярного умножения» на v:

$$\hat{q}(v) \colon V \to \Bbbk\,, \quad w \mapsto \widetilde{q}(w, v)\,.$$

Упражнение 1.12. Проверьте, что матрица оператора корреляции, записанная в двойственных базисах $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ и $x_1, x_2, \dots, x_n \in V^*$ совпадает с матрицей Грама A квадратичной формы q.

[1] Некоторые из которых могут совпадать друг с другом.

[2] Для этого существенно, что $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$.

В частности, невырожденность квадратичной формы q равносильна тому, что $\hat{q}$ изоморфизм. Пространство
$$\ker \hat{q} = \{\, v \in V \mid \forall w \in V \ \widetilde{q}(w,v) = 0 \}$$
называется *ядром* квадратичной формы q. Поскольку $\dim \ker \hat{q} = \dim V - \operatorname{rk} A$, ранг матрицы Грама не зависит от выбора базиса. Он называется *рангом* квадрики q. Проективизация ядра $\operatorname{Sing} Q \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker \hat{q}) \subset \mathbb{P}(V)$ называется *множеством особых точек* или *вершинным пространством* квадрики Q. Обратите внимание, что $\operatorname{Sing} Q \subset Q$.

В курсе линейной алгебры обычно доказывают следующий факт.

Теорема 1.1 (теорема Лагранжа)
Для любой квадрики над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$ существует базис, в котором её матрица Грама диагональна.

Доказательство. Индукция по $\dim V$ (при $\dim V = 1$ доказывать нечего). Поскольку $q \not\equiv 0$, найдётся $e \in V$, такой что $q(e) = \widetilde{q}(e,e) \neq 0$. Примем его за первый базисный вектор и обозначим через $e^{\perp} = \{\, u \in V \mid \widetilde{q}(u,e) = 0 \,\}$ ортогональное относительно формы $\widetilde{q}$ дополнение к натянутому на e одномерному подпространству $\Bbbk \cdot e$. Пространство V является ортогональной прямой суммой $V = (\Bbbk \cdot e) \oplus e^{\perp}$, т. к. $(\Bbbk \cdot e) \cap e^{\perp} = 0$, и любой вектор $v \in V$ представляется в виде
$$v = \frac{\widetilde{q}(v,e)}{\widetilde{q}(e,e)} \cdot e + u\,,$$
где $u = v - e \cdot \widetilde{q}(v,e)/\widetilde{q}(e,e) \in e^{\perp}$ (обязательно убедитесь в этом!). Если $q|_{e^{\perp}} \equiv 0$, искомый базис состоит из e и произвольных базисных векторов пространства $e^{\perp}$. Если $q|_{e^{\perp}} \not\equiv 0$, то по индукции в $e^{\perp}$ есть базис $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ с диагональной матрицей Грама. Тогда матрица Грама базиса $e,\ e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ тоже диагональна. □

Следствие 1.2
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ всякая квадрика задаётся в подходящих однородных координатах уравнением $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 = 0$, где r — ранг квадрики. В частности, две квадрики переводятся друг в друга линейными проективными автоморфизмами , если и только если они имеют одинаковый ранг.

Доказательство. Ненулевые диагональные элементы матрицы Грама становятся единицами при замене базисных векторов e_i на $e_i/\sqrt{q(e_i)}$. □

Пример 1.8 (квадрики на $\mathbb{P}_1$)
По теор. 1.1 всякая квадратичная форма от двух переменных в подходящем базисе задаётся либо уравнением $x_0^2 + a x_1^2 = 0$ с $a \neq 0$, либо уравнением $x_0^2 = 0$. В первом случае определитель Грама $\det(q)$ с точностью до умножения на квадраты равен a, и форма невырождена. Во втором случае $\det(q) = 0$ и форма вырождена. Вырожденная квадрика $x_0^2 = 0$ называется *двойной точкой*, поскольку её уравнение — это квадрат линейной формы x_0, задающей точку $(0 : 1)$. Неособая квадрика $x_0^2 + a x_1^2 = 0$ либо пуста, либо состоит из двух точек. Первое равносильно тому, что $-a$ не является квадратом в $\Bbbk$, и над алгебраически замкнутым полем невозможно. Если же $-a = \delta^2$, то $x_0^2 + a x_1^2 = (x_0 - \delta x_1)(x_0 + \delta x_1)$ имеет на $\mathbb{P}_1$ два разных корня $(\pm\delta : 1)$.

Таким образом, строение квадрики, задаваемой на $\mathbb{P}_1$ произвольной ненулевой квадратичной формой $q(x) = a_0 x_0^2 + 2 a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2$, полностью определяется классом её *дискриминанта*

$D/4 \overset{\text{def}}{=} -\det(q) = a_1^2 - a_0 a_2$ по модулю умножения на ненулевые квадраты: если он нулевой, то квадрика является двойной точкой, если он единичный — парой различных точек, если он не квадрат — квадрика пуста (что бывает только над незамкнутыми полями).

В качестве следствия мы получаем, что для пересечения произвольных квадрики Q и прямой ℓ имеется ровно 4 взаимоисключающие возможности: или $\ell \subset Q$, или $\ell \cap Q$ это одна двойная точка, или $\ell \cap Q$ состоит из 2 различных точек, или $\ell \cap Q = \varnothing$, причём над алгебраически замкнутым последний случай невозможен.

Теорема 1.2
Пересечение $Q' = L \cap Q$ особой квадрики Q с любым дополнительным к $\operatorname{Sing} Q$ проективным подпространством $L \subset \mathbb{P}(V)$ представляет собой невырожденную квадрику в L, и исходная квадрика Q является *линейным соединением*[1] Q' и $\operatorname{Sing} Q$.

Доказательство. Пусть $K = \ker \hat{q}$ и $L = \mathbb{P}(U)$. Тогда $V = U \oplus K$. Если вектор $u \in U$ лежит в ядре ограничения $\hat{q}|_U$, то $q(u, u') = 0$ для всех $u' \in U$. Записывая произвольный вектор $v \in V$ как $v = u' + u''$ с $u' \in U$ и $u'' \in K$, получаем $\widetilde{q}(u, v) = \widetilde{q}(u, u'') + \widetilde{q}(u, u') = 0$ для всех $v \in V$, откуда $u \in U \cap \ker \hat{q} = 0$. Таким образом, ограничение $q|_U$ невырождено.

Если прямая ℓ проходит через точку $p \in \operatorname{Sing} Q$ и не лежит на квадрике Q, то ограничение формы q на ℓ является ненулевой особой квадратичной формой, а значит, $Q \cap \ell$ — это двойная точка p. Тем самым, каждая прямая, пересекающая $\operatorname{Sing} Q$, либо целиком лежит на Q, либо больше нигде не пересекает квадрику. □

1.4.2. Касательное пространство. Прямая ℓ, проходящая через точку $p \in Q$, называется *касательной* к квадрике Q в точке $p \in \ell \cap Q$, если $\ell \subset Q$ или $\ell \cap Q$ это двойная точка p. Объединение всех прямых, касающихся Q в точке p, называется *касательным пространством* к квадрике Q в точке $p \in Q$ и обозначается $T_p Q$.

Лемма 1.2
Прямая $\ell = (ab)$ касается квадрики $Q = V(q)$ в точке $a \in Q$, если и только если $\widetilde{q}(a, b) = 0$.

Доказательство. Ограничение формы q на прямую ℓ имеет в базисе $\{a, b\}$ матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{q}(a,b) \\ \widetilde{q}(b,a) & \widetilde{q}(b,b) \end{pmatrix},$$

которая имеет нулевой определитель , если и только если $\widetilde{q}(a, b) = \widetilde{q}(b, a) = 0$. □

Следствие 1.3
Видимый из точки $b \notin Q$ контур[2] квадрики Q высекается из неё гиперплоскостью

$$\operatorname{Ann} \hat{q}(b) = \{x \mid \widetilde{q}(b, x) = 0\}.$$

Доказательство. Поскольку $\widetilde{q}(b, b) = q(b) \neq 0$, линейная форма $\hat{q}(b) \colon x \mapsto \widetilde{q}(b, x)$ ненулевая и задаёт гиперплоскость. □

[1] Т. е. объединением всех прямых, пересекающих как Q', так и $\operatorname{Sing} Q$.
[2] ГМТ касания с квадрикой Q всевозможных касательных, опущенных на неё из точки b.

Следствие 1.4
Следующие условия на точку $a \in Q \subset \mathbb{P}(V)$ эквиваленты друг другу:

1) $p \in \operatorname{Sing} Q$ 2) $T_pQ = \mathbb{P}(V)$ это всё пространство 3) $\dfrac{\partial q}{\partial x_i}(p) = 0$ для всех i.

Следствие 1.5
Если точка $p \in Q$ неособа, то $T_pQ = \{x \in \mathbb{P}_n \mid \widetilde{q}(p,x) = 0\}$ является гиперплоскостью коразмерности 1. □

1.4.3. Коники. Кривые второй степени на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ называются *проективными кониками*. Они являются точками пятимерного проективного пространства $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Над алгебраически замкнутым полем имеются ровно три проективно неэквивалентных коники:

- *двойная прямая* $x_0^2 = 0$ имеет ранг 1, и все её точки особы
- *распавшаяся коника* $x_0^2 + x_1^2 = 0$ имеет ранг 2 и является объединением двух различных прямых $x_0 = \pm\sqrt{-1} \cdot x_1$, точка пересечения которых $(0 : 0 : 1)$ является единственной особой точкой распавшейся коники
- *гладкая коника* $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ имеет максимальный ранг 3

что согласуется[1] с теор. 1.2.

Над произвольным полем $\Bbbk$ с $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$ каждая непустая гладкая коника $C \subset \mathbb{P}_2$ допускает квадратичную *рациональную параметризацию*, т. е. отображение $\varphi : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$ задаваемое в однородных координатах тройкой взаимно простых однородных многочленов второй степени $\varphi(t_0, t_1) = \big(\varphi_0(t_0,t_1) : \varphi_1(t_0,t_1) : \varphi_2(t_0,t_1)\big) \in \mathbb{P}_2$ и биективно отображающее прямую $\mathbb{P}_1$ на конику $C \subset \mathbb{P}_2$. Такая параметризация задаётся проекцией $p : C \xrightarrow{\sim} \ell$ коники C из любой её точки $p \in C$ на любую не проходящую через p прямую ℓ. В самом деле, каждая отличная от касательной прямой T_pC прямая (px) с $x \in \ell$ пересекает конику C по двум различным точкам: точке p и ещё одной точке $p'(x) \in C$, однородные координаты которой $(\lambda_0 : \lambda_1)$ в базисе p, x на прямой (px) доставляют отличный от $p = (1 : 0)$ корень уравнения

$$(\lambda_0, \lambda_1) \cdot \begin{pmatrix} q(p,p) & q(p,x) \\ q(x,p) & q(x,x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2q(p,x) \cdot \lambda_0\lambda_1 + q(x,x) \cdot \lambda_1^2 = 0\,,$$

равный $(\lambda_0 : \lambda_1) = \big(q(x,x) : -2q(p,x)\big)$. Отображение

$$\ell \ni x \mapsto q(x,x) \cdot p - 2q(p,x) \cdot x \in C \subset \mathbb{P}_2 \tag{1-13}$$

и задаёт искомую квадратичную параметризацию коники C точками $x \in \ell$.

Упражнение 1.13. Убедитесь, что все три однородных координаты точки

$$q(x,x) \cdot p - 2q(p,x) \cdot x \in \mathbb{P}_2$$

являются однородными полиномами степени 2 от однородных координат $(t_0 : t_1)$ точки $x \in \ell$ относительно произвольного базиса на прямой ℓ, и что формула (1-13) корректно сопоставляет точке $x = T_pC \cap \ell$ точку $p \in C$.

[1] Распавшаяся коника является линейным соединением особой точки и гладкой квадрики — пары различных точек — на любой прямой, не проходящей через особую точку. Двойная прямая это линейное соединение прямой особых точек и пустого множества — гладкой квадрики на $\mathbb{P}_0$.

Упражнение 1.14. Убедитесь, что проекция коники Веронезе $a_0a_2 - a_1^2 = 0$ из точки $(1 : 1 : 1)$ на прямую $a_1 = 0$, переводит точку $(\alpha_0^2 : \alpha_0\alpha_1 : \alpha_1^2)$ в точку $(\alpha_0 : 0 : \alpha_1)$.

Предложение 1.1
Гладкая коника пересекает произвольную кривую, заданную на $\mathbb{P}_2$ однородным уравнением степени d, не более, чем по $2d$ точкам, либо целиком содержится в этой кривой.

Доказательство. Запараметризуем конику однородными полиномами степени 2 от параметра $t = (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1$. Значения t, при которых коника пересекает кривую с уравнением $f(x) = 0$, являются корнями однородного уравнения $f\big(q(t)\big) = 0$, левая часть которого либо тождественно равна нулю, либо имеет степень $2d$. В первом случае вся коника содержится в кривой, во втором случае имеется не более $2d$ различных корней. □

Предложение 1.2
Каждые 5 точек в $\mathbb{P}_2$ лежат на некоторой конике. Если никакие 4 из пяти точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие 3 не коллинеарны, то она ещё и невырождена.

Доказательство. При фиксированном $p \in V$ уравнение $q(p) = 0$ линейно по $q \in S^2V^*$. Поэтому коники, проходящие через $p \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ образуют гиперплоскость в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Поскольку любые 5 гиперплоскостей в $\mathbb{P}_5$ имеют непустое пересечение, требуемая коника существует. Если какие-то три из точек коллинеарны, а никакие четыре — нет, коника содержит прямую, проходящую через три коллинеарные точки, и стало быть, распадается в объединение этой прямой и прямой, проходящей через две оставшиеся точки. Тем самым, такая коника единственна. Если никакие три из точек не коллинеарны, любая проходящая через них коника автоматически неособа, и значит, единственна по предл. 1.1. □

Следствие 1.6
Любые пять прямых без тройных пересечений на $\mathbb{P}_2$ касаются единственной невырожденной коники.

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно предыдущему: 5 точек на $\mathbb{P}_2^\times = \mathbb{P}(V^*)$, двойственные к данным пяти прямым на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$, лежат на единственной гладкой конике $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$, и двойственная ей коника[1] $C \subset \mathbb{P}_2$ есть единственная гладкая коника, касающаяся пяти данных прямых. □

1.4.4. Квадратичные поверхности в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ образуют проективное пространство

$$\mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(S^2V^*).$$

Поэтому любые 9 точек в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике. В частности, любые три прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике — достаточно взять по 3 точки на каждой прямой и провести квадрику через эти 9 точек.

Упражнение 1.15. Покажите, что вырожденная квадрика в $\mathbb{P}_3$ (над произвольным полем) не может содержать трёх попарно непересекающихся прямых.

[1] Т. е. коника, образованная касательными к конике $C^\times$, см. сл. 1.7 на стр. 21 ниже.

Таким образом, любые три попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на гладкой квадрике. Удобной геометрической моделью такой квадрики является *квадрика Сегре*, состоящая из ненулевых матриц ранга 1 в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\Bbbk)\right)$:

$$Q_s \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \neq 0 \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0 \right\}. \tag{1-14}$$

Упражнение 1.16. Убедитесь, что всякий ненулевой линейный оператор $F : U \to V$ ранга один имеет вид $v \otimes \xi : u \mapsto v \cdot \langle \xi , u \rangle$ для некоторых ненулевых $v \in V$, $\xi \in U^*$, определяемых по оператору однозначно с точностью до пропорциональности

В ситуации, когда $U = V = \Bbbk^2$, а v и ξ имеют в стандартных двойственных базисах пространств $\Bbbk^2$ и $\Bbbk^{2^*}$ координаты $v = (x_0 : x_1)$ и $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$, матрица оператора $v \otimes \xi$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 x_0 & \xi_1 x_0 \\ \xi_0 x_1 & \xi_1 x_1 \end{pmatrix} \tag{1-15}$$

Сопоставляя паре точек $(\xi, v) \in \mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^{2^*}) \times \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ одномерное подпространство в $\mathrm{Hom}(\Bbbk^2, \Bbbk^2)$, порождённое оператором $v \otimes \xi$ с матрицей (1-15), мы получаем *вложение Сегре*

$$s : \mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\Big(\mathrm{End}\left(\Bbbk^2\right)\Big),$$

биективно отображающее $\mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1$ на квадрику Сегре $Q_S \subset \mathbb{P}_3$. При этом два семейства координатных прямых на $\mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1$ переходят в два семейства прямых на Q_S. А именно, координатная прямая $\xi = \mathrm{const}$ изобразится на квадрике Сегре проективизацией двумерного пространства матриц ранга 1 с фиксированным отношением $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$ между столбцами, а прямая $v = \mathrm{const}$ — матрицами с фиксированным отношением $x = (x_0 : x_1)$ между строками. В каждом из этих семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются, причём каждая точка Q_S является точкой пересечения пары прямых из различных семейств.

Упражнение 1.17. Убедитесь, что никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Предложение 1.3
Через любые три попарно непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ проходит единственная (и автоматически неособая) квадрика. Эта квадрика представляет собою объединение всех прямых, пересекающих все три заданных.

Доказательство. Всякая квадрика, проходящая через три скрещивающихся прямые, является неособой квадрикой Сегре, заметаемой двумя семействами прямолинейных образующих. Все три заданные прямые должны лежать в одном из них. Но тогда любая прямая из другого семейства пересекают каждую из них, и наоборот, всякая прямая пересекающая каждую из них, лежит на квадрике (ибо пересекает её по трём точкам), причём в другом по отношению к трём заданным прямым семействе. □

1.5. Проективная двойственность. Пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V^*)$ называются *двойственными* проективными пространствами. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом: однородное линейное уравнение $\langle \xi , v \rangle = 0$ на $\xi \in V^*$ и $v \in V$

при фиксированном $\xi \in \mathbb{P}^\times$ задаёт гиперплоскость в $\mathbb{P}_n$, а при фиксированном $v \in \mathbb{P}_n$ — гиперплоскость в $\mathbb{P}_n^\times$, состоящую из всех гиперплоскостей в $\mathbb{P}_n$, проходящих через точку $v \in \mathbb{P}_n$. Из курса линейной алгебры известно, что соответствие $U \leftrightarrows \mathrm{Ann}(U)$ устанавливает обращающую включения биекцию между векторными подпространствами дополнительных размерностей в двойственных пространствах V и V^*. При переходе к проективизациям для каждого $m = 0, 1, \dots, (n-1)$ возникает биекция между m-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n$ и $(n-1-m)$-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n^\times$, переводящая проективное подпространство $L = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_n$ в проективное подпространство $L^\times = \mathbb{P}(\mathrm{Ann}(U)) \subset \mathbb{P}_n^\times$, образованное всеми гиперплоскостями, содержащими L. Такая *проективная двойственность* позволяет переговаривать геометрические утверждения в двойственные геометрические утверждения. Например, условие коллинеарности трёх точек двойственно условию наличия у трёх гиперплоскостей общего подпространства коразмерности 2. Другой пример уже встречался нам в сл. 1.6 на стр. 18. Он тесно связан со следующей геометрической конструкцией.

1.5.1. Полярное преобразование. Корреляция $\hat{q} : V \xrightarrow{\sim} V^*$, ассоциированная с невырожденной квадратичной формой q, индуцирует линейный проективный изоморфизм

$$\overline{q} : \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V^*)$$

который называется *полярным преобразованием* или *поляритетом* квадрики Q. Поляритет переводит точку $p \in \mathbb{P}_n$ в гиперплоскость $L \subset \mathbb{P}_n$, заданную уравнением $\widetilde{q}(p, x) = 0$. Точка p и гиперплоскость L в этом случае называются *полюсом* и *полярой* друг друга относительно квадрики Q. Поляра точки, не лежащей на квадрике, это гиперплоскость, высекающая видимый из этой точки контур квадрики, а поляра точки, лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, касающаяся квадрики в этой точке. Таким образом, всякую квадрику Q можно охарактеризовать как ГМТ, лежащих на своих полярах.

Поскольку условие $\widetilde{q}(a, b) = 0$ симметрично по a и b, точка a лежит на поляре точки b, если и только если точка b лежит на поляре точки a. Такие точки называются *сопряжёнными* относительно квадрики Q.

Предложение 1.4
Пусть $a, b \notin Q$ и прямая (ab) пересекает Q в двух различных точках c, d. Точки a, b сопряжены относительно квадрики Q, если и только если они гармоничны[1] точкам c, d.

Доказательство. Ограничение квадрики Q на прямую (cd) задаётся в однородных координатах $(x_0 : x_1)$ относительно базиса c, d квадратичной формой $q(x) = \det(x, c) \cdot \det(x, d)$, поляризация которой есть $\widetilde{q}(x, y) = \frac{1}{2}\left(\det(x, c) \cdot \det(y, d) + \det(y, c) \cdot \det(x, d)\right)$. Условие сопряжённости $\widetilde{q}(a, b) = 0$ означает, что $\det(a, c) \cdot \det(b, d) = -\det(b, c) \cdot \det(a, d)$ или $[a, b, c, d] = -1$. □

Предложение 1.5
Для неособой квадрики G и произвольной квадрики Q в $\mathbb{P}_n$ гиперплоскости, полярные относительно квадрики G точкам $p \in Q$, образуют в двойственном проективном пространстве $\mathbb{P}_n^\times$ квадрику в $Q_G^\times$ того же ранга, что и квадрика Q. Если Q и G имеют в некоторых однородных координатах на $\mathbb{P}_n$ матрицы Грама A и Γ соответственно, то квадрика $Q_G^\times$ имеет в двойственных однородных координатах на $\mathbb{P}_n^\times$ матрицу $\Gamma^{-1} A \Gamma^{-1}$.

[1] Т. е. $[a, b, c, d] = -1$, см. прим. 1.5 на стр. 10.

Доказательство. Поляритет $\hat{g} : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n^{\times}$ гладкой квадрики $G \subset \mathbb{P}_n$ переводит точку из $\mathbb{P}_n$ со столбцом координат x в точку двойственного пространства $\mathbb{P}_n^{\times}$ со строкой координат $\xi = x^t \Gamma$ и является проективным изоморфизмом. Таким образом, полярная точке $x \in Q$ гиперплоскость ξ удовлетворяет уравнению, которое получается из уравнения $x^t \cdot A \cdot x = 0$ квадрики Q подстановкой $x = \Gamma^{-1} \xi^t$, т. е. уравнению $\xi \cdot \Gamma^{-1} A \Gamma^{-1} \cdot \xi^t = 0$. □

Следствие 1.7

Касательные пространства гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ образуют в $\mathbb{P}_n^{\times}$ гладкую квадрику $Q^{\times}$. Матрицы Грама квадрик Q и $Q^{\times}$ в двойственных базисах пространств $\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{P}_n^{\times}$ обратны друг другу.

Доказательство. Положим в предыдущей теореме $G = Q$ и $\Gamma = A$, и заметим, что гиперплоскости, полярные точкам $p \in Q$ относительно самой же квадрики Q, это в точности касательные пространства $T_p Q$. □

§2. Многообразия Веронезе, Грассмана и Сегре

2.1. Напоминания из полилинейной алгебры. Напомню[1], что *тензорным произведением* модулей $V_1, V_2, \dots, V_n$ над коммутативным кольцом K называется фактор

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \overset{\text{def}}{=} \mathcal{V}/\mathcal{R}$$

свободного модуля $\mathcal{V}$ с базисом из всех n-буквенных слов $[v_1 v_2 \, \dots \, v_n]$, где i-той буквой может быть любой вектор $v_i \in V_i$, по подмодулю $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$, линейно порождённому над K всевозможными трёхчленными линейными комбинациями вида

$$[\,\cdots\,(\lambda u + \mu w)\,\cdots\,] - \lambda\,[\,\cdots\,u\,\cdots\,] - \mu\,[\,\cdots\,w\,\cdots\,]\,, \tag{2-1}$$

где $\lambda, \mu \in K$, $u, w \in V_i$, обозначенные многоточиями соответственные фрагменты всех трёх слов неизменны, а номер i того места, в котором происходят изменения, может быть любым. Класс $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \overset{\text{def}}{=} [v_1 v_2 \, \dots \, v_n] \pmod{\mathcal{R}}$ называется тензорным произведением векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$. По построению, тензорное умножение

$$\begin{gathered} \tau \,:\, V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \\ (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \end{gathered} \tag{2-2}$$

линейно по каждому аргументу при фиксированных остальных, т. е. дистрибутивно по отношению к K-линейным комбинациям векторов:

$$\cdots \otimes (\lambda u + \mu w) \otimes \cdots \, = \lambda \cdot (\,\cdots \otimes u \otimes \cdots\,) - \mu \cdot (\,\cdots \otimes w \otimes \cdots\,)\,, \tag{2-3}$$

и универсально в том смысле, что для любого модуля W и любого полилинейного отображения

$$\varphi \,:\, V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W$$

существует единственный линейный оператор $F \,:\, V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \to W$, такой что $\varphi = F \circ \tau$.

Упражнение 2.1. Покажите, что модуль $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ и полилинейное отображение (2-2) действительно обладают этим универсальным свойством, причём определяются им однозначно с точностью до единственного K-линейного изоморфизма, перестановочного с τ.

Если каждый из модулей V_i свободен с базисом $e^{(i)}_1, e^{(i)}_2, \dots, e^{(i)}_{d_i}$, то их тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ тоже свободно с базисом

$$e^{(1)}_{\alpha_1} \otimes e^{(2)}_{\alpha_2} \otimes \, \dots \, \otimes e^{(n)}_{\alpha_n}\,, \quad 1 \leqslant \alpha_i \leqslant d_i\,. \tag{2-4}$$

В частности, $\operatorname{rk} V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n = \prod \operatorname{rk} V_i$. Если модули $V_i = F_i/R_i$ заданы как факторы свободных модулей F_i по неким подмодулям соотношений $R_i \subset F_i$, то при каждом i модуль

$$F_1 \otimes \cdots \otimes F_{i-1} \otimes R_i \otimes F_{i+1} \otimes \cdots \otimes F_n$$

естественно вложен в $F_1 \otimes F_2 \otimes \cdots \otimes F_n$ в качестве подмодуля, и тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ изоморфно фактору свободного модуля $F_1 \otimes F_2 \otimes \cdots \otimes F_n$ по K-линейной оболочке всех n этих подмодулей $F_1 \otimes \cdots \otimes F_{i-1} \otimes R_i \otimes F_{i+1} \otimes \cdots \otimes F_n \subset V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$.

Например, тензорное произведение абелевых групп $\mathbb{Z}/(m_1) \otimes \mathbb{Z}/(m_2) \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}/(m_n)$, рассматриваемых как модули над $\mathbb{Z}$, изоморфно $\mathbb{Z}/\,(\text{н.о.д.}(m_1, m_2, \dots, m_n))$, т. е. фактору свободного модуля $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \otimes \, \cdots \, \otimes \mathbb{Z}$ ранга $1^n = 1$, по подмодулю порождённому $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Упражнение 2.2. Убедитесь, что $K \otimes V \simeq V \simeq V \otimes K$ для любого модуля V над произвольным коммутативным кольцом K.

[1] См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-01.pdf.

2.1.1. Тензорная, симметрическая и внешняя алгебры. Положим $V^{\otimes 0} \stackrel{\text{def}}{=} K$, а для $n \in \mathbb{N}$

$$V^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{n}.$$

Тензорное произведение векторов задаёт структуру ассоциативной градуированной K-алгебры на прямой сумме модулей

$$\boldsymbol{T}V \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geqslant 0} V^{\otimes n}.$$

Если модуль V свободен с базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$, алгебра $\boldsymbol{T}V$ изоморфна алгебре многочленов от некоммутирующих переменных $e_1, e_2, \dots, e_n$ с коэффициентами из K, т. е. её базис над K составляют (некоммутативные) мономы вида

$$e_{\nu_1} \otimes e_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes e_{\nu_m}, \tag{2-5}$$

которые перемножаются приписыванием друг к другу через значок $\otimes$. Алгебра $\boldsymbol{T}V$ называется *тензорной алгеброй* K-модуля V. Вложение

$$\iota : V \hookrightarrow \boldsymbol{T}V, \tag{2-6}$$

отождествляющее V с подпространством $V^{\otimes 1} \subset \boldsymbol{T}V$ обладает следующим универсальным свойством: для любой ассоциативной K-алгебры A и K-линейного отображения $f : V \to A$ существует единственный такой гомоморфизм K-алгебр $\alpha : \boldsymbol{T}V \to A$, что $f = \alpha \circ \iota$.

Упражнение 2.3. Убедитесь, что алгебра $\boldsymbol{T}V$ и вложение (2-6) определяются этим свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр, перестановочного с (2-6).

Фактор алгебра $SV \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{T}V/\mathcal{I}_{\text{sym}}$ тензорной алгебры $\boldsymbol{T}V$ по двустороннему идеалу $\mathcal{I}_{\text{sym}} \subset \boldsymbol{T}V$, порождённому всевозможными разностями

$$u \otimes w - w \otimes u \in V \otimes V, \tag{2-7}$$

называется *симметрической алгеброй* K-модуля V. Это та самая алгебра, о которой шла речь в n° 1.1. Для свободного модуля V с базисом $e_1, e_2, \dots, e_d$ симметрическая алгебра SV изоморфна алгебре многочленов $K[e_1, e_2, \dots, e_d]$.

Упражнение 2.4. Для d-мерного векторного пространства V над полем $\Bbbk$ найдите $\dim_{\Bbbk} S^n V$.

Фактор алгебра $\boldsymbol{T}V/\mathcal{I}_{\text{skew}}$ тензорной алгебры $\boldsymbol{T}V$ по двустороннему идеалу $\mathcal{I}_{\text{skew}} \subset \boldsymbol{T}V$, порожденному тензорными квадратами всех векторов

$$v \otimes v \in V \otimes V, \tag{2-8}$$

называется *внешней* или *грассмановой* алгеброй K-модуля V. Умножение в алгебре ΛV называется *внешним* или *суперкоммутативным* и обозначается $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$. Из равенств

$$0 = (u + w) \wedge (u + w) = u \wedge w + w \wedge u$$

вытекает, что внешнее произведение меняет знак при перестановке любых двух последовательных сомножителей. Поэтому при произвольной перестановке сомножителей внешнее произведение умножается на знак перестановки. Для свободного модуля V с базисом $e_1, e_2, \dots, e_d \subset V$ внешняя алгебра ΛV изоморфна алгебре *грассмановых многочленов* $K \langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle$ с коэффициентами в K от антикоммутирующих переменных e_i с нулевыми квадратами. В этом случае базис в грассмановой алгебре составляют мономы

$$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}, \quad \text{где} \quad I = (i_1, i_2, \dots, i_n) \quad \text{и} \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant d. \tag{2-9}$$

В частности, $\operatorname{rk} \Lambda^n V = \binom{d}{n}$ и $\operatorname{rk} \Lambda V = 2^d$.

2.1.2. Свёртки. Для конечномерного векторного пространства V над произвольным полем $\Bbbk$ тензорные степени $V^{\otimes n}$ и $(V^*)^{\otimes n}$ канонически двойственны друг другу посредством *полной свёртки*, которая сопоставляет каждой паре разложимых тензоров $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ и $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ произведение

$$\langle\, v\,,\, \xi\,\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i)\,. \tag{2-10}$$

Если базисы $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ и $x_1, x_2, \dots, x_n \in V^*$ двойственны друг другу, то составленные из тензорных мономов $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}$ и $x_{j_1} \otimes x_{j_2} \otimes \cdots \otimes x_{j_s}$ базисы в $V^{\otimes n}$ и $(V^*)^{\otimes n}$ также двойственны друг другу.

Из универсального свойства тензорного произведения $V^{\otimes n}$ вытекает, что пространство линейных отображений $V^{\otimes n} \to \Bbbk$ канонически изоморфно пространству n-линейных форм

$$V \times V \times \cdots \times V \to \Bbbk\,. \tag{2-11}$$

Комбинация этого изоморфизма с задаваемым полной свёрткой изоморфизмом между $\left(V^{\otimes n}\right)^*$ и $(V^*)^{\otimes n}$, устанавливает канонический изоморфизм между $(V^*)^{\otimes n}$ и пространством n-линейных форм (2-11). Разложимому тензору $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ при этом отвечает n-линейная форма

$$V \times V \times \cdots \times V \to \Bbbk\,, \quad (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i)\,.$$

С любыми двумя последовательностями из одинакового числа неповторяющихся[1] индексов

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_m)\,, \quad J = (j_1, j_2, \dots, j_m)$$

связано линейное отображение *частичной свёртки* по m сомножителям I, J

$$\begin{gathered} c^I_J : V^{*\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \to V^{*\otimes(p-m)} \otimes V^{\otimes(q-m)} \\ \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q \mapsto \prod_{\nu=1}^{m} \xi_{i_\nu}(v_{j_\nu}) \cdot \Big(\bigotimes_{i \notin I} \xi_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{j \notin J} v_j\Big) \end{gathered} \tag{2-12}$$

которое для каждого $\nu = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ m$ спаривает i_ν-тый сомножитель в $V^{*\otimes p}$ с j_ν-тым сомножителем в $V^{\otimes q}$, а все остальные сомножители оставляет в том же порядке, как они стояли.

Упражнение 2.5. Интерпретируем n-линейную форму $\varphi :\ V \times V \times \cdots \times V \to \Bbbk$ как тензор из $V^{*\otimes n}$, обозначим через $v \llcorner \varphi$ его свёртку по первому тензорному сомножителю с заданным вектором $v \in V$ и интерпретируем тензор $v \llcorner \varphi \in V^{*\otimes(n-1)}$ как $(n-1)$-линейную форму на V. Убедитесь, что $v \llcorner \varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$.

2.1.3. Линейный носитель тензора. Для заданного тензора $t \in V^{\otimes n}$ на конечномерном векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ обозначим через $\mathrm{Supp}(t) \subset V$ пересечение всех таких подпространств $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$. Иначе $\mathrm{Supp}(t)$ можно охарактеризовать как такое наименьшее по включению[2] подпространство $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$.

Упражнение 2.6. Убедитесь, что для любой пары векторных подпространств $U, W \subset V$ включения $t \in U^{\otimes n}$ и $t \in W^{\otimes n}$ влекут включение $t \in (U \cap W)^{\otimes n}$.

[1] Но не обязательно возрастающих или убывающих.

[2] Или, что то же самое, имеющее наименьшую размерность.

Подпространство $\mathrm{Supp}(t)$ называется *линейным носителем*, а его размерность — *рангом* тензора t. Тензоры, ранг которых меньше размерности пространства V, называются *вырожденными*. Условие $\mathrm{Supp}(t) \neq V$ означает, что часть переменных в некоммутативном многочлене t можно уничтожить подходящей линейной заменой базиса. Например, если $\dim \mathrm{Supp}(t) = 1$, то $t = c \cdot v^{\otimes n}$ для некоторого $c \in \Bbbk$ и $v \in V$, порождающего $\mathrm{Supp}(t)$.

Чтобы указать конкретный набор векторов, линейно порождающих носитель данного тензора $t \in V^{\otimes n}$, для каждой последовательности $J = (j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$ различных элементов множества $\{1, 2, \dots, n\}$ обозначим через

$$c_t^J : V^{*\otimes(n-1)} \to V, \quad \xi \mapsto c^{(1,\,2,\,\dots\,,\,(n-1))}_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})}(\xi \otimes t) \tag{2-13}$$

отображение свёртки, которое сворачивает ν-й сомножитель тензора $\xi \in V^{*\otimes(n-1)}$ с j_ν-тым сомножителем тензора t для каждого $\nu = 1, 2, \dots, n-1$. Если записать t в виде суммы разложимых тензоров $u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_n$, то результатом свёртки (2-13) будет линейная комбинация векторов u_k с $k \notin J$, т. е. тех единственных множителей в разложимых тензорах $u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_n$, номер которых не представлен в J. Очевидно, что эта линейная комбинация лежит в $\mathrm{Supp}(t)$.

Теорема 2.1

Пространство $\mathrm{Supp}(t)$ линейно порождается образами всех свёрток (2-13), отвечающих всевозможным последовательностям J.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Supp}(t) = W$. Чтобы убедиться в том, что образы свёрток (2-13) линейно порождают W, достаточно доказать, что каждая линейная форма $\xi \in V^*$, которая аннулирует все подпространства $\mathrm{im}\left(c_t^I\right)$, аннулирует и подпространство W. Предположим противное: пусть $\xi \in V^*$ имеет ненулевое ограничение на W, но аннулирует все $c_t^I\left(V^{*\otimes(n-1)}\right)$. Выберем в V^* такой базис $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$, чтобы $\xi_1 = \xi$, а ограничения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ на W составляли базис в W^*. Обозначим через $w_1, w_2, \dots, w_k$ двойственный к нему базис в W и разложим t по этому базису. Значение $\xi\left(c_t^I\left(\xi_{i_1} \otimes \xi_{i_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_{n-1}}\right)\right)$ равно такой свёртке t с $\xi_1 \otimes \xi_{i_1} \otimes \xi_{i_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_{n-1}}$, которая сворачивает ковектор ξ_1 с сомножителем, номер которого не входит в J, а каждый ковектор ξ_{i_ν}, $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$, с j_ν-тым сомножителем базисных мономов $w_{k_1} \otimes w_{k_2} \otimes \cdots \otimes w_{k_n}$ из разложения t. Результат такой свёртки равен коэффициенту при том мономе из разложения t, у которого на месте с не представленном в J номером стоит w_1, а на j_ν-том месте стоит w_{i_ν} при всех $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$. Выбирая подходящие $j_1, j_2, \dots, j_{n-1}$ и $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$, мы можем таким образом получить коэффициент при любом содержащем w_1 мономе из разложения t. Следовательно, все эти коэффициенты нулевые, т. е. w_1 не входит в $\mathrm{Supp}(t)$ вопреки нашему предположению. Противоречие. □

2.1.4. Симметрические и кососимметрические тензоры. Симметрическая группа S_n действует на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах:

$$g : v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto v_{g(1)} \otimes v_{g(2)} \otimes \cdots \otimes v_{g(n)} . \tag{2-14}$$

Тензор $t \in V^{\otimes n}$ называется *симметрическим*, если $g(t) = t$ для всех $g \in S^n$, и *кососимметрическим*, если $g(t) = \mathrm{sgn}(g) \cdot t$ для всех $g \in S^n$. Мы будем обозначать подпространства симметрических и кососимметрических тензоров в $V^{\otimes n}$ через

$$\mathrm{Sym}^n V = \{\, t \in V^{\otimes n} \mid \sigma(t) = t \ \ \forall g \in S_n \,\}$$
$$\mathrm{Skew}^n V = \{\, t \in V^{\otimes n} \mid g(t) = \mathrm{sgn}(g) \cdot t \ \ \forall g \in S_n \,\}$$

Пусть векторы $e_1, e_2, \dots, e_d$ составляют базис в V. Поскольку любой симметрический тензор вместе с каждым тензорным мономом m содержит с точно таким же коэффициентом и все мономы из S_n-орбиты монома m, *полные симметрические тензоры*

$$e_{[m_1,m_2,\dots,m_d]} = \left(\begin{array}{c}\text{сумма всех различных тензорных мономов, состоящих из}\\ m_1 \text{ множителей } e_1,\, m_2 \text{ множителей } e_2,\, \dots,\, m_d \text{ множителей } e_d\,,\end{array}\right) \tag{2-15}$$

занумерованные всевозможными наборами $(m_1, m_2, \dots, m_d)$ целых неотрицательных чисел с $\sum\limits_{\nu} m_\nu = n$, образуют базис в $\mathrm{Sym}^n V$.

Упражнение 2.7. Убедитесь, что сумма в правой части (2-15) состоит из $n!\,/(m_1!\, m_2! \cdots m_d!)$ слагаемых.

По той же причине, базис в $\mathrm{Skew}^n V$ составляют *полные кососимметрические тензоры*

$$e_{\langle i_1,i_2,\dots,i_n\rangle} = \sum_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\cdot e_{i_{g(1)}} \otimes e_{i_{g(2)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{g(n)}} \tag{2-16}$$

занумерованные всевозможными последовательностями строго возрастающих индексов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant d$. Обратите внимание, что сумма в правой части (2-16) состоит из $n!$ слагаемых.

Предложение 2.1

Для векторного пространства V над полем характеристики 0 ограничение на подпространство $\mathrm{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$ отображения $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ факторизации по идеалу $\mathcal{J}_{\mathrm{sym}}$ и ограничение на подпространство $\mathrm{Skew}^n \subset V^{\otimes n}$ отображения $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ факторизации по идеалу $\mathcal{J}_{\mathrm{skew}}$ являются изоморфизмами векторных пространств. Действие этих изоморфизмов на стандартные базисные тензоры (2-15) и (2-16) задаётся формулами

$$e_{[m_1,m_2,\dots,m_d]} \mapsto \frac{(m_1+m_2+\cdots+m_d)!}{m_1!\cdot m_2! \cdots m_d!}\cdot e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_d^{m_d} \in S^n V \tag{2-17}$$

$$e_{\langle i_1,i_2,\dots,i_d\rangle} \mapsto n!\cdot e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_d} \in \Lambda^n V \tag{2-18}$$

Доказательство. Проекция каждого из $n!/(m_1!\, m_2! \cdots m_d!)$ слагаемых суммы (2-15) в симметрическую алгебру равна коммутативному моному $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_d^{m_d}$, а проекция каждого из $n!$ слагаемых суммы (2-16) во внешнюю алгебру равна грассманову моному $n!\; e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$. □

2.2. Поляризация многочленов. Согласно предл. 2.1 каждый многочлен $f \in S^n V^*$ на векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ характеристики 0 является образом единственной симметричной n-линейной формы $\widetilde{f} \in \mathrm{Sym}^n(V^*) \subset (V^*)$ при факторизации $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ по идеалу $\mathcal{J}_{\mathrm{sym}}$. Форма $\widetilde{f} : V \times V \times \dots \times V \to \Bbbk$ называется *полной поляризацией* многочлена f и однозначно определяется тем, что

$$\forall\, v \in V \quad f(v) = \tilde{f}(v, v, \dots, v)\,. \tag{2-19}$$

Упражнение 2.8. Проверьте соотношение (2-19) для всех базисных мономов

$$f = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}\,.$$

Упражнение 2.9. Убедитесь, что сопоставление многочленам $f \in S^n V$ и $g \in S^n V^*$ полной свёртки их полных поляризаций $\widetilde{f} \in V^{\otimes m}$ и $\widetilde{g} \in V^{*\otimes m}$ задаёт двойственность между $S^n V$ и $S^n V^*$, и мономы, составленные из элементов двойственных базисов пространств V и V^*, спариваются при этом по правилу

$$\left\langle e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_d^{m_d} \, , \, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_d^{k_d} \right\rangle = \\ = \begin{cases} (m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_d!)/n! & \text{, если } k_i = m_i \text{ при всех } i, \\ 0 & \text{в остальных случаях}. \end{cases} \tag{2-20}$$

При $n = 2$ мы получаем полную поляризацию квадратичной формы, описываемую форм. (1-12) на стр. 14. Аналогичные формулы для поляризации имеются для любой степени n.

Предложение 2.2

Если $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, полная поляризация $\widetilde{f}$ многочлена $f \in S^n V^*$ удовлетворяет соотношению

$$n! \cdot \widetilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{I \subsetneq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} f\Big(\sum_{i \notin I} v_i\Big), \tag{2-21}$$

где последнее суммирование ведётся по всем собственным подмножествам $I \subsetneq \{1, 2, \dots, n\}$, включая $I = \varnothing$, для которого $|\varnothing| = 0$. Например, при $n = 3$

$$6\, \widetilde{f}(u, v, w) = f(u + v + w) - f(u + v) - f(u + w) - f(v + w) + f(u) + f(v) + f(w)\,.$$

Доказательство. Условимся обозначать через $\widetilde{f}(v_1^{m_1}, v_2^{m_2}, \dots, , v_k^{m_k})$ значение формы $\widetilde{f}$ на m_1 векторах v_1, m_2 векторах v_2 и т. д., где общее число аргументов $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ (т. к. форма $\widetilde{f}$ симметрична, порядок аргументов не важен). В силу линейности $\widetilde{f}$ по каждому аргументу для любых векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ имеет место следующий аналог мультиномиальной формулы:

$$f(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = \widetilde{f}(v_1 + \cdots + v_n, v_1 + \cdots + v_n, \dots, v_1 + \cdots + v_n) = \\ = \sum_{m_1 m_2 \dots m_n} \frac{n!}{m_1!\, m_2! \cdots m_n!} \widetilde{f}(v_1^{m_1}, v_2^{m_2}, \dots, , v_n^{m_n}), \tag{2-22}$$

где суммирование ведётся по всем наборам из n неотрицательных целых чисел $m_1, m_2, \dots, m_n$ с суммой n. Ровно одно слагаемое в (2-22) завит от всех n векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$, и оно равно $n!\, \widetilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Все остальные слагаемые зависят от меньшего числа векторов, причём сумма всех слагаемых, не содержащие векторов v_i, где i пробегает некоторое непустое собственное подмножество индексов $I \nsubseteq \{1, 2, \dots, n\}$, получится если положить в (2-22) все $v_i = 0$ для $i \in I$. Таким образом, по формуле включения-исключения

$$n! \cdot \widetilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n) = f\big(\sum_\nu v_\nu\big) - \sum_{\{i\}} f\big(\sum_{\nu \neq i} v_\nu\big) + \sum_{\{i,j\}} f\big(\sum_{\nu \neq i,j} v_\nu\big) - \sum_{\{i,j,k\}} f\big(\sum_{\nu \neq i,j,k} v_\nu\big) + \cdots .$$

□

2.2.1. Производные и поляры. Фиксируем вектор $v \in V$ и рассмотрим отображение свёртки первого тензорного сомножителя в произведении $V^{*\otimes n}$ с вектором v

$$c_v^1 : V^{*\otimes n} \to V^{*\otimes(n-1)} .$$

На языке n-линейных форм на пространстве V это отображение фиксирует вектор $v \in V$ в качестве первого аргумента n-линейной формы. Применяя его к полной поляризации $\widetilde{f}$ многочлена $f \in S^n(V^*)$ и затем проектируя результат из $V^{*\otimes(n-1)}$ в $S^{n-1}(V^*)$, мы получаем линейное отображение $\mathrm{pl}_v : S^n V^* \to S^{n-1} V^*$, которое включается в качестве нижней горизонтальной стрелки в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{*\otimes n} \supset \mathrm{Sym}^n V^* \arrow[r, "c_v^1"] \arrow[d] & \mathrm{Sym}^{n-1} V^* \subset V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d] \\ S^n V^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_v"] & S^{n-1} V^* \end{tikzcd}$$

и переводит многочлен $f(x) = \widetilde{f}(x, x, \dots x) \in S^n(V^*)$ в многочлен

$$\mathrm{pl}_v f(x) = \widetilde{f}(v, x, \dots x) \in S^{n-1}(V^*) , \tag{2-23}$$

который называется *полярой* вектора v относительно f и линейно зависит как от многочлена f, так и от вектора $v \in V$. При $n = 2$ эта конструкция задаёт полярное преобразование относительно квадрики $f = 0$ в $\mathbb{P}(V)$ и сопоставляет вектору v уравнение его полярной гиперплоскости.

В двойственных базисах $e_1, e_2, \dots, e_d \in V$ и $x_1, x_2, \dots, x_d \in V^*$ отображение свёртки по первому индексу с базисным вектором $e_i \in V$ переводит базисный симметрический моном (2-15) в точно такой же базисный моном, но содержащий $(m_i - 1)$ множителей e_i, или в нуль, если $m_i = 0$. Поэтому, по формуле (2-17) из предл. 2.1

$$\mathrm{pl}_{e_i} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d} = \frac{m_i}{n}\, x_1^{m_1} \cdots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i - 1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \cdots x_d^{m_d} = = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x_i} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d} .$$

Из линейности $\mathrm{pl}_v f$ по v и f мы получаем, что поляра вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ относительно многочлена f есть делённая на $\deg f$ *производная* от f в направлении вектора v:

$$\mathrm{pl}_v f = \frac{1}{\deg(f)}\, \partial_v f = \frac{1}{\deg(f)} \sum \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} .$$

Отметим, что из сказанного немедленно вытекает независимость правой части этой формулы от выбора двойственных координат в V и V^*, а также коммутирование частных производных между собой: $\partial_u \partial_w = \partial_w \partial_u$ и замечательное равенство между кратными производными

$$m!\ \frac{\partial^m f}{\partial u^m}(w) = n!\ \widetilde{f}(\underbrace{u, u, \dots, u}_{m}, \underbrace{w, w, \dots, w}_{n}) = (n-m)!\ \frac{\partial^{n-m} f}{\partial w^{n-m}}(u) , \tag{2-24}$$

для любых $u, w \in V$, любого $f \in S^n V^*$ и любого m в пределах $0 \leqslant m \leqslant n$.

Упражнение 2.10. Докажите правило Лейбница: $\partial_v(f \cdot g) = \partial_v(f) \cdot g + f \cdot \partial_v(g)$.

Поскольку форма $\widetilde{f}$ симметрична, аргументы в среднем члене формулы (2-24) можно писать в любом порядке. Условимся для упрощения обозначений писать

$$\widetilde{f}(u^m, w^{n-m}) ,$$

когда какие-то m аргументов формы $\widetilde{f}$ равны u, а остальные $(n-m)$ равны w (не важно в каком порядке). Тогда из полилинейности и симметричности $\widetilde{f}$ дословно тем же рассуждением, что и формула Ньютона для раскрытия скобок в биноме $(u+w)^n$, выводится равенство

$$\widetilde{f}(u+w,\, u+w,\, \dots,\, u+w) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \widetilde{f}(u^m, w^{n-m}),$$

где $n = \deg f$. С учётом (2-24) его можно переписать как *разложение Тейлора*: для любого многочлена f и векторов u, w имеется *точное* равенство

$$f(u+w) = \sum_{m=0}^{\deg f} \frac{1}{m!}\, \partial_w^m f(u)\,, \tag{2-25}$$

правая часть которого симметрична по u и w в силу соотношения (2-24).

Упражнение 2.11. Покажите, что значение полной поляризации многочлена $f \in S^n V^*$ на заданном наборе векторов описывается в терминах частных производных формулой

$$\forall v_1, v_2, \dots, v_n \in V \quad \widetilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \partial_{v_1} \partial_{v_2} \dots \partial_{v_n} f\,.$$

2.2.2. Поляры и касательные к проективной гиперповерхности. Рассмотрим проективную гиперповерхность $S \subset \mathbb{P}(V)$, заданную однородным уравнением $F(x) = 0$ степени n. Пересечение S с произвольной прямой $\ell = (pq)$ состоит из таких точек $\lambda p + \mu q \in \ell$, что отношение $(\lambda : \mu)$ удовлетворяет уравнению $f(\lambda, \mu) = 0$, которое получается подстановкой $x = \lambda p + \mu q$ в уравнение гиперповерхности $F(x) = 0$. Если основное поле алгебраически замкнуто, и прямая ℓ не лежит на S целиком (что означало бы тождественное обращение $f(\lambda, \mu)$ в нуль), то ℓ пересекает S в конечном наборе точек $a_1, a_2, \dots, a_k$, причём если учитывать каждую из них с надлежащей кратностью, то сумма этих кратностей будет равна n. Для этого кратность пересечения поверхности S с прямой ℓ в точке $a_i = (\alpha_i' : \alpha_i'')$ надо определить как показатель, с которым линейный множитель

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \alpha_i' & \alpha_i'' \end{pmatrix} = (\alpha_i'' \lambda - \alpha_i' \mu)$$

входит в разложение $f(\lambda, \mu) = \prod (\alpha_i'' \mu - \alpha_i' \lambda)^{s_i}$ однородного многочлена $f(\lambda, \mu)$ на линейные множители. Показатель s_i называется *локальным индексом пересечения* поверхности S с прямой ℓ в точке a_i и обозначается $(S, \ell)_{a_i}$. Прямая ℓ называется *касательной* к S в точке $a \in \ell \cap S$, если $(S, \ell)_a \geqslant 2$ или $\ell \subset S$.

По формуле Тэйлора (2-25) коэффициент при $\lambda^{n-m} \mu^m$ в уравнении $f(\lambda, \mu) = 0$ равен

$$\binom{n}{m} \widetilde{f}(p^{n-m}, q^m) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F}{\partial q^i}(p) = \frac{1}{(n-m)!} \frac{\partial^{n-m} F}{\partial p^{n-m}}(q)\,. \tag{2-26}$$

и если $p \in S$, то разложение Тейлора в окрестности p начинается как

$$F(p + tq) = t \binom{d}{1} \widetilde{F}(p^{n-1}, q) + t^2 \binom{d}{2} \widetilde{F}(p^{n-2}, q^2) + \cdots\,.$$

Таким образом, прямая pq, проходящая через точку $p \in S$, касается S в этой точке тогда и только тогда, когда $\widetilde{F}(p^{n-1}, q) = 0$.

Если $F(p^{n-1},x) \not\equiv 0$ как линейная форма от x, то точки q, для которых прямая (pq) касается S в точке p, заметут в $\mathbb{P}(V)$ гиперплоскость, задаваемую линейным уравнением $F(p^{n-1},x) = 0$. Она называется *касательным пространством* к S в p и обозначается T_pS. Точка p называется в этом случае *гладкой* точкой поверхности S.

Если $F(p^{n-1},x) \equiv 0$, то поверхность S называется *особой* в точке p, а p называется *особой точкой* поверхности S. Согласно (2-26), коэффициентами линейной формы

$$F(p^{n-1},x) = \partial_x F(p)$$

являются частные производные от F, вычисленные в точке p, так что особость p равносильна занулению в p всех частных производных от уравнения гиперповерхности. В этом случае любая проходящая через p прямая имеет с S как минимум двукратное пересечение в p, и касательное пространство T_pS, понимаемое как объединение всех прямых, касающихся S в точке p, совпадает со всем пространством $\mathbb{P}(V)$.

Если q — гладкая точка на S или любая точка вне S, то замыкание множества точек касания с S всевозможных касательных, опущенных на S из точки q образует на поверхности S фигуру, называемую *контуром* поверхности S, видимым из точки q. Видимый контур высекается из S полярной к q относительно S гиперповерхностью $(n-1)$-й степени

$$\mathrm{pl}_q S = \{y \in \mathbb{P}(V) \mid \widetilde{F}(q, y^{n-1}) = 0\}, \tag{2-27}$$

автоматически отличной от всего пространства. Действительно, условие касания прямой (qy) и поверхности S в точке y записывается уравнением $\widetilde{F}(y^{n-1},q) = 0$. Если $G(y) = \widetilde{F}(y^{n-1},q)$ является нулевым многочленои от y, то, полагая $y = q$, получаем $F(q) = 0$, откуда $q \in S$. С другой стороны, т. к. все производные от G в этом случае тоже нулевые, мы получаем равенство

$$\widetilde{F}(q^{n-1},y) = \widetilde{G}(q^{n-2},y) = \frac{\partial^{n-2}}{\partial q^{n-2}} G(y) \equiv 0,$$

означающее, что q — особая точка поверхности S.

Гиперповерхность $\mathrm{pl}_q^{n-r} = \left\{y \in \mathbb{P}(V) \mid \widetilde{F}(q^{n-r}, y^r) = 0\right\}$ называется *полярой r-й степени* поверхности S относительно точки q. Если точка $q \in S$ гладкая, то поляра первой степени это касательная гиперплоскость T_qS к S в точке q, а каждая поляра степени $r \geqslant 2$ это поверхность степени r, которая проходит через q и имеет те же поляры степеней $< r$ относительно точки q, что и исходная поверхность S. Так, квадратичная поляра это проходящая через q квадрика, имеющая в точке q ту же касательную гиперплоскость, что и S, кубическая поляра это проходящая через q кубическая поверхность с той же касательной плоскостью и квадратичной полярой, что и S, и т. д.

2.3. Многообразие Веронезе $V(n,k)$ является образом проективного пространства $\mathbb{P}_k = \mathbb{P}(V^*)$ при *отображении Веронезе* n-той степени

$$\nu_n : \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}(S^n V^*), \quad \varphi \mapsto \varphi^n, \tag{2-28}$$

т. е. как множество классов пропорциональности таких однородных многочленов степени n от k переменных, которые являются чистыми n-тыми степенями линейных форм. Иначе многообразие Веронезе можно описать как множество классов пропорциональности многочленов с одномерным линейным носителем, где под *линейным носителем* $\mathrm{Supp}(f)$ многочлена $f \in S^n V^*$

понимается минимальное подпространство $W \subset V^*$ такое, что $f \in S^n W^*$. Очевидно, что это подпространство совпадает с линейным носителем полной поляризации $\widetilde{f} \in \mathrm{Sym}^n V^*$ многочлена f. По теор. 2.1 последний является образом отображения $V^{\otimes(n-1)} \to V^*$ задаваемого полной свёрткой[1] с $\widetilde{f}$. Этот образ порождается всеми линейными формами, которые можно получить из f всевозможными $(n-1)$-кратными дифференцированиями вида

$$\frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}} \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} \cdots \frac{\partial^{m_d}}{\partial x_d^{m_d}} f(x), \tag{2-29}$$

с $\sum m_\nu = n-1$. Вклад в коэффициент при x_i у линейной формы (2-29) даёт ровно один коэффициент многочлена f — тот, что стоит при мономе $x_1^{m_1} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i+1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \dots x_d^{m_d}$. Поэтому, если записать многочлен f в виде

$$f = \sum_{\nu_1+\dots+\nu_d=n} \frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\cdots\,\nu_d!}\, a_{\nu_1\nu_2\dots\nu_d}\, x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_d^{\nu_d}, \tag{2-30}$$

то линейная форма (2-29) будет иметь вид

$$n! \cdot \sum_{i=1}^{d} a_{m_1\dots m_{i-1}(m_i+1)m_{i+1}\dots m_d} x_i \tag{2-31}$$

и всего таких форм будет $\binom{n+d-2}{d-1}$ (количество способов разложить $n-1$ в сумму d занумерованных целых неотрицательных слагаемых $m_1, m_2, \dots, m_d$).

Предложение 2.3
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ с $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$ однородный многочлен (2-30) тогда и только тогда является n-той степенью линейной формы, когда ранг $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$-матрицы, составленной из коэффициентов линейных форм (2-31), равен единице. В этом случае форма φ, такая что $\varphi^n = f$, также пропорциональна формам (2-31).

Доказательство. В самом деле, из равенства $f = \varphi^n$ вытекает, что $\mathrm{Supp}(f)$ — одномерное пространство, порождённое формой φ , и тогда все формы (2-31) пропорциональны форме φ. Наоборот, если все формы (2-31) пропорциональны друг другу, то $\mathrm{Supp}(f)$ — одномерное пространство $U = \Bbbk \cdot \psi$, порождённое какой-то формой $\psi \in V^*$. Поскольку $S^n U = \Bbbk \cdot \psi^n$ тоже одномерно, условие $f \in S^n U$ означает, что $f = \lambda \psi^n$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$. Если $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, последнее равенство переписывается как $f = \varphi^n$ с $\varphi = \sqrt[n]{\lambda} \cdot \psi$. □

Следствие 2.1
Образ вложения Веронезе (2-28) является проективным алгебраическим многообразием, задаваемым системой квадратных уравнений — равенством нулю всех 2×2 миноров $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$ матрицы, составленной из коэффициентов линейных форм (2-31). □

Пример 2.1 (опять кривая Веронезе)
Однородный многочлен от двух переменных

$$f(x_0, x_1) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \binom{n}{k} \cdot x_0^{n-k} x_1^k$$

[1]В силу симметричности тензора $\widetilde{f}$ отображения свёртки из теор. 2.1 не зависят от выбора последовательности индексов J, по которым производится свёртка.

тогда и только тогда имеет вид $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n$, когда

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n_1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = 1\,,$$

что выражается системой квадратных уравнений

$$\det\begin{pmatrix} a_i & a_j \\ a_{i+1} & a_{j+1} \end{pmatrix} = 0$$

на коэффициенты a_i многочлена f.

2.4. Поляризация грассмановых многочленов. Хотя грассманов многочлен $\omega \in \Lambda V^*$ и не задаёт никакой функции на векторах двойственного пространства V, большая часть сказанного в предыдущем разделе имеет смысл и для грассмановых многочленов. А именно, по предл. 2.1 над полем характеристики нуль для любого однородного грассманова многочлена n-той степени $\omega \in \Lambda^n V^*$ существует единственная n-линейная кососимметричная форма $\widetilde{\omega} \in \operatorname{Skew}^n V^*$, которая проектируется в ω при факторизации $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ по соотношениям антикоммутирования. Форма $\widetilde{\omega}$ называется *полной поляризацией* грассманова многочлена ω. По формуле (2-18) из предл. 2.1 полная поляризация базисного грассманова монома $\omega = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ равна

$$\widetilde{\omega} = \frac{1}{n!}\, e_{\langle i_1, i_2, \dots, i_n\rangle} = \operatorname{alt}_n\left(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_n}\right)\,. \tag{2-32}$$

Как и в симметрическом случае, полная поляризация индуцирует двойственность между пространствами грассмановых многочленов на двойственных пространствах, при которой результатом спаривания между многочленами

$$\omega \in \Lambda^n V^* \quad \text{и} \quad \tau \in \Lambda^n V$$

по определению считается полная свёртка их полных поляризаций $\langle\, \widetilde{\omega}\,,\ \widetilde{\tau}\,\rangle$.

Упражнение 2.12. Покажите, что результатом спаривания двух базисных грассмановых мономов $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ и $x_J = x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n}$ от двойственных базисных векторов пространств V и V^* (оба набора индексов I и J строго возрастают) является $1/n!$, когда $i_\nu = j_\nu$ для всех ν, и нуль в остальных случаях.

2.4.1. Частные производные в грассмановой алгебре. Рассмотрим отображение

$$\operatorname{pl}_v \,:\, \Lambda^n V^* \to \Lambda^{n-1} V^*\,,$$

сопоставляющее грассманову многочлену $\omega \in \Lambda^n V^*$ проекцию во внешнюю алгебру тензора, получающегося свёрткой по первому тензорному сомножителю полной поляризации $\widetilde{\omega} \in V^{*\otimes n}$ с вектором $v \in V$. Оно включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{*\otimes n} \supset \operatorname{Skew}^n V^* \arrow[r, "c_v^1"] \arrow[d] & \operatorname{Skew}^{(n-1)} V^* \subset V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d] \\ \Lambda^n V^* \arrow[r, "\operatorname{pl}_v"] & \Lambda^{n-1} V^* \end{tikzcd}$$

горизонтальные стрелки которой суть проекции во внешнюю алгебру (отображения факторизации по соотношениям антикоммутирования), а верхняя горизонтальная стрелка — свёртка первого тензорного сомножителя с вектором v. По аналогии с симметрическим случаем, определим *грассманову производную* кососимметричного многочлена $\omega \in \Lambda^n V^*$ в направлении вектора $v \in V$ формулой

$$\partial_v \omega \stackrel{\text{def}}{=} \deg \omega \cdot \mathrm{pl}_v \omega \,.$$

Из билинейности $\mathrm{pl}_v \omega$ по v и ω мы сразу же получаем, что производная в направлении вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ является линейной комбинацией частных производных вдоль базисных векторов:

$$\partial_v = \sum \alpha_i \partial_{e_i} \,.$$

Если ω не зависит от x_j, то из определений очевидно, что $\partial_{e_j} \omega = 0$. Поэтому ненулевой вклад в производную от базисного монома $\omega = x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n}$ дадут только дифференцирования $\partial_{e_{i_1}}, \partial_{e_{i_2}}, \dots, \partial_{e_{i_n}}$. Из формулы (2-32) вытекает, что

$$\partial_{e_{i_1}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n} = x_{i_2} \wedge x_{i_3} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}$$

вне зависимости от того, образуют ли неповторяющиеся индексы $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ строго возрастающую последовательность или нет. Таким образом, частная производная грассманова монома по направлению первого слева сомножителя действует как $\partial/\partial x_{i_1}$, т. е. просто уничтожает этот сомножитель. При дифференцировании по направлениям прочих сомножителей возникают знаки:

$$\begin{aligned}
\partial_{e_{i_k}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n} &= \partial_{e_{i_k}} (-1)^{k-1} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n} = \\
&= (-1)^{k-1} \partial_{e_{i_k}} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n} = \\
&= (-1)^{k-1} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n} \,,
\end{aligned}$$

т. е. производная грассманова монома по его k-той слева переменной рана $(-1)^{k-1}\partial/\partial x_{i_k}$. Удобно воспринимать это явление как *грассманово правило Лейбница*:

Упражнение 2.13. Докажите, что грассмановы частные производные удовлетворяют грассманову правилу Лейбница: $\partial_v(\omega \wedge \tau) = \partial_v(\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \partial_v(\tau)$.

Поскольку $\widetilde{\omega}(u, w, *, \dots, *) = -\widetilde{\omega}(w, u, *, \dots, *)$ операции pl_u и pl_w антикоммутируют относительно композиции: $\mathrm{pl}_u \mathrm{pl}_w \omega = -\mathrm{pl}_w \mathrm{pl}_u \omega$. Поэтому грассмановы частные производные также *антикоммутируют*: $\partial_u \partial_w = -\partial_w \partial_u$. В частности, $\partial_v^2 \omega \equiv 0$ для любых v и ω.

2.4.2. Линейный носитель грассманова многочлена $\omega \in \Lambda^n V$ определяется как минимальное подпространство $W \subset V$, такое что $\omega \in \Lambda^n W$, и обозначается $\mathrm{Supp}(\omega)$. Очевидно, что носитель ω совпадает с носителем поляризации $\widetilde{\omega}$, который по теор. 2.1 является образом отображения $V^{*\otimes(n-1)} \to V$, задаваемого полной свёрткой с тензором $\widetilde{\omega}$. В виду кососимметричности тензора $\widetilde{\omega}$ различные отображения свёртки из теор. 2.1 отличаются друг от друга лишь знаком, и поэтому неважно, какую из свёрток взять. Итак, линейный носитель грассманова многочлена степени n порождается векторами

$$\partial_J \omega = \partial_{j_1} \partial_{j_2} \ldots \partial_{j_{n-1}} \omega \,,$$

где $\partial_j = \partial_{x_j}$ и $J = (j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$ пробегает всевозможные наборы из $(n-1)$ попарно различных индексов[1]. Если разложить ω в сумму мономов

$$\omega = \sum_I a_I e_I = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n} \,,$$

[1] В силу кососимметричности грассмановых частных производных достаточно ограничиться только строго возрастающими наборами.

где коэффициенты $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ кососимметричны по $i_1, i_2, \dots, i_n$, то ненулевой вклад в $\partial_J \omega$ дадут только мономы $a_I e_I$ с $I \supset J$. В результате, с точностью до общего знака, мы получим

$$\partial_J \omega = \pm \sum_{i \notin J} \alpha_{j_1 j_2 \dots j_{n-1} i} \, e_i \,. \tag{2-33}$$

Отсюда получается, например, следующий критерий разложимости грассманова многочлена.

Предложение 2.4
Следующие условия на грассманов многочлен $\omega = \sum\limits_{i_1 i_2 \dots i_n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$, где все коэффициенты $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ кососимметричны по индексам $i_1, i_2, \dots, i_n$, эквивалентны друг другу:

1) $\omega = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n$ для некоторых $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$
2) $u \wedge \omega = 0 \;\; \forall\, u \in \mathrm{Supp}(\omega)$
3) для любых двух наборов неповторяющихся индексов $i_1, i_2, \dots, i_{m+1}$ и $j_1, j_2, \dots, j_{m-1}$ выполнено *соотношение Плюккера*[1] $\sum\limits_{\nu=1}^{m+1} (-1)^{\nu-1} a_{j_1 \dots j_{m-1} i_\nu} a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}} = 0$.

Доказательство. Первое условие означает, что многочлен ω лежит в самой старшей внешней степени $\Lambda^{\dim \mathrm{Supp}(\omega)}$ своей линейной оболочки $\mathrm{Supp}(\omega)$. Его равносильность второму условию вытекает из следующего общего факта:

Упражнение 2.14. Докажите, что $\omega \in \Lambda U$ тогда и только тогда однороден степени $\dim U$, когда $u \wedge \omega = 0$ для всех $u \in U$.

Соотношение Плюккера — это координатная запись второго условия для вектора u из формулы (2-33), констатирующая обнуление коэффициента при $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_{m+1}}$ в произведении $\partial_{j_1 \dots j_{m-1}} \omega \wedge \omega$. Поскольку векторы (2-33) линейно порождают пространство $\mathrm{Supp}(\omega)$, этих соотношений достаточно для выполнения второго, а с ним и первого условий предложения. □

Упражнение 2.15. Выпишите соотношения Плюккера для грассмановой квадратичной формы ω от четырёх переменных и выведите из них, что такая форма тогда и только тогда является произведением двух линейных, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

2.5. Многообразие Грассмана $\mathbf{Gr}(m, V)$ определяется как множество всех m-мерных векторных подпространств в заданном векторном пространстве V. Для d-мерного координатного пространства $V = \Bbbk^d$ обозначение $\mathrm{Gr}(m, \Bbbk^d)$ сокращается до $\mathrm{Gr}(m, d)$. Например, $\mathrm{Gr}(1, n+1) = \mathbb{P}_n$ и $\mathrm{Gr}(n, n+1) = \mathbb{P}_n^\times$ суть двойственные проективные пространства. Вообще, для d-мерного пространства V двойственность $U \leftrightarrow \mathrm{Ann}\, U$ из n° 1.5 на стр. 19 задаёт каноническое отождествление $\mathrm{Gr}(m, V) \simeq \mathrm{Gr}(d - m, V^*)$.

2.5.1. Плюккерово вложение. Грассманиан $\mathrm{Gr}(m, V)$ вкладывается в проективное пространство $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ при помощи *отображения Плюккера*

$$\mathfrak{u} : \mathrm{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V), \quad U \mapsto \Lambda^m U, \tag{2-34}$$

[1]«крышка» в $a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}}$ означает, что индекс i_ν следует пропустить

переводящего m-мерное подпространство $U \subset V$ в одномерное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$. Если U порождается векторами $u_1, u_2, \dots, u_m$, то с точностью до пропорциональности

$$\mathfrak{u}(U) = u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_m .$$

Переход к другому базису в U, скажем, состоящему из векторов

$$w_i = \sum a_{ij} u_j ,$$

заменяет $u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_m$ на $w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_m = \det\left(a_{ij}\right) \cdot u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_m$.

Предложение 2.5

Отображение Плюккера (2-34) вкладывает грассманиан в проективное пространство в качестве алгебраического многообразия, задаваемого квадратичными соотношениями Плюккера из формулы (3) в предл. 2.4 на стр. 34.

Доказательство. Образом плюккерова отображения являются однородные разложимые грассмановы многочлены степени m. Согласно п. (3) из предл. 2.4 этот образ является пересечением квадрик. Отображение Плюккера инъективно, поскольку при $U \neq W$ в V имеется базис

$$v_1, v_2, \dots, v_r,\ u_1, u_2, \dots, u_{m-r},\ w_1, w_2, \dots, w_{m-r},\ v_{2m-r},\ v_{2m-r+1},\ \dots\ ,\ v_n ,$$

в котором $v_1, v_2, \dots, v_r$ образуют базис пересечения $U \cap W$, а

$$v_1, v_2, \dots, v_r,\ u_1, u_2, \dots, u_{m-r} \quad \text{и} \quad v_1, v_2, \dots, v_r,\ w_1, w_2, \dots, w_{m-r}$$

составляют базисы в U и W, так что отображение Плюккера сопоставляет им различные *базисные* мономы $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_{m-r} \neq v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_{m-r}$ алгебры ΛV. □

Замечание 2.1. С алгебраической точки зрения как многообразие Веронезе $V(n, k)$, так и грассманиан $\mathrm{Gr}(n, k)$ состоят из классов пропорциональности *максимально вырожденных* ненулевых однородных многочленов степени n от k переменных, если поимать под максимальной вырожденностью минимальность ранга. Минимально возможный ранг обычного коммутативного полинома равен единице, и всякий многочлен степени m и ранга 1 есть чистая m-тая степень линейной формы. Минимально возможный ранг Грассманова однородного полинома степени m равен m, и всякий такой полином является произведением m различных линейных форм.

2.5.2. Плюккеровы координаты.

На координатном языке точку $U \in \mathrm{Gr}(m, d)$ можно задавать $m \times d$ матрицей X_U, по строкам которой написаны координаты каких-нибудь базисных векторов $u_1, u_2, \dots, u_m$ пространства U в стандартном базисе $e_1, e_2, \dots, e_d$ координатного пространства $\Bbbk^d$. Разумеется, такое представление не единственно, и две матрицы $X, Y \in \mathrm{Mat}_{m\times d}(\Bbbk)$ максимального ранга m тогда и только тогда задают одно и то же подпространство $U \subset \Bbbk^d$, когда они получаются друг из друга левым умножением на обратимую матрицу $C \in \mathrm{GL}_m(\Bbbk)$, по строкам которой стоят коэффициенты разложений строк матрицы X по базису в U, образованному строками матрицы Y. Иначе говоря, грассманиан $\mathrm{Gr}(m, d)$ представляет собой фактор[1] пространства $m \times d$-матриц максимального ранга m по действию на нём группы $\mathrm{GL}_m(\Bbbk)$ левыми умножениями. Обратите внимание, что при $m = 1$ это описание в точности

[1]Т. е. пространство орбит.

совпадает с описанием точек проективного пространства $\mathbb{P}_{d-1} = \mathrm{Gr}(1, d)$ при помощи однородных координат, т. е. в виде ненулевых строк $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathrm{Mat}_{1\times d}$ с точностью до умножения на ненулевые константы $\lambda \in \Bbbk^* = \mathrm{GL}_1(\Bbbk)$.

Упражнение 2.16. Убедитесь, что грассманово произведение $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$ векторов $u_i = \sum e_j \cdot x_{ij}$ раскладывается по базису $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ пространства $\Lambda^m \Bbbk^d$ как $\sum e_I \cdot \det X_I$, где X_I означает $m \times m$-подматрицу матрицы $X = \left(x_{ij}\right)$, образованную столбцами с номерами $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$.

Таким образом, плюккерово вложение $\mathfrak{u} : \mathrm{Gr}(m, d) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m \Bbbk^d)$ переводит линейную оболочку строк матрицы $X \in \mathrm{Mat}_{m\times d}(\Bbbk)$ ранга m в точку, однородные координаты которой суть всевозможные $m \times m$-миноры матрицы X. Этот набор миноров называется *плюккеровыми координатами* подпространства $U \subset \Bbbk^d$, натянутого на строки матрицы X.

Упражнение 2.17. Убедитесь, что при замене X на CX с $C \in \mathrm{GL}_m(\Bbbk)$ плюккеровы координаты умножаются на $\det C$.

2.5.3. Стандартное аффинное покрытие и аффинные координаты. Аналогом i-той стандартной аффинной карты U_i проективного пространства[1] $\mathbb{P}_n = \mathrm{Gr}(1, n)$ на произвольном грассманиане $\mathrm{Gr}(m, d)$ является множество $U_I \subset \mathrm{Gr}(m, d)$, образованное всеми подпространств $U \subset V$, матрица X которых содержит невырожденную $m \times m$-подматрицу X_I в столбцах с номерами $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$. Умножая такую матрицу X слева на $X_I^{-1} \in \mathrm{GL}_m$, можно сделать подматрицу X_I единичной. Матрица $A_I(U) = X_I^{-1}X$ зависит только от I и U, и подпространство U восстанавливается по ней однозначно. Поэтому $m(d - m)$ её элементов $a_{ij}^{(I)}(U)$ с $j \notin I$ называются *стандартными аффинными координатами* подпространства U в карте U_I.

Карта U_I является полным прообразом относительно плюккерова вложения (2-34) стандартной аффинной карты $U_I \subset \mathbb{P}(\Lambda^m V)$, в которой отлична от нуля I-тая плюккерова координата[2].

Иначе можно сказать, что карта U_I, состоит из всех таких подпространств $U \subset V$, которые изоморфно проектируются на I-тое координатное подпространство $E_I \subset V$, натянутое на базисные векторы $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}$, вдоль дополнительного координатного подпространства $E_J \subset V$, натянутого на остальные базисные векторы e_j с $j \notin I$. Если взять в качестве базиса такого подпространства U прообразы базисных векторов e_i с $i \in I$ при упомянутой проекции, то матрица X, отвечающая этому базису, как раз и совпадёт с матрицей $A_I(U)$, имеющей единичную подматрицу в I-столбцах.

2.5.4. Клеточное разбиение. Метод Гаусса показывает, что любое подпространство $U \subset V$ обладает *единственным* базисом $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, матрица координат которого имеет *строгий ступенчатый вид*[3].

Упражнение 2.18. Докажите, что различные строго ступенчатые матрицы задают разные подпространства в V.

Таким образом возникает биекция между точками гассманиана $\mathrm{Gr}(m, d)$ и строгими ступенчатыми матрицами ранга m и размера $m \times d$. Строгие ступенчатые матрицы, ступеньки которых

[1] напомним, что она состоит из всех векторов, i-тая координата которых отлична от нуля, так что её можно сделать равной 1, умножая на подходящую константу

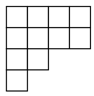
[2] Т. е. координата вдоль вектора $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$.

[3] Т. е. самый левый ненулевой элемент каждой строки равен единице, располагается строго правее, чем в предыдущей строке, и является единственным ненулевым элементом в своём столбце.

располагаются в столбцах с возрастающими номерами $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, образуют аффинное пространство размерности

$$m\,(d-m) - \sum_{\nu=1}^{m}(i_\nu - \nu) = \dim \mathrm{Gr}(m,d) - \left(|I| - \frac{m\,(m+1)}{2}\right)\,.$$

Весь грассманиан $\mathrm{Gr}(m, d)$ является дизъюнктным объединением $\binom{d}{m}$ таких аффинных пространств, отвечающих различным выборам I. Эти аффинные пространства называются *открытыми* или *аффинными клетками Шуберта* . Альтернативным общепринятым способом нумерации клеток Шуберта является их индексация диаграммами Юнга[1] $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, умещающимися в прямоугольнике $m \times (d-m)$. При этом длина ν-той сверху строки λ_ν указывает на сколько клеток самый левый ненулевой элемент в ν-той *снизу* строке ступенчатой матрицы сдвинут вправо от самого левого возможного своего положения, т. е. углы ступенек в матрице типа $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ находятся в столбцах с номерами $i_\nu = (m+1-\nu) + \lambda_{m+1-\nu}$. Открытая клетка Шуберта, отвечающая диаграмме λ, обозначается $\mathring{\sigma}_\lambda$. Обратите внимание, что коразмерность такой клетки в грассманиане в точности равна количеству клеток $|\lambda|$ в диаграмме λ. Например, диаграмма



отвечает 13-мерной аффинной клетке Шуберта $\mathring{\sigma}_{4,4,2,1}$ $\mathrm{Gr}(4, 10)$, образованной подпространствами $U \subset \Bbbk^{10}$, порождёнными строками строгих ступенчатых матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}.$$

Пустой диаграмме $(0, 0, 0, 0)$ отвечает самое левое из всех возможных положений ступенек, т. е. 24-мерное пространство матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

представляющее собою стандартную аффинную карту $U_{(1,2,3,4)} \subset \mathrm{Gr}(4, 10)$). Самая большая диаграмма — прямоугольник $(6, 6, 6, 6)$ — описывает нульмерное аффинное пространство, ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] Т. е. выровненных по левому краю горизонтальных клетчатых полосочек, длины которых образуют невозрастающую сверху вниз последовательность $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_m \geqslant 0$.

с самым правым из возможных расположением ступенек. Над конечным полем $\Bbbk$ из q элементов разбиение $\mathrm{Gr}(m,d) = \bigsqcup \mathring{\sigma}_\lambda$ влечёт формулу

$$\binom{d}{m}_q = q^{m(d-m)} \sum_\lambda q^{-|\lambda|},$$

где суммирование происходит по всем диаграммам Юнга, умещающимся в прямоугольнике $m \times (d-m)$, а

$$\binom{d}{m}_q \overset{\text{def}}{=} \frac{(q^d-1)(q^d-q)\cdots(q^d-q^{m-1})}{(q^m-1)(q^d-q)\cdots(q^m-q^{m-1})}$$

обозначает *Гауссов q-биномиальный коэффициент*.

2.5.5. Квадрика Плюккера и прямые в $\mathbb{P}_3$. Простейший грассманиан, не являющийся проективным пространством, это грассманиан $\mathrm{Gr}(2,4) = \mathrm{Gr}(2,V)$ двумерных векторных подпространств в четырёхмерном векторном пространстве $V \simeq \Bbbk^4$ или, что то же самое, множество прямых в трёхмерном проективном пространстве $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$. Плюккерово вложение

$$\mathfrak{u} : \mathrm{Gr}(2,V) \hookrightarrow \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \tag{2-35}$$

отождествляет его с множеством разложимых бивекторов $\omega \in \Lambda^2 V$.

Упражнение 2.19. Для любого пространства[1] V убедитесь, что бивектор $\omega \in \Lambda^2 V$ разложим тогда и только тогда, когда $\omega \wedge \omega = 0$ в $\Lambda^4 V$.

При $\dim V = 4$ разложимые бивекторы образуют в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ невырожденную *квадрику Плюккера*

$$P \overset{\text{def}}{=} \{\omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0\} = V(q), \tag{2-36}$$

множество изотропных векторов канонической с точностью до пропорциональности симметричной невырожденной билинейной формы $\widetilde{q}$ на $\Lambda^2 \Bbbk^4$, определяемой равенством

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \widetilde{q}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \tag{2-37}$$

где e_1, e_2, e_3, e_4 — произвольный базис в V.

Упражнение 2.20. Убедитесь, что эта форма симметрична, невырождена и при выборе другого базиса в V умножается на ненулевую константу. Напишите её матрицу Грама в базисе из бивекторов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$.

В координатах x_{ij} относительно базиса из бивекторов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ условие разложимости $q(\omega) = \widetilde{q}(\omega,\omega) = 0$ бивектора $\omega = \sum_{ij} x_{ij} e_{ij}$ принимает вид

$$x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0,$$

а плюккерово вложение (2-35) переводит прямую (uw), порождённую векторами $u = \sum u_i e_i$, $w = \sum w_j e_j$ с матрицей координат

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}$$

[1] Необязательно четырёхмерного.

в бивектор с координатами $x_{ij} = \det\begin{pmatrix} u_i & u_j \\ w_i & w_j \end{pmatrix}$.

Упражнение 2.21. Существует ли комплексная 2×4-матрица, шесть 2×2-миноров которой, выписанные в случайном порядке, суть а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ б) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$? Если да, то предъявите такую матрицу явно.

Лемма 2.1

Две прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$ пересекаются, если и только если их образы при отображении Плюккера (2-35) ортогональны относительно квадратичной формы (2-37), т. е. тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{q}(\mathfrak{u}(\ell_1), \mathfrak{u}(\ell_2)) = \mathfrak{u}(\ell_1) \wedge \mathfrak{u}(\ell_2) = 0\,.$$

Доказательство. Если $\ell_1 \cap \ell_2 = \varnothing$, то в V существует такой базис e_1, e_2, e_3, e_4, что $\ell_1 = (e_1 e_2)$, а $\ell_2 = (e_3 e_4)$. Тогда $\mathfrak{u}(\ell_1) \wedge \mathfrak{u}(\ell_2) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$. Если ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке a, то $\ell_1 = (ab)$, а $\ell_2 = (ac)$ для некоторых $b, c \in V$, и $\mathfrak{u}(\ell_1) \wedge \mathfrak{u}(\ell_2) = a \wedge b \wedge a \wedge c = 0$. □

Следствие 2.2

Для любой точки $p = \mathfrak{u}(\ell) \in P$ пересечение плюккеровой квадрики (2-36) с касательной плоскостью в точке p состоит из плюккеровых образов всех прямых, пересекающих ℓ:

$$P \cap T_p P = \{\mathfrak{u}(\ell') \mid \ell' \cap \ell \neq \varnothing\}\,.$$

Пример 2.2 (связки и пучки прямых в $\mathbb{P}_3$)

Множество прямых в $\mathbb{P}_3$ называется *связкой*, если его плюккеров образ является двумерной плоскостью, лежащей на квадрике Плюккера. Каждая такая плоскость $\pi \subset P$ линейно порождается тройкой неколлинеарных точек $p_i = \mathfrak{u}(\ell_i)$, $i = 1, 2, 3$. При этом $\pi = P \cap T_{p_1} P \cap T_{p_2} P \cap T_{p_3} P$. По лем. 2.1 и сл. 2.2 соответствующая связка прямых состоит из всех таких прямых, которые пересекают 3 данные попарно пересекающиеся прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 в $\mathbb{P}_3$. Три прямых в $\mathbb{P}_3$ попарно пересекаются ровно в двух случаях: когда они лежат в одной плоскости или когда они проходят через одну точку. Таким образом, существуют два геометрически разных типа связок прямых на $\mathbb{P}_3$:

α-плоскость $\pi_\alpha(O) \subset P$ является образом *α-связки*, состоящей из всех прямых, проходящих через данную точку $O \in \mathbb{P}_3$, и линейно порождается плюккеровыми образами любых трёх некомпланарных прямых, проходящих через O

β-плоскость $\pi_\beta(\Pi) \subset P$ является образом *β-связки*, состоящей из всех прямых, лежащих в данной плоскости $\Pi \in \mathbb{P}_3$, и линейно порождается плюккеровыми образами любых трёх лежащих в Π прямых, не проходящих там через одну точку.

При этом любые две плоскости одного и того же типа всегда пересекаются ровно по одной точке

$$\pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) = \mathfrak{u}\,(\Pi_1 \cap \Pi_2)$$
$$\pi_\alpha(O_1) \cap \pi_\alpha(O_2) = \mathfrak{u}\big((O_1 O_2)\big)\,,$$

а две плоскости различных типов $\pi_\beta(\Pi)$, $\pi_\alpha(O)$ не пересекаются при $O \notin \Pi$ и пересекаются по прямой при $O \in \Pi$. В последнем случае прямая пересечения является плюккеровым образом пучка прямых на $\mathbb{P}_3$, лежащих в плоскости Π и проходящих через точку $O \in \Pi$.

Упражнение 2.22. Покажите, что всякая прямая, лежащая на квадрике Плюккера, является пересечением α-плоскости с β-плоскостью, и тем самым, представляет собою пучок прямых, лежащих в некоторой плоскости и проходящих там через одну точку.

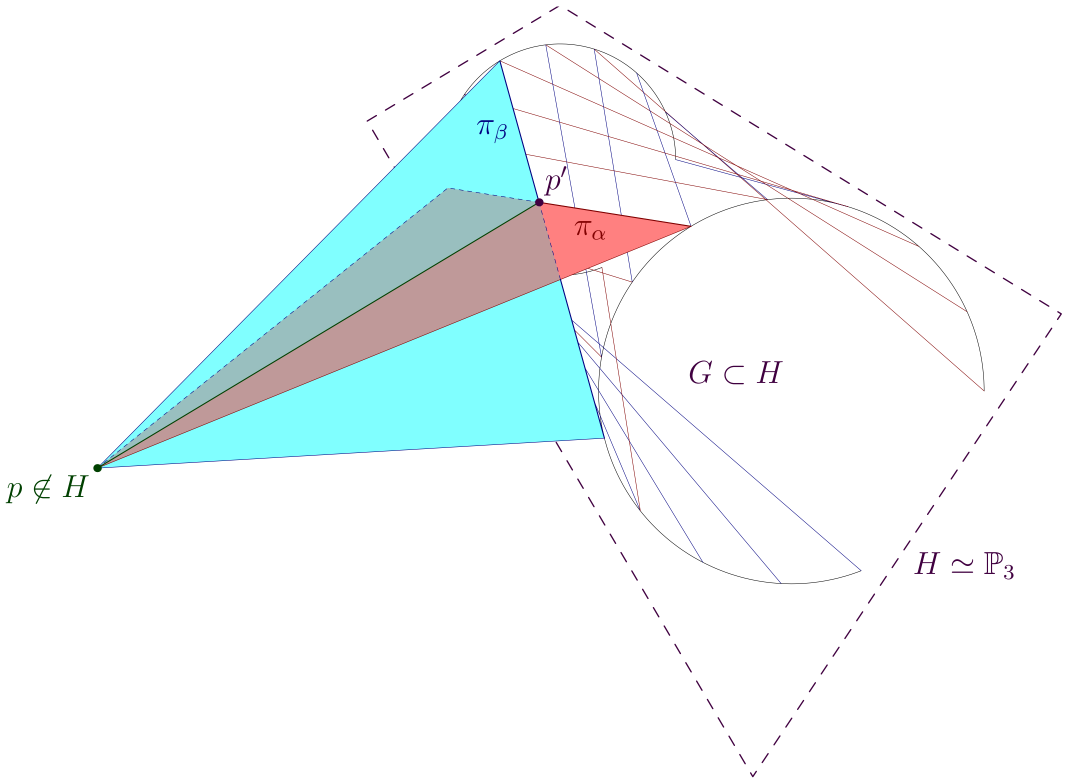


Рис. 2◇1. Конус $C = P \cap T_pP$

Пример 2.3 (клеточное разбиение плюккеровой квадрики)
Зафиксируем какую-нибудь дополнительную к точке $p \in P$ трёхмерную гиперплоскость $H \subset T_pP$ в четырёхмерном касательном пространстве T_pP к квадрике Плюккера $P \subset \mathbb{P}_5$. Особая квадрика $C = P \cap T_pP$ представляет собой простой конус с вершиной p над неособой квадрикой $G = H \cap P$, изоморфной квадрике Сегре в $\mathbb{P}_3$. Это приводит к следующей стратификации плюккеровой квадрики замкнутыми подмножествами:

$$\begin{tikzcd}
& & \pi_\alpha \arrow[dr, hook] & & \\
p \arrow[r, hook] & \pi_\alpha \cap \pi_\beta \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & C \arrow[r, hook] & P \\
& & \pi_\beta \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Открытые подмножества этих стратов, дополнительные к объединению стратов меньшей размерности, задают дизъюнктное разбиение плюккеровой квадрики P на открытые клетки, естественно изоморфные аффинным пространствам:

$$\mathrm{Gr}(2,4) \;=\; \mathbb{A}^0 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \left(\begin{array}{c} \mathbb{A}^2 \\ \sqcup \\ \mathbb{A}^2 \end{array}\right) \sqcup \mathbb{A}^3 \sqcup \mathbb{A}^4 .$$

В самом деле, сначала мы имеем проективную прямую без точки: $(\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \smallsetminus p \;\simeq\; \mathbb{A}^1$. Затем возникает пара проективных плоскостей без проективной прямой: $\pi_\alpha \smallsetminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \simeq \pi_\beta \smallsetminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \;\simeq\; \mathbb{A}^2$. Далее идут аффинный конус над дополнением квадрики Сегре до пары прямых, высекаемых из неё касательной плоскостью

$$C \smallsetminus (\pi_\alpha \cup \pi_\beta) \simeq \mathbb{A}^1 \times \Big(G \smallsetminus \big(G \cap T_{p'}G\big)\Big),$$

и открытое плотное множество плюккеровой квадрики, дополнительное до её пресечения с касательной плоскостью в точке p

$$P \smallsetminus T_p P \simeq \mathbb{A}^4$$

Упражнение 2.23. Покажите, что проекция гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \in Q$ на произвольную гиперплоскость $H \not\ni p$ задаёт бирациональную биекцию между дополнением $Q \smallsetminus T_pQ$ и аффинным пространством $H \smallsetminus T_pQ \simeq \mathbb{A}^{n-1}$.

Пример 2.4 (исчисление Шуберта на грассманиане $\mathrm{Gr}(2,4)$)
Аффинные пространства из построенного в прим. 2.3 разбиения плюккеровой квадрики, являются плюккеровыми образами шести аффинных клеток Шуберта $\mathring{\sigma}_\lambda \subset \mathrm{Gr}(2,4)$. Их замыкания называются (замкнутыми) *циклами Шуберта* и обозначаются σ_λ.

Упражнение 2.24. Убедитесь, что в терминах плюккеровой квадрики $P \subset \mathbb{P}_5$ циклы Шуберта грассманиана $\mathrm{Gr}(2,4)$ суть

$$\begin{aligned}
\sigma_{00} &= P \\
\sigma_{22} &= \text{ точка } p = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \text{ в } \mathbb{P}_5 \\
\sigma_{10} &= P \cap T_pP \\
\sigma_{11} &= \pi_\alpha(O), \text{ где } O = (0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}_3 \\
\sigma_{20} &= \pi_\beta(\Pi), \text{ где } \Pi = \mathrm{Ann}(x_0) \subset \mathbb{P}_3 \\
\sigma_{21} &= \pi_\alpha(O) \cap \pi_\beta(\Pi).
\end{aligned}$$

Над полем $\Bbbk = \mathbb{C}$ циклы Шуберта σ_λ образуют свободный базис $\mathbb{Z}$-модуля целочисленных гомологий $H_*\big(\mathrm{Gr}(m, \mathbb{C}^d), \mathbb{Z}\big)$, поскольку построенный по разбиению на клетки Шуберта клеточный цепной комплекс для вычисления гомологий не содержит клеток нечётной (вещественной) размерности и, стало быть, имеет нулевые дифференциалы.

Упражнение 2.25*. Опишите из каких клеток σ_μ состоит замыкание каждой клетки σ_λ и вычислите граничный оператор клеточного цепного комплекса на вещественном грассманиане $\mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^d)$.

Топологическое пересечение циклов задаёт на $\mathbb{Z}$-модуле $H_*(\mathrm{Gr}(m, \mathbb{C}^d), \mathbb{Z})$ структуру коммутативного кольца. Гомологические классы пересечений циклов Шуберта могут быть выражены в виде целочисленных линейных комбинаций циклов Шуберта. В общем случае способы получения таких разложений достаточно витиеваты[1]. Для простейшего грассманиана $\mathrm{Gr}(2,4)$ эти формулы легко получить геометрически.

Очевидно, что циклы, суммарная коразмерность которых меньше четырёх, имеют нулевые пересечения. Пересечения циклов дополнительной размерности уже были вычислены нами в прим. 2.2:

$$\sigma_{10}\sigma_{21} = \sigma_{20}^2 = \sigma_{11}^2 = \sigma_{22} \quad \text{и} \quad \sigma_{20}\sigma_{11} = 0\,.$$

По тем же причинам $\sigma_{10}\sigma_{20} = \sigma_{10}\sigma_{11} = \sigma_{21}$. Для вычисления σ_{10}^2 реализуем цикл σ_{10} в виде

$$\sigma_{10}(\ell) = P \cap T_{\mathrm{u}(\ell)}P = \{\ell'' \subset \mathbb{P}_3 \mid \ell \cap \ell'' \neq \varnothing\}\,.$$

Тогда σ_{10}^2 гомологичен пересечению $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell')$, которое при общем положении пары прямых ℓ, ℓ' представляет собой неособую квадрику Сегре с рис. 2◇1. Если продеформировать прямую ℓ' так, чтобы она стала пересекаться с прямой ℓ, эта квадрика продеформируется в своём классе гомологий в пару пересекающихся плоскостей: α-связку с центром $O = \ell \cap \ell'$ и β-связку в плоскости Π, натянутой на ℓ и ℓ': $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell') = \pi_\alpha(O) \cup \pi_\beta(\Pi)$. Таким образом,

$$\sigma_{10}^2 = \sigma_{20} + \sigma_{11}\,.$$

В качестве приложения мы получаем «грубое» топологическое решение следующей известной задачи: сколько прямых пересекает четыре заданные попарно непересекающихся прямые в $\mathbb{P}_3$? Если заданные прямые находятся в достаточно общем положении, то ответ даётся коэффициентом при σ_{22} в четырёхкратном самопересечении σ_{10}^4. Согласно предыдущему,

$$\sigma_{10}^4 = (\sigma_{20} + \sigma_{11})^2 = \sigma_{20}^2 + \sigma_{11}^2 = 2\sigma_{22}\,,$$

т. е. в общем случае есть ровно две такие прямые.

2.6. Многообразие Сегре $\boldsymbol{S(m_1, m_2, \dots, m_n)}$ представляет собою образ *вложения Сегре*

$$s : \mathbb{P}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{m_n} \to \mathbb{P}_m\,,$$

переводящего прямое произведение проективных пространств $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$ в пространство $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}\left(V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n\right)$, отправляя набор одномерных подпространств, порождённых ненулевыми векторами $v_i \in V_i$, в их тензорное произведение, порождённое вектором

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \in V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n\,.$$

Упражнение 2.26. Проверьте, что это отображение корректно определено[2] и является вложением.

Так как разложимые тензоры линейно порождают всё пространство $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$, многообразие Сегре не лежит ни в какой гиперплоскости, хотя его размерность обычно сильно меньше размерности объемлющего пространства. По построению, многообразие Сегре заметается n семействами проективных подпространств размерностей $m_1, m_2, \dots, m_n$, где $m_i = d_i - 1$. Квадрика Сегре из n° 1.4.4 на стр. 18 является простейшим примером такого многообразия.

[1] см. книги: *W. Fulton Young Tableaux* (CUP, LMS Stud. Texts 35), *Ф. Гриффитс, Дж. Харрис Принципы алгебраической геометрии, I* (Мир, 1982), *У. Фултон Теория пересечений* (Мир, 1989), *И. Макдонвлд Симметрические функции и многочлены Холла* (Мир, 1985)

[2] Т. е. тензор $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n$ отличен от нуля и заменяется на пропорциональный при замене векторов v_i на пропорциональные.

Пример 2.5 (операторы ранга 1)
Для конечномерных векторных пространств U, W каноническое отображение

$$U^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(U, V)\,,$$

сопоставляющее разложимому тензору $\xi \otimes u$ линейное отображение ранга 1

$$\xi \otimes u : U \to W\,, \quad u \mapsto \xi(u) \cdot w\,, \tag{2-38}$$

является изоморфизмом. Таким образом, проективизация множества операторов ранга 1 представляет собою многообразие Сегре $S(m,n) \subset \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U,W))$. Если зафиксировать в пространствах U, W какие-нибудь базисы, записать все линейные отображения $U \to W$ матрицами в этих базисах и использовать матричные элементы a_{ij} в качестве однородных координат на $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V,W))$, многообразие Сегре будет задаваться в этих координатах системой квадратичных уравнений

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij}a_{\ell k} - a_{ik}a_{\ell j} = 0\,,$$

констатирующих зануление всех миноров второго порядка. В этих координатах отображение Сегре переводит пару точек с однородными координатами

$$(x_1 : x_2 : \cdots : x_n) \quad \text{и} \quad (y_1 : y_2 : \cdots : y_n)$$

в точку, однородными координатами которой являются mn всевозможных произведений $x_j y_i$ — матричные элементы произведения $y^t \cdot x$ столбца y на строку x. Два семейства «координатных плоскостей» $\xi \times \mathbb{P}_{m-1}$ и $\mathbb{P}_{n-1} \times w$ при этом перейдут в два семейства проективных пространств, заметающих многообразие Сегре. При $\dim U = \dim W = 2$ мы получаем в точности обсуждавшуюся в n° 1.4.4 на стр. 18 биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и детерминантной квадрикой Сегре в $\mathbb{P}_3$.

2.6.1. Многообразие Сегре как линейное сечение грассманиана. Рассмотрим сумму

$$W = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$$

конечномерных векторных пространств V_i и для каждого $k \in \mathbb{N}$ и таких целых неотрицательных $m_1, m_2, \dots, m_n$, что $0 \leqslant m_i \leqslant \dim V_i$ и $\sum_\nu m_\nu = k$, обозначим через $W_{m_1,m_2,\dots,m_n} \subset \Lambda^k W$ линейную оболочку всевозможных произведений $w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_k$ содержащих m_1 сомножителей из пространства V_1, m_2 сомножителей из пространства V_2, и т. д.

Упражнение 2.27. Убедитесь, что правило $\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \cdots \otimes \omega_n \mapsto \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ корректно задаёт изоморфизм векторных пространств

$$\Lambda^{m_1} V_1 \otimes \Lambda^{m_2} V_2 \otimes \cdots \otimes \Lambda^{m_n} V_n \xrightarrow{\sim} W_{m_1,m_2,\dots,m_n}\,,$$

и докажите, что

$$\Lambda^k W = \bigoplus_{m_1,m_2,\dots,m_n} W_{m_1,m_2,\dots,m_n} \simeq \bigoplus_{m_1,m_2,\dots,m_n} \Lambda^{m_1} V_1 \otimes \Lambda^{m_2} V_2 \otimes \cdots \otimes \Lambda^{m_n} V_n\,.$$

Таким образом, тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ канонически отождествляется с векторным подпространством $W_{1,1,\dots,1} \subset \Lambda^n W$. Разложимые тензоры $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$ переходят при этом отождествлении в разложимые поливекторы $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$, что позволяет отождествить многообразие Сегре $S(m_1, m_2, \dots, m_n)$ с сечением грассманиана $\mathrm{Gr}(n, W) \subset \mathbb{P}(\Lambda^n W)$ проективным подпространством $\mathbb{P}\left(W_{1,1,\dots,1}\right) \subset \mathbb{P}(\Lambda^n W)$. Таким образом, многообразие Сегре задаётся в проективном пространстве $\mathbb{P}\left(W_{1,1,\dots,1}\right)$ системой однородных квадратных уравнений — ограничениями соотношений Плюккера предл. 2.4 на стр. 34 для пространства $\Lambda^n W$ на подпространство $W_{1,1,\dots,1} \subset \Lambda^n W$.

§3. Аффинная алгебраическая геометрия

3.1. Порция коммутативной алгебры. Всюду в этом параграфе слово «кольцо» означает по умолчанию *коммутативное кольцо с единицей*, а гомоморфизмы колец всегда предполагаются отображающими единицу в единицу.

3.1.1. Образующие иделов. Любое множество элементов $M \subset A$ коммутативного кольца A порождает в A идеал (M), состоящий из всевозможных конечных сумм

$$g_1 f_1 + g_2 f_2 + \cdots + g_m f_m ,$$

в которых $g_\nu \in A$, а $f_\nu \in M$. Как A-модуль, идеал (M) представляет собою A-линейную оболочку элементов множества M. Элементы $f_1, f_2, \dots , f_m$ из какого-либо идеала $I \subset A$ называются *образующими* этого идеала, если $I = (f_1, f_2, \dots , f_m)$, т. е. $f_1, f_2, \dots , f_m$ линейно порождают I как A-модуль. Коммутативное кольцо A называется *нётеровым*, если каждый его идеал допускает конечное множество образующих. Условие нётеровости имеет несколько эквивалентных переформулировок.

Лемма 3.1
Следующие свойства коммутативного кольца A попарно эквивалентны:

(1) любое множество элементов $M \subset A$ содержит некоторое конечное подмножество, порождающее тот же идеал, что и M

(2) любой идеал в A допускает конечное множество образующих

(3) для любой бесконечной цепочки вложенных идеалов $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $I_\nu = I_n$ для всех $\nu \geqslant n$.

Доказательство. Ясно, что (1) ⇒ (2). Для доказательства импликации (2) ⇒ (3) заметим, что объединение $I = \bigcup_\nu I_\nu$ всех идеалов возрастающей цепочки также является идеалом, и стало быть, линейно порождается над A конечным числом элементов $f_1, f_2, \dots , f_m \in I$. Все эти элементы содержатся в некотором идеале I_n из цепочки. Следовательно, $I_\nu = I_n = I$ для всех $\nu \geqslant n$. Чтобы вывести (1) из (3), рассмотрим цепочку идеалов $I_n = (f_1, f_2, \dots , f_n)$, которая строится по индукции следующим образом: в качестве f_1 возьмём произвольный элемент множества M. При $i > 1$ и $(M) \neq (f_1, f_2, \dots , f_{i-1})$ в качестве f_i возьмём любой элемент из M, не лежащий в $(f_1, f_2, \dots , f_{i-1})$. Тогда идеалы $I_{i-1} \subsetneq I_i$ будут строго возрастать, что в силу (3) не может продолжаться бесконечно, т. е. на каком-то шагу мы придём к равенству $(M) = (f_1, f_2, \dots , f_i)$. □

Теорема 3.1 (теорема Гильберта о базисе)
Если A нётерово, то кольцо многочленов $A[x]$ также нётерово.

Доказательство. Рассмотрим произвольный идеал $I \subset A[x]$ и обозначим через $L_d \subset A$ множество старших коэффициентов всех многочленов степени $\leqslant d$ из I, а через $L_\infty = \bigcup_d L_d$ — множество старших коэффициентов вообще всех многочленов из I.

Упражнение 3.1. Убедитесь, что все L_d (включая L_∞) являются идеалами в A.

Поскольку кольцо A нётерово, все идеалы L_d конечно порождены. Для каждого d (включая $d = \infty$) обозначим через $f_1^{(d)}, f_2^{(d)}, \dots , f_{m_d}^{(d)} \in A[x]$ многочлены, старшие коэффициенты которых порождают соответствующий идеал L_d в A. Пусть наибольшая из степеней многочленов $f_i^{(\infty)}$, старшие коэффициенты которых порождают идеал $L_\infty \subset A$, равна $D \in \mathbb{N}$. Покажем, что идеал I порождается многочленами f_i^∞ и многочленами $f_j^{(d)}$ с $0 \leqslant d < D$.

Произвольный многочлен $g \in I$ сравним по модулю многочленов $f_1^{(\infty)}, f_2^{(\infty)}, \dots, f_{m_\infty}^{(\infty)}$ с многочленом, степень которого строго меньше D. В самом деле, поскольку старший коэффициент многочлена g лежит в идеале L_∞, он имеет вид $\sum \lambda_i a_i$, где $\lambda_i \in A$, а a_i — старшие коэффициенты многочленов $f_i^{(\infty)}$. При $\deg g \geqslant D$ все разности $m_i = \deg g - \deg f_i^{(\infty)}$ неотрицательны, и мы можем образовать многочлен $h = g - \sum \lambda_i \cdot f_i(x) \cdot x_i^{m_i}$, сравнимый с g по модулю I и имеющий строго меньшую, чем g степень. Заменим g на h и повторим эту процедуру, пока не получим многочлен $h \equiv g \pmod{(f_1^{(\infty)}, f_2^{(\infty)}, \dots, f_{m_\infty}^{(\infty)})}$ степени $\deg h < D$. Теперь старший коэффициент многочлена h находится в идеале L_d с $d < D$. Тем же способом вычитая из него подходящие комбинации многочленов $f_j^{(d)}$ с $0 \leqslant d < D$, мы сможем сокращать его старший член и строго уменьшать степень до тех пор, пока не получим нуль. □

Следствие 3.1
Если A нётерово, то $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ тоже нётерово.

Упражнение 3.2. Покажите, что фактор кольцо нётерова кольца нётерово.

Упражнение 3.3. Заменяя в доказательстве теор. 3.1 старшие члены на младшие, покажите, что кольцо формальных степенных рядов $A[[t]]$ с коэффициентами в нётеровом кольце A тоже нётерово.

Замечание 3.1. Подкольцо нётерова кольца не обязательно является нётеровым. Например, кольцо $\mathbb{C}[[t]]$ нётерово по упр. 3.3, однако, его подкольцо, образованное рядами, сходящимися всюду в $\mathbb{C}$, нётеровым не является.

Упражнение 3.4. Покажите, что идеалы I_k, состоящие из аналитических функций $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, обращающихся в нуль на множествах $\mathbb{Z} \smallsetminus \{1, 2, \dots, k\}$, образуют бесконечную цепочку строго увеличивающихся идеалов.

3.1.2. Целые элементы. Рассмотрим пару вложенных колец $A \subset B$. Элемент $b \in B$ называется *целым* над A, если он удовлетворяет условиям лем. 3.2.

Лемма 3.2
Следующие три свойства элемента $b \in B$ попарно эквивалентны:

(1) $b^m = a_1 b^{m-1} + \dots + a_{m-1} b + a_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и некоторых $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$

(2) A-линейная оболочка всех целых неотрицательных степеней b^m , $m \geqslant 0$, линейно порождается над A конечным числом элементов

(3) существует конечно порождённый A-подмодуль $M \subset B$, такой что $bM \subset M$ и для каждого $b' \in B$ из $b'M = 0$ вытекает, что[1] $b' = 0$.

[1]Последнее условие в (3) иногда называют *B-точностью* подмодуля M.

Доказательство. Импликации (1) ⇒ (2) ⇒ (3) очевидны. Покажем, что (3) ⇒ (1). Пусть элементы $e_1, e_2, \dots, e_m$ порождают M над A и A-линейный оператор умножения $b : M \to M, m \mapsto bm$, имеет в этих образующих матрицу $Y \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(A)$, т. е.

$$(be_1, be_2, \dots, be_m) = (e_1, e_2, \dots, e_m) \cdot Y. \tag{3-1}$$

Матричное тождество $\det X \cdot E = X \cdot X^\vee$, где X — любая квадратная матрица, $X^\vee$ — присоединённая к ней матрица[1], а E — единичная матрица того же размера, показывает, что образ оператора умножения на $\det X$ содержится в линейной оболочке столбцов матрицы X. В частности, образ оператора умножения всех элементов модуля M на число $\det(bE - Y) \in B$ лежит в линейной оболочке векторов $(e_1, e_2, \dots, e_m) \cdot (bE - Y)$, которая равна нулю в силу (3-1). Поэтому $\det(bE - Y) \cdot M = 0$, а значит, $\det(bE - Y) = 0$ в силу B-точности модуля M. Так как элементы матрицы Y лежат в A, равенство $\det(bE - Y) = 0$ имеет вид, требуемый в условии (1). □

Определение 3.1
Множество всех элементов $b \in B$, целых над подкольцом $A \subset B$, называется *целым замыканием* A в B и обозначается $\overline{A}_B$. Если $\overline{A}_B = A$, кольцо A называется *целозамкнутым* в B. Если $\overline{A}_B = B$, кольцо B называется *целым расширением* кольца A или *целой A-алгеброй*.

Предложение 3.1
Целое замыкание $\overline{A}_B \subset B$ любого подкольца $A \subset B$ является подкольцом в B. Для любого кольца $C \supset B$ всякий элемент $c \in C$, целый над $\overline{A}_B$, цел и над A.

Доказательство. Если элементы $p, q \in B$ таковы, что

$$p^m = x_{m-1} p^{m-1} + \dots + x_1 p + x_0, \quad q^n = y_{n-1} q^{n-1} + \dots + y_1 q + y_0$$

для некоторых $x_\nu, y_\mu \in A$, то A-модуль, порождённый произведениями $p^i q^j$ с $0 \leqslant i < m$, $0 \leqslant j < n$, является B-точным (ибо содержит 1) и переходит в себя при умножении и на p, и на q, а значит, и при умножении на $p + q$ и pq. Аналогично, если

$$c^r = z_{r-1} c^{r-1} + \dots + z_1 c + z_0, \quad z_k^{m_k} = a_{k,m_k-1} z^{m_k-1} + \dots + a_{k,1} z_k + a_{k,0}$$

где $0 \leqslant k \leqslant (r-1)$ и все $a_{k,\ell} \in A$, то умножение на c сохраняет B-точный A-подмодуль, порождённый произведениями $c^i z_1^{j_1} z_2^{j_2} \cdots z_r^{j_r}$ с $0 \leqslant i < r$ и $0 \leqslant j_k < m_k$. □

Следствие 3.2 (лемма Гаусса – Кронекера – Дедекинда)
Пусть $A \subset B$ — произвольное расширение коммутативных колец, и $f, g \in B[x]$ — приведённые[2] многочлены положительной степени. Тогда все коэффициенты произведения

$$h(x) = f(x)g(x)$$

целы над A , если и только если все коэффициенты и у $f(x)$, и у $g(x)$ целы над A.

[1]Т. е. матрица из алгебраических дополнений к элементам транспонированной матрицы X^t.
[2]Т. е. со старшим коэффициентом единица.

Доказательство. Рассмотрим любое кольцо $C \supset B$, над которым f и g полностью разлагаются на линейные множители[1], т. е. в кольце $C[x]$ выполняются равенства

$$f(x) = \prod_{\nu}(x - \alpha_\nu), \quad g(x) = \prod_{\mu}(x - \beta_\mu), \quad h(x) = \prod_{\mu,\nu}(x - \alpha_\nu)(x - \beta_\mu).$$

Целость над A всех коэффициентов многочлена h равносильна тому, что все корни $\alpha_\nu, \beta_\mu \in C$ многочлена h целы над целым замыканием A в C, а значит, и над самим A. Это, в свою очередь, эквивалентно одновременной целости над A всех коэффициентов как f, так и g. □

Пример 3.1 ($\mathbb{Z}$ целозамкнуто в $\mathbb{Q}$)
Если для дроби p/q с взаимно простыми $p, q \in \mathbb{Z}$ найдутся такие $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$, что

$$\frac{p^m}{q^m} = a_1 \frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + \dots + a_{m-1}\frac{p}{q} + a_m,$$

то $p^m = a_1 q p^{m-1} + \dots + a_{m-1} q^{m-1} p + a_m q^m$ делится на q, что при взаимно простых p и q возможно только если $q = \pm 1$. Таким образом, целое замыкание $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}$ есть $\mathbb{Z}$.

Пример 3.2 (целые алгебраические числа)
Пусть $K \supset \mathbb{Q}$ — поле, конечномерное как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Элементы $z \in K$ называются *алгебраическими числами*. Условие (3) из лем. 3.2 утверждает, что алгебраическое число $\zeta \in K$ является целым над $\mathbb{Z}$, если и только если существует инвариантное относительно умножения на ζ вектороное подпространство[2] $W \subset K$ и такой базис в нём, что оператор умножения $\zeta : W \to W$, $x \mapsto \zeta x$, записывается в этом базисе целочисленной матрицей. Именно таким образом *целые алгебраические числа* и были впервые определены в XIX веке Дедекиндом. Каждое алгебраическое число $\xi \in K$ можно сделать целым, умножив его на подходящее число из $\mathbb{Z}$. В самом деле, поскольку число ξ алгебраично[3] над $\mathbb{Q}$, найдутся такие $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, что $a_0\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \dots + a_{n-1}\xi + a_n = 0$. Тогда число $\zeta = a_0\xi$ удовлетворяет приведённому уравнению

$$\begin{aligned}\zeta^n = a_0^n\xi^n &= -a_0^n a_1 \xi^{n-1} - a_0^n a_2 \xi^{n-2} - \dots - a_0^n a_n = \\ &= -a_0 a_1 \cdot \zeta^{n-1} - a_0^2 a_2 \cdot \zeta^{n-2} - \dots - a_0^n a_n.\end{aligned}$$

В частности, у K существует базис над $\mathbb{Q}$, состоящий из целых алгебраических чисел.

Пример 3.3 (инварианты конечной группы)
Пусть конечная группа G действует на кольце B кольцевыми автоморфизмами

$$g : B \xrightarrow{\sim} B, \quad g \in G.$$

Подкольцо $B^G \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in B \mid ga = a \ \forall g \in G\}$ называется *кольцом инвариантов* действия G на B. Если G-орбита элемента $b \in B$ состоит из элементов $b_1 = b, b_2, b_3, \dots, b_n$, то элемент b является корнем приведённого многочлена

$$B(t) = \prod (t - b_i) \in B^G[t].$$

Таким образом, B цело над подкольцом инвариантов $B^G \subset B$.

[1] Такое кольцо C можно построить индукцией по $\deg h$. Если $\deg h > 0$, то B вкладывается в фактор кольцо $F = B[x]/(h)$ как подкольцо классов констант. Поскольку класс $\vartheta = x \pmod{h} \in F$ является корнем h, то $h(x) = (x - \vartheta) \cdot h_1(x)$ в $F[x]$. По индукции $h_1 = \prod(x - c_\nu)$ над некоторым кольцом $C \supset F \supset B$.

[2] Над полем $\mathbb{Q}$.

[3] Так как K конечномерно над $\mathbb{Q}$.

Предложение 3.2
Пусть кольцо B цело над подкольцом $A \subset B$. Если B — поле, то A также является полем. Наоборот, если A — поле, и в B нет делителей нуля, то B — поле.

Доказательство. Если B — поле, целое над A, то обратный элемент $a^{-1} \in B$ к произвольному ненулевому $a \in A$ удовлетворяет уравнению $a^{-m} = \alpha_1 a^{1-m} + \dots + \alpha_{m-1} a^{-1} + \alpha_0$, где все $\alpha_\nu \in A$. Умножая обе части на a^{m-1}, получаем $a^{-1} = \alpha_1 + \dots + \alpha_{m-1} a^{m-2} + \alpha_0 a^{m-1} \in A$.

Обратно, если A — поле, и B — целая A-алгебра, то все неотрицательные целые степени b^i любого $b \in B$ порождают конечномерное векторное пространство V над A. Если $b \neq 0$, и в B нет делителей нуля, то линейный оператор умножения на $b : V \to V$, $x \mapsto bx$, имеет нулевое ядро и, тем самым, биективен. Прообраз $1 \in V$ относительно этого оператора и есть b^{-1}. □

Следствие 3.3
Если поле $\mathbb{F}$ является конечномерным векторным пространством над своим подполем $\Bbbk \subset \mathbb{F}$, то все элементы $\mathbb{F}$ алгебраичны над $\Bbbk$, и $\Bbbk$-подалгебра в $\mathbb{F}$, порождённая любым набором элементов $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{F}$, является полем.

3.1.3. Конечно порождённные $\Bbbk$-алгебры. Когда кольцо $A = \Bbbk$ является полем, всякое содержащее его кольцо $B \supset \Bbbk$ называется *коммутативной $\Bbbk$-алгеброй*. Такая $\Bbbk$-алгебра называется *конечно порождённой*, если она является фактором алгебры многочленов $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, т. е. когда имеется эпиморфизм $\Bbbk$-алгебр $\pi : \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m] \twoheadrightarrow B$. Элементы $b_i = \pi(x_i) \in B$ называются в этом случае *образующими* алгебры B, а ядро $\ker \pi \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m]$ называется *идеалом соотношений* между ними. Отметим, что по сл. 3.1 и упр. 3.2 все конечно порождённые $\Bbbk$-алгебры нётеровы.

Для каждого элемента $b \in B$ имеется *гомоморфизм вычисления*

$$\mathrm{ev}_b : \Bbbk[x] \to B, \quad f \mapsto f(b), \tag{3-2}$$

образ которого обозначается через $\Bbbk[b] \overset{\text{def}}{=} \operatorname{im} \mathrm{ev}_b$ и представляет собою наименьшую $\Bbbk$-подалгебру в B, содержащую 1 и b, т. е. множество всех элементов, которые можно получить из b и элементов поля $\Bbbk$ конечным числом сложений и умножений.

Элемент b называется *трансцендентным* над $\Bbbk$, если гомоморфизм вычисления (3-2) инъективен. В этом случае алгебра $\Bbbk[b] \simeq \Bbbk[x]$ не является полем и бесконечномерна как векторное пространство над $\Bbbk$.

Элемент b называется *алгебраическим* над $\Bbbk$, если гомоморфизм вычисления (3-2) имеет ненулевое ядро $\ker(\mathrm{ev}_b) = (\mu_b) \subset \Bbbk[x]$, автоматически[1] являющееся главным идеалом. Его приведённая образующая $\mu_b \in \Bbbk[x]$ называется *минимальным многочленом* элемента b над $\Bbbk$. Она однозначно определяется элементом b как приведённый многочлен наименьшей степени, аннулирующий b. Таким образом, алгебраичность элемента $b \in B$ означает, что он цел над подполем $\Bbbk \subset B$. В этом случае подалгебра $\Bbbk[b] \simeq \Bbbk[x]/(\mu_b)$ имеет конечную размерность $\dim_\Bbbk \Bbbk[b] = \deg \mu_b$ как векторное пространство над $\Bbbk$, и если в ней нет делителей нуля, то по предл. 3.2 алгебра $\Bbbk[b]$ автоматически является полем.

Теорема 3.2
Конечно порождённая $\Bbbk$-алгебра B может быть полем только при условии, что все её элементы алгебраичны над $\Bbbk$, и в этом случае она конечномерна как векторное пространство над $\Bbbk$.

[1] Поскольку $\Bbbk[x]$ это кольцо главных идеалов.

Доказательство. Пусть алгебра B порождается над $\Bbbk$ элементами $b_1, b_2, \dots, b_m$ и является полем. Доказывать алгебраичность B будем индукцией по m. Случай $m = 1$, $B = \Bbbk[b_1]$ уже был разобран выше. Пусть $m > 1$. Если b_m алгебраичен над $\Bbbk$, то $\Bbbk[b_m]$ это поле, и поле B алгебраично над $\Bbbk[b_m]$ по предположению индукции. Тогда по предл. 3.1 поле B алгебраично и над $\Bbbk$. Поскольку B получается последовательным присоединением к $\Bbbk$ конечного числа алгебраических элементов $b_1, b_2, \dots, b_m$, поле B конечномерно как векторное пространство над $\Bbbk$.

Покажем теперь, что элемент b_m не может быть трансцендентен. Допустим противное. Тогда по универсальному свойству поля частных инъективный гомоморфизм вычисления

$$\mathrm{ev}_{b_m} : \Bbbk[x] \to B\,, \quad f \mapsto f(b_m)\,,$$

продолжается до изоморфизма поля рациональных функций $\Bbbk(x)$ с наименьшим содержащим элемент b_m подполем $\Bbbk(b_m) \subset B$. По предположению индукции поле B алгебраично над $\Bbbk(b_m)$. В частности, каждая из образующих $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$ поля B как алгебры над $\Bbbk$ удовлетворяет некоторому полиномиальному уравнению с коэффициентами из $\Bbbk(b_m)$. Умножая эти уравнения на подходящие многочлены от b_m, сделаем так, чтобы все их коэффициенты лежали в $\Bbbk[b_m]$, а все их старшие коэффициенты стали равны между собою. Обозначим этот общий для всех уравнений старший коэффициент через $p(b_m) \in \Bbbk[b_m]$. Таким образом, поле B цело над подалгеброй $F = \Bbbk[b_m\,, 1/p(b_m)] \subset B$, порождённой над $\Bbbk$ элементами b_m и $1/p(b_m)$. По предл. 3.2 эта подалгебра F является полем. В частности, элемент $1 + p(b_m)$ обратим в F, т. е. существует такой многочлен $g \in \Bbbk[x_1, x_2]$, что $g\,(\,b_m\,, 1/p(b_m)\,) \cdot (1 + p(b_m)) = 1$. Записывая рациональную функцию $g\,(\,x\,, 1/p(x)\,)$ в виде $h(x)/p^k(x)$, где $h \in \Bbbk[x]$ не делится на p, и умножая обе части предыдущего равенства на $p^k(b_m)$, мы получаем на b_m полиномиальное уравнение $h(b_m) \cdot (p(b_m) + 1) = p^{k+1}(b_m)$. Оно нетривиально, поскольку $h(x)(1 + p(x))$ не делится на $p(x)$ в $\Bbbk[x]$. Тем самым, b_m не трансцендентен. Противоречие. $\square$

3.1.4. Базисы трансцендентности. Пусть $\Bbbk$-алгебра A не имеет делителей нуля. Обозначим через Q_A её поле частных. С каждым набором элементов $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ связан гомоморфизм вычисления

$$\mathrm{ev}_{a_1, a_2, \dots, a_m} : \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m] \to A\,, \quad f \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_m)\,, \tag{3-3}$$

образ которого обозначается через $\Bbbk[a_1, a_2, \dots, a_m] \subset A$ и состоит из всех элементов, что можно получить из $a_1, a_2, \dots, a_m$ и элементов поля $\Bbbk$ при помощи конечного числа сложений и умножений. Это наименьшая по включению $\Bbbk$-подалгебра в A, содержащая поле $\Bbbk$ и все элементы a_i. Через $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A$ мы обозначим наименьшее подполе, содержащее поле $\Bbbk$ и заданные элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$.

Упражнение 3.5. Покажите, что $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m) \simeq Q_{\Bbbk[a_1, a_2, \dots, a_m]}$.

Элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ называются *алгебраически независимыми* над $\Bbbk$, если между ними нет никаких полиномиальных соотношений вида $f(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0$, где $f \in A[x_1, x_2, \dots, x_m]$, т. е. гомоморфизм вычисления (3-3) инъективен. В этом случае вложение (3-3) продолжается до изоморфизма полей $\Bbbk(x_1, x_2, \dots, x_m) \xrightarrow{\sim} \Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A$, переводящего рациональную функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в её значение $f(a_1, a_2, \dots, a_m)$ на элементах a_i.

Элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ называются *алгебраически порождающими* Q_A, если поле Q_A алгебраично[1] над подполем $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A$.

Упражнение 3.6. Убедитесь, что если все элементы $a \in A \subset Q_A$ алгебраичны над полем $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A$, то элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ алгебраически порождают Q_A.

[1] Или, что то же самое, цело.

Алгебраически независимый набор элементов $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$, алгебраически порождающий Q_A, называется *базисом трансцендентности* алгебры A над $\Bbbk$. Любое собственное подмножество базиса трансцендентности алгебраически независимо, однако, не является базисом трансцендентности. Поэтому базис трансцендентности можно иначе определить либо как минимальный по включению набор $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$, алгебраически порождающий Q_A, либо как максимальный по включению алгебраически независимый набор $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$.

Лемма 3.3 (лемма о замене)
Если $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ алгебраически порождают Q_A, а $u_1, u_2, \dots, u_k \in A$ алгебраически независимы, то $m \geqslant k$ и a_i можно перенумеровать так, что набор элементов

$$u_1, u_2, \dots, u_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \dots\ ,\ a_m$$

(полученный заменой первых k элементов a_i на элементы u_i) также будет алгебраически порождать Q_A.

Доказательство. Так как элемент u_1 алгебраичен над $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m)$ имеется полиномиальное соотношение $f(u_1,\ a_1, a_2, \dots, a_m) = 0$, в которое входит u_1. Поскольку u_1 трансцендентен над $\Bbbk$, в это соотношение входит и какой-нибудь из элементов a_i. Перенумеруем их так, чтобы это был a_1. Тогда a_1 алгебраичен над $\Bbbk(u_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ ,\ a_m)$, и значит, $u_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ ,\ a_m$ алгебраически порождают Q_A. Далее действуем по индукции. Пусть для очередного i в пределах $1 \leqslant i < k$ элементы $u_1, u_2, \dots, u_i,\ a_{i+1},\ a_{i+2},\ \dots\ ,\ a_m$ алгебраически порождают Q_A. Так как u_{i+1} алгебраичен над $\Bbbk(u_1,\ \dots\ ,\ u_i,\ a_{i+1},,\ \dots\ ,\ a_m)$, имеется полиномиальное соотношение $f(u_1, u_2, \dots, u_{i+1},\ a_{i+1},\ a_{i+2},\ \dots\ ,\ a_m) = 0$, содержащее u_{i+1}. Поскольку $u_1, u_2, \dots, u_k$ алгебраически независимы, в этом соотношении присутствует и какой-нибудь a_j. Тем самым, $m > i$, и мы можем занумеровать оставшиеся a_j так, что a_{i+1} будет алгебраичен над

$$\Bbbk(u_1, u_2, \dots, u_{i+1}\,,\ a_{i+2},\ a_{i+3},\ \dots\ ,\ a_m)\,.$$

Следовательно $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}\,,\ a_{i+2},\ a_{i+3},\ \dots\ ,\ a_m$ алгебраически порождают Q_A, что воспроизводит индуктивное предположение. □

Следствие 3.4
В конечно порождённой $\Bbbk$-алгебре A без делителей нуля любой набор элементов, алгебраически порождающий Q_A, содержит в себе некоторый базис трансцендентности для A, а любой набор алгебраически независимых элементов можно дополнить до базиса трансцендентности, причём все базисы трансцендентности состоят из одинакового числа элементов. □

Определение 3.2 (степень трансцендентности)
Число элементов в базисе трансцендентности конечно порождённой $\Bbbk$-алгебры A называется *степенью трансцендентности* алгебры A над $\Bbbk$ и обозначается $\operatorname{tr}\deg_{\Bbbk} A$

Упражнение 3.7. Покажите, что следующие условия на конечно порождённую $\Bbbk$-алгебру A без делителей нуля эквивалентны друг другу: а) $\operatorname{tr}\deg A = 0$ б) $A = Q_A$ в) A — поле г) $\dim_{\Bbbk} A < \infty$.

3.1.5. Нормальность. Коммутативное кольцо A без делителей нуля называется *нормальным*, если оно целозамкнуто в своём поле частных Q_A. Отметим, что любое поле нормально. Дословно также, как в прим. 3.1, устанавливается, что любое факториальное[1] кольцо A нормально.

Упражнение 3.8. Убедитесь, что приведённый многочлен $t^m + a_1t^{m-1} + \dots + a_{m-1}t + a_m$ с коэффициентами в факториальном кольце A не может аннулировать дробь $p/q \in Q_A$ с необратимым знаменателем q и н.о.д.$(p, q) = 1$.

Прямо из определений и сл. 3.2 вытекают следующие полезные свойства, отчасти проясняющие эпитет «нормальный».

Предложение 3.3 (лемма Гаусса – 2)
Пусть A — нормальное кольцо с полем частных Q_A. Если многочлен $f \in A[x]$ раскладывается в $Q_A[x]$ в произведение приведённых множителей, то эти множители лежат в $A[x]$. □

Следствие 3.5
Пусть A — нормальное кольцо с полем частных Q_A, и B — произвольная Q_A-алгебра. Если элемент $b \in B$ цел над A, то его минимальный многочлен над полем Q_A лежит в $A[x]$.

Доказательство. Поскольку элемент b цел над A, он является корнем приведённого многочлена $f \in A[x]$. Тогда $f = \mu_b \cdot q$ в кольце $Q_A[x]$. По предл. 3.3 все коэффициенты μ_b лежат в A. □

3.1.6. Системы полиномиальных уравнений. Любая система полиномиальных уравнений

$$f_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\,, \quad f_\nu \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]\,, \tag{3-4}$$

эквивалентна системе, левые части которой образуют в $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ идеал $J = (f_\nu)$, порождённый многочленами f_ν. Эта большая система получается добавлением к уравнениям (3-4) всех уравнений, которые можно получить умножая уравнения (3-4) на произвольные полиномы и складывая их друг с другом. В силу нётеровости кольца многочленов такая большая система, в свою очередь, эквивалентна конечной системе уравнений, левые части которых порождают идеал J, причём этот конечный набор уравнений может быть выбран из уравнений первоначальной системы (3-4). Таким образом, любая (в том числе бесконечная) система полиномиальных уравнений равносильна, с одной стороны, некоторой своей конечной подсистеме, а с другой стороны, системе, левые части которой образуют в кольце многочленов идеал.

Множество $V(J) \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{A}^n \mid f(a) = 0 \quad \forall f \in J\ \}$ всех решений системы (3-4), левые части f_ν которой пробегают идеал $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, называется *аффинным алгебраическим многообразием*, задаваемым идеалом J. Отметим, что это множество может оказаться пустым: например, когда $J = (1) = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ содержит уравнение $1 = 0$.

Для произвольной фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ множество всех многочленов, тождественно зануляющихся на Φ, образует в кольце многочленов идеал, который обозначается

$$I(\Phi) = \{\, f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \ \ \forall p \in \Phi\ \}\,.$$

[1]Напомню, что кольцо A называется *факториальным*, если в нём нет делителей нуля, и каждый необратимый элемент $a \in A$ является произведением конечного числа неприводимых, причём для любых двух разложений $a = p_1p_2 \cdots p_n = q_1q_2 \cdots q_m$ в произведение неприводимых множителей выполняются равенства $m = n$ и (после надлежащей перенумерации) $p_i = s_iq_i$ для некоторых обратимых $s_i \in A$. Например, факториальными являются любое кольцо главных идеалов и кольца многочленов $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ над факториальными кольцами K.

Множество нулей $V(I(\Phi))$ этого идеала это наименьшее аффинное алгебраическое многообразие, содержащее Φ.

Для любого идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ имеется тавтологическое включение $J \subset I(V(J))$. Вообще говоря, это включение строгое. Например, при $n = 1$ для идеала $J = (x^2)$ многообразие $V(J) = \{0\}$, а идеал $I(V(J)) = (x) \supsetneq (x^2) = J$.

Теорема 3.3 (Nullstellensatz, или теорема Гильберта о нулях)
Для любого идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ над произвольным алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ справедливы следующие утверждения

(1) *слабая теорема о нулях*: $V(J) = \varnothing \iff 1 \in J$;

(2) *сильная теорема о нулях*: $f \in I(V(J)) \iff f^m \in J$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Чтобы доказать первое утверждение, достаточно для каждого собственного[1] идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ указать точку $p \in \mathbb{A}^n$, в которой зануляются все многочлены из J. Поскольку увеличение идеала J только усложняет эту задачу, мы без ограничения общности можем считать, что идеал J *максимален*, т. е. любой многочлен $g \notin J$ обратим по модулю J. Действительно, если существует необратимый по модулю J многочлен $g \notin J$, то уравнение $gh + f = 1$ неразрешимо относительно $h \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $f \in J$, а значит, идеал $J' = (J, g)$ не содержит 1, т. е. является собственным идеалом, строго большим, чем J, так что мы можем расширить J до $J' \supsetneq J$. В силу нётеровости кольца многочленов после конечного числа таких расширений мы получим собственный идеал J, такой что $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/J$ является полем, что мы и будем далее предполагать.

Так как поле $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/J \supset \Bbbk$ конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра, каждый элемент ϑ этого поля по теор. 3.2 алгебраичен над $\Bbbk$, т. е. является корнем некоторого неприводимого приведённого многочлена из $\Bbbk[x]$. Поскольку для алгебраически замкнутого поля $\Bbbk$ все такие многочлены линейны, $\vartheta \in \Bbbk$. Таким образом, $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/J = \Bbbk$, т. е. любой многочлен $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ сравним по модулю идеала J с некоторой константой. Рассмотрим точку $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n$, координата $p_i \in \Bbbk$ которой это константа, сравнимая по модулю J с одночленом x_i. Тогда произвольный многочлен $f(x) \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ сравним по модулю J с константой $f(p) \in \Bbbk$. Тем самым, $f(p) = 0$ для всех $f \in J$, что и требовалось.

Докажем теперь второе утверждение. Поскольку при $J = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $V(J) = \varnothing$ оно тривиально, мы будем считать, что $V(J) \neq \varnothing$ и $J \neq (1)$. Вложим $\mathbb{A}^n$ в большее пространство $\mathbb{A}^{n+1}$ с координатами $(t,\ x_1, x_2, \dots, x_n)$ в качестве гиперплоскости $t = 0$. Если многочлен

$$f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \subset \Bbbk[t,\ x_1, x_2, \dots, x_n]$$

тождественно обращается в нуль на $V(J)$, то идеал $J' \subset \Bbbk[t,\ x_1, x_2, \dots, x_n]$, порождённый J и многочленом $g(t, x) = 1 - t\, f(x)$, имеет пустое множество нулей в $\mathbb{A}^{n+1}$, поскольку $g(x, t) \equiv 1$ вдоль цилиндра $V(J) \subset \mathbb{A}^{n+1}$. Тем самым, по слабой теореме о нулях, идеал J' содержит единицу, т. е. существуют $q_0, q_1, \dots, q_s \in \Bbbk[t,\ x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $f_1, f_2, \dots, f_s \in J$, такие что

$$q_0(x,t) \cdot \big(1 - tf(x)\big) + q_1(t,x) \cdot f_1(x) + \dots + q_s(x,t) \cdot f_s(x) = 1\,.$$

[1] Т. е. отличного от всего кольца многочленов

Применим к этому равенству гомоморфизм $\Bbbk[t,\, x_1, x_2, \dots, x_n] \to \Bbbk(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданный правилами $t \mapsto 1/f(x)\,, \quad x_\nu \mapsto x_\nu$. Получим равенство

$$q_1\big(1/f(x)\,,\,x\big)\cdot f_1(x) + \dots + q_s\big(1/f(x)\,,\,x\big)\cdot f_s(x) = 1$$

в поле рациональных функций $\Bbbk(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Так как идеал J не содержит единицы, среди рациональных функций $q_\nu\big(1/f(x), x\big)$ есть функции с нетривиальными знаменателями, причём все их можно сократить умножением на некоторую степень f^m. После умножения обеих частей равенства на эту степень получаем искомое выражение $f^m(x) = \tilde q_1(x)\cdot f_1(x) + \dots + \tilde q_s(x)\cdot f_s(x)$ с $\tilde q_\nu \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. □

3.1.7. Системы результантов. Рассмотрим систему полиномиальных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{3-5}$$

в которой многочлены $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ однородны и имеют степени $d_i = \deg f_i$. Множество ненулевых решений системы (3-5) в проективном пространстве $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n)$ представляет собою пересечение m проективных гиперповерхностей $S_i = V(f_i) \subset \mathbb{P}(V)$. Фигура

$$\mathcal{R}(n;\ d_1, d_2, \dots, d_m) \subset \mathbb{P}(S^{d_1}V^*) \times \mathbb{P}(S^{d_2}V^*) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{d_m}V^*)\,, \tag{3-6}$$

образованная всеми наборами гиперповерхностей

$$(S_1, S_2, \dots, S_m) \in \mathbb{P}(S^{d_1}V^*) \times \mathbb{P}(S^{d_2}V^*) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{d_m}V^*)$$

с непустым пересечением $\bigcap\limits_i S_i \neq \varnothing$, называется *результантным многообразием* системы (3-5).

Например, если число уравнений равно числу переменных и все $d_i = 1$, система (3-5) превращается в систему однородных линейных уравнений с квадратной матрицей

$$\begin{cases} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n = 0 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

которая имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det\left(a_{ij}\right) = 0$. Таким образом, при $m = (n+1)$ и $d_1 = d_2 = \dots = d_{n+1} = 1$ результантное многообразие

$$\mathcal{R}(n;\ 1,\ 1,\ \dots\ ,\ 1) = V\left(\det(a_{ij})\right) \subset \mathbb{P}_n^* \times \mathbb{P}_n^* \times \dots \times \mathbb{P}_n^*$$

представляет собою гиперповерхность, заданную одним неприводимым полиномиальным уравнением степени $(n+1)$ на коэффициенты $a_{i,j}$ многочленов $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$.

Покажем, что и в общем случае результантное многообразие (3-6) является *алгебраическим*, т. е. задаётся конечной системой полиномиальных уравнений на коэффициенты многочленов f_ν, однородных по коэффициентам каждого из многочленов и зависящих только от n, m и $d_1, d_2, \dots, d_m$. Для этого рассмотрим идеал $I \subset \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$, порождённый многочленами f_ν. Отсутствие у системы (3-5) ненулевых решений означает, что аффинное алгебраическое многообразие $V(I) \subset \mathbb{A}(V)$ либо пусто, либо совпадает с началом координат. В обоих случаях каждая из координатных функций x_i тождественно зануляется на $V(I)$, и значит, существует m, такое что $x_i^m \in I$ для всех i. Наоборот, если I содержит некоторую степень каждой из переменных, то система уравнений с левыми частями из идеала I содержит уравнения $x_0^m = x_1^m = \dots = x_n^m = 0$, имеющие только нулевое решение. Таким образом, отсутствие ненулевых решений у системы (3-5) равносильно тому, что идеал I содержит все мономы x_i^m для некоторого m, а значит, и любой многочлен, степень которого больше $(n+1)(m-1)$, т. е.

$$S^d V^* \subset I \text{ при всех } d \gg 0\,. \tag{3-7}$$

Для каждого $d \in \mathbb{N}$ пересечение $I \cap S^d V^*$ является образом линейного отображения

$$\begin{gathered} \mu_d : S^{d-d_1}V^* \oplus S^{d-d_2}V^* \oplus \dots \oplus S^{d-d_m}V^* \to S^d V^*\,, \\ (g_0, g_1, \dots, g_n) \mapsto \sum g_\nu f_\nu\,. \end{gathered} \tag{3-8}$$

В стандартных базисах из мономов это отображение задаётся матрицей, элементы которой линейно зависят от коэффициентов многочленов f_ν. При $d \gg 0$ размерность левого пространства в (3-8) ведёт себя как $\sum_\nu \binom{n+d-d_\nu}{n} \sim \frac{m}{n!}\, d^n$ и становится больше, чем размерность правого, которая ведёт себя как $\binom{n+d}{n} \sim \frac{1}{n!}\, d^n$. Поэтому невыполнение условия (3-7) равносильна тому, что при всех d, для которых размерность левого пространства (3-8) больше, чем размерность правого, все максимальные миноры матрицы μ_d зануляются. В силу нётеровости кольца многочленов, эта бесконечная система полиномиальных уравнений эквивалентна некоторой конечной подсистеме, которую и называют *системой результантов*.

3.2. Аффинный алгебро-геометрический словарик. Всюду далее мы по умолчанию считаем, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Аффинные алгебраические многообразия, определённые над полем $\Bbbk$, образуют категорию $\mathcal{A}\!f\!f_\Bbbk$, морфизмами в которой являются *регулярные отображения*. По определению, отображение множеств $\varphi : X \to Y$ из аффинного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в аффинное алгебраическое многообразие $Y \subset \mathbb{A}^m$ называется *регулярным*[1], если оно переводит точку $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ в точку $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y$, координаты которой $y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ являются многочленами от координат точки x, т. е. $\varphi_i \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ для всех i. В частности, функция $f : X \to \Bbbk$ называется *регулярной*, если она является ограничением на X некоторого многочлена $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Регулярные функции на X образуют конечно порождённую приведённую[2] $\Bbbk$-алгебру, которая обозначается

$$\Bbbk[X] \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}\!f\!f_\Bbbk}(X, \Bbbk) \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)\,, \tag{3-9}$$

[1] Или *полиномиальным*.

[2] Напомню, что ненулевой элемент a в кольце называется *нильпотентом*, если $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Кольцо называется *приведённым*, если в нём нет ненулевых нильпотентных элементов. Поскольку любая степень ненулевой функции со значениями в поле также является ненулевой функцией, в алгебре регулярных функций на аффинном алгебраическом многообразии нет нильпотентов.

где $I(X) = \{f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f|_X \equiv 0\}$, как и выше, обозначает идеал всех многочленов, тождественно зануляющихся на X. Алгебры и кольца без нильпотентов называются *приведёнными*.

Лемма 3.4
Всякая конечно порождённая приведённая алгебра A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ является координатной алгеброй $A = \Bbbk[X]$ некоторого аффинного алгебраического многообразия X.

Доказательство. Зададим алгебру A образующими и соотношениями, т. е. представим её в виде фактор алгебры $A = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$. Приведённость алгебры A означает, что идеал соотношений I *радикален*, т. е. $f^n \in I \Rightarrow f \in I$ для всех $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Так как $I = \sqrt{I}$, по сильной теореме о нулях $I = I(V(I))$ является идеалом аффинного алгебраического многообразия $X = V(I) \subset \mathbb{A}^n$. □

3.2.1. Гомоморфизм поднятия. Со всяким отображением множеств $\varphi : X \to Y$ связан *гомоморфизм поднятия*, который действует из алгебры $\Bbbk^Y$ *всех* функций на Y со значениями в $\Bbbk$ в алгебру $\Bbbk^X$ *всех* функций X со значениями в $\Bbbk$ и переводит функцию $f : Y \to \Bbbk$ в её композицию с отображением φ:

$$\varphi^* : \Bbbk^Y \to \Bbbk^X, \quad f \mapsto f \circ \varphi. \tag{3-10}$$

Если $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$ являются алгебраическими многообразиями, а отображение $\varphi : X \to Y$ действует на координаты точек по правилу

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

то его гомоморфизм поднятия переводит каждую образующую $y_i \pmod{I(Y)}$ координатной алгебры $\Bbbk[Y]$ в функцию $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)|_X : X \to \Bbbk$. Таким образом, регулярность теоретико множественного отображения $\varphi : X \to Y$ равносильна тому, что гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \Bbbk^Y \to \Bbbk^X$ переводит подалгебру регулярных функций $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk^Y$ в подалгебру регулярных функций $\Bbbk[X] \subset \Bbbk^X$, т. е. корректно задаёт гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$. Точно такая же характеризация регулярных отображений имеется и для других, не связанных с алгебраической геометрией геометрических структур.

Упражнение 3.9. Проверьте, что теоретико множественное отображение топологических пространств (соотв. гладких или аналитических многообразий) $X \to Y$ является непрерывным (соотв. гладким или аналитическим) тогда и только тогда, когда его гомоморфизм поднятия переводит подалгебру непрерывных функций $C^0(Y) \subset \mathbb{R}^Y$ (соотв. подалгебру гладких или аналитических функций на Y) в подалгебру непрерывных функций $C^0(X)$ (соотв. в подалгебру гладких или аналитических функций на X).

Обратите внимание, что вложение $\varphi(X) \subset Y$ влечёт вложение идеалов $\varphi^*\big(I(Y)\big) \subset I(X)$. Поэтому гомоморфизм алгебр многочленов

$$\Bbbk[y_1, y_2, \dots, y_m] \to \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n], \quad y_i \mapsto \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

автоматически корректно факторизуется до гомоморфизма координатных алгебр

$$\Bbbk[Y] = \Bbbk[y_1, y_2, \dots, y_m]/I(Y) \to \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X) = \Bbbk[X].$$

3.2.2. Максимальный спектр. С каждой точкой $p \in X$ аффинного алгебраического многообразия X связан *гомоморфизм вычисления*[1] $\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \to \Bbbk$, $f \mapsto f(p)$. Он эпиморфен, поскольку переводит единицу в единицу, и значит, является гомоморфизмом факторизации по модулю своего ядра

$$\mathfrak{m}_p \overset{\text{def}}{=} \ker \mathrm{ev}_p = I(\{p\}) = \{f \in \Bbbk[X] \mid f(p) = 0\}, \tag{3-11}$$

которое является максимальным идеалом в $\Bbbk[X]$, так как фактор $\Bbbk[X]/\mathfrak{m}_p \simeq \Bbbk$ это поле. Идеал (3-11) называется *максимальным идеалом точки* $p \in X$. Таким образом, значение каждого многочлена $f \in \Bbbk[X]$ в точке $p \in X$ совпадает с классом $f \pmod{\mathfrak{m}_p} \in \Bbbk[X]/\mathfrak{m}_p \simeq \Bbbk$.

Множество всех максимальных идеалов произвольной $\Bbbk$-алгебры A называется её *максимальным спектром* и обозначается $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}(A)$. Каждой точке спектра $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ отвечает гомоморфизм факторизации $\pi_{\mathfrak{m}} : A \to A/\mathfrak{m}$, $a \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}}$, принимающий значения в поле $A/\mathfrak{m} \supset \Bbbk$, конечном порождённом как алгебра над $\Bbbk$. По теор. 3.2 на стр. 49 такое поле является конечным алгебраическим расширением поля $\Bbbk$, а значит, совпадает с $\Bbbk$, коль скоро поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Это позволяет интерпретировать элементы произвольной алгебры A как функции на $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ со значениями в поле $\Bbbk$.

Лемма 3.5

Для любого аффинного алгебраического многообразия X над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ соответствия $p \longleftrightarrow \mathrm{ev}_p \longleftrightarrow \mathfrak{m}_p = \ker(\mathrm{ev}_p)$ устанавливают биекции между точками многообразия X, гомоморфизмами $\Bbbk$-алгебр $\Bbbk[X] \to \Bbbk$, и максимальными идеалами алгебры $\Bbbk[X]$.

Доказательство. Биективность второго соответствия мы уже проверили выше[2]. Сопоставление точке $p \in X \subset \mathbb{A}^n$ её максимального идеала $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p$ вкладывает множество точек в множество максимальных идеалов, поскольку для $p \neq q$ всегда можно указать аффинно линейную функцию $f : \mathbb{A}^n \to \Bbbk$ зануляющуюся в p и отличную от нуля в q. Чтобы показать, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любой максимальный идеал

$$\mathfrak{m} \subset \Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$$

имеет вид $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p$ для некоторой точки $p \in X$, обозначим через $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ полный прообраз идеала $\mathfrak{m}$ относительно отображения факторизации $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \twoheadrightarrow \Bbbk[X]$. Так как $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/\widetilde{\mathfrak{m}} = \Bbbk[X]/\mathfrak{m} = \Bbbk$, идеал $\widetilde{\mathfrak{m}}$ является собственным, максимальным и содержит $I(X)$. По слабой теореме о нулях все многочлены $f \in \widetilde{\mathfrak{m}}$ обращаются в нуль в некоторой точке $p \in \mathbb{A}^n$, лежащей на многообразии X, поскольку $I(X) \subset \widetilde{\mathfrak{m}}$. Следовательно, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_p$, что в силу максимальности идеала $\mathfrak{m}$ означает равенство $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$. $\square$

Соглашение 3.1. Всюду далее обозначение $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ используется как для множества гомоморфизмов $\Bbbk$-алгебр $A \to \Bbbk$, так и для множества максимальных идеалов в A, поскольку любой гомоморфизм факторизации $A \to \Bbbk$ однозначно задаётся своим ядром $\mathfrak{m} \subset A$.

[1]Это специальный случай гомоморфизма поднятия, отвечающий вложению $p \hookrightarrow X$ одноточечного множества p в многообразие X.

[2]Отметим, что сопоставление $\varphi \mapsto \ker \varphi$ инъективно вкладывает множество гомоморфизмов $\Bbbk$-алгебр $\varphi : A \to \Bbbk$ в множество максимальных идеалов алгебры A над любым, не обязательно алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$. Однако, над незамкнутым полем $\Bbbk$ не все максимальные идеалы являются ядрами гомоморфизмов вычисления со значениями в самом поле $\Bbbk$. Например, ядро гомоморфизма вычисления $\mathrm{ev}_{\sqrt{-1}} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f\left(\sqrt{-1}\right)$, является максимальным идеалом $\mathbb{R}$-алгебры $\mathbb{R}[x]$, но его нельзя реализовать как ядро вычисления $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, поскольку $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \ker \mathrm{ev}_{\sqrt{-1}} = 2$.

Пример 3.4 ($\mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \simeq \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\Bbbk^n)$)
Каждый гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\varphi : \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \to \Bbbk$ однозначно определяется набором чисел $p_i = \varphi(x_i) \in \Bbbk$, образов свободных образующих полиномиальной алгебры. Сопоставление $\varphi \mapsto (p_1, p_2, \dots, p_n)$ устанавливает биекцию между такими гомоморфизмами и точками аффинного координатного пространства $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\Bbbk^n)$. Ядро гомоморфизма

$$\mathrm{ev}_p : \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \to \Bbbk$$

порождается линейными двучленами $x_i - p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

3.2.3. Нильрадикал и радикал Джекобсона. Для произвольного коммутативного кольца A радикал нулевого идеала[1] в A называется *нильрадикалом* кольца A и обозначается $\mathfrak{n}(A) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{0} = \{a \in A \mid a^n = 0$ для некоторго $n \in \mathbb{N}\}$. Пересечение всех максимальных идеалов кольца A называется *радикалом Джекобсона* и обозначается $\mathfrak{r}(A)$.

Упражнение 3.10. Убедитесь, что $\mathfrak{n}(A)$ является идеалом в A.

Предложение 3.4
Для любой конечно порождённой алгебры A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ ядро гомоморфизма $A \to \Bbbk^{\mathrm{Spec_m} A}$, сопоставляющего каждому элементу $a \in A$ функцию $a : \mathrm{Spec_m}\,A \to \Bbbk$, $\mathfrak{m} \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}} \in A/\mathfrak{m} = \Bbbk$, совпадает с нильрадикалом алгебры A, т. е. $\mathfrak{n}(A) = \mathfrak{r}(A)$.

Доказательство. Поскольку для любого $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec_m}\,A$ фактор алгебра $A/\mathfrak{m}$ является полем и не содержит ненулевых нильпотентов, каждый нильпотентный элемент кольца задаёт нулевую функцию на спектре, ибо аннулируется всеми гомоморфизмами вычисления $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}$. Тем самым, $\mathfrak{n}(A) \subset \mathfrak{r}(A)$. Чтобы доказать обратное включение, рассмотрим приведённую конечно порождённую $\Bbbk$-алгебру $A_{\mathrm{red}} \overset{\text{def}}{=} A/\mathfrak{n}(A)$ и существующее по лем. 3.4 на стр. 56 алгебраическое многообразие $X \subset \mathbb{A}^n$ с координатной алгеброй $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X) \simeq A_{\mathrm{red}}$. Если $a \in \mathfrak{r}(A)$, то класс элемента a в A_{red} лежит в $\mathfrak{r}(A_{\mathrm{red}})$. Поэтому $a(p) = 0$ для всех точек $p \in X$, т. е. $a = 0$ в $\Bbbk[X] = A_{\mathrm{red}}$. Следовательно, $a \in \mathfrak{n}(A)$. □

Упражнение 3.11. Покажите, что для произвольного коммутативного кольца A с единицей нильрадикал $\mathfrak{n}(A)$ совпадает с пересечением всех простых[2] идеалов кольца A.

3.2.4. Эквивалентность категорий. Обозначим через $\mathcal{A\ell g}_\Bbbk$ категорию конечно порождённых приведённых алгебр с единицей над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$. Сопоставление аффинному алгебраическому многообразию X его координатной алгебры $\Bbbk[X]$, а регулярному морфизму аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$ гомоморфизма поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ задаёт контравариантный функтор[3]

$$h_{\mathbb{A}^1} : \mathcal{Aff}_\Bbbk^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A\ell g}_\Bbbk, \quad X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{Aff}_\Bbbk}(X, \mathbb{A}^1) = \Bbbk[X], \tag{3-12}$$

из категории аффинных алгебраических многообразий над полем $\Bbbk$ в категорию конечно порождённых приведённых $\Bbbk$-алгебр с единицей. Проверим, что этот функтор является оборачивающей стрелки эквивалентностью категорий, т. е.*по-существу сюрьективнен* и *вполне строг*[4].

[1] Т. е. множество всех нильпотентных элементов кольца, включая нуль.
[2] Напомню, что идеал $\mathfrak{p} \subset A$ называется *простым*, если в фактор кольце $A/\mathfrak{p}$ нет делителей нуля.
[3] Необходимые предварительные сведения о категориях и функторах можно почерпнуть из курса алгебры, см. например лекцию http://vyshka.math.ru/pspdf/1011/algebra-2/lec_10.pdf
[4] См. цитированную выше лекцию.

Первое означает, что каждая конечно порождённая приведённая $\Bbbk$-алгебра изоморфна координатной алгебре некоторого аффинного аффинного алгебраического многообразия, и было установлено нами в лем. 3.4 на стр. 56. Второе означает, что сопоставление регулярному морфизму многообразий его гомоморфизма подъёма задаёт биекцию

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Aff}_\Bbbk}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Alg}_\Bbbk}(\Bbbk[Y],\Bbbk[X]), \quad \varphi \mapsto \varphi^* . \tag{3-13}$$

Для построения обратного отображения рассмотрим функтор из категории конечно порождённых приведённых $\Bbbk$-алгебр с единицей в категорию множеств, сопоставляющй алгебре её максимальный спектр

$$h_\Bbbk : \mathcal{Alg}_\Bbbk \to \mathcal{Set}, \quad A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{Alg}_\Bbbk}(A, \Bbbk) = \mathrm{Spec}_\mathrm{m} A , \tag{3-14}$$

а гомоморфизму $\Bbbk$-алгебр $\psi : A \to B$ — *отображение подъёма* $\psi^* : \mathrm{Spec}_\mathrm{m} B \to \mathrm{Spec}_\mathrm{m} A$, переводящее сюрьекцию $\mathrm{ev} : B \to \Bbbk$ с ядром $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_\mathrm{m} B$ в сюрьекцию $\psi^*(\mathrm{ev}) = \mathrm{ev} \circ \psi$ с ядром $\psi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \mathrm{Spec}_\mathrm{m} \Bbbk[X]$. Сравнение определений показывает, что отображения множеств

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Aff}_\Bbbk}(X,Y) \underset{\psi^* \leftarrow\!\shortmid \psi}{\overset{\varphi \mapsto \varphi^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Alg}_\Bbbk}(\Bbbk[Y],\Bbbk[X])$$

обратны друг другу. В самом деле, если регулярный морфизм из алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в алгебраическое многообразие $Y \subset \mathbb{A}^m$ действует по правилу $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$, где $\varphi_i(x) \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, то его гомоморфизм подъёма $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ действует на образующие по правилу $y_i \mapsto \varphi_i \,(\mathrm{mod}\, I(X))$. Подъём этого гомоморфизма подъёма, т. е. отображение $\varphi^{**} : \mathrm{Spec}_\mathrm{m} \Bbbk[X] \to \mathrm{Spec}_\mathrm{m} \Bbbk[Y]$, переводит вычисление

$$\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \to \Bbbk, \quad f(x) \mapsto f(p),$$

в произвольной точке $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in X$ в композицию $\mathrm{ev}_p \circ \varphi^*$, которая переводит каждую образующую $y_i \in \Bbbk[Y]$ в число $\varphi_i(p) \in \Bbbk$ и, таким образом, является вычислением в точке $\varphi(p) \in Y$. Стало быть, $\varphi^{**} = \varphi$.

Упражнение 3.12. Установите для любого гомоморфизма $\Bbbk$-алгебр $\psi : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ равенство $\psi^{**} = \psi$.

Тем самым, отображение (3-13) биективно, и значит, функтор (3-13) является оборачивающей стрелки эквивалентностью категорий. Функтор (3-14) не является квазиобратным[1] к функтору (3-12) лишь потому, что принимает значения не в категории аффинных алгебраических многообразий, а в категории множеств. Для любой конечно порождённой приведённой $\Bbbk$ алгебры A с единицей, множество $\mathrm{Spec}_\mathrm{m} A$ допускает много различных, но изоморфных друг другу структур аффинного алгебраического многообразия, если понимать под таковой структурой вложение множеств $\varphi : \mathrm{Spec}_\mathrm{m} A \hookrightarrow \mathbb{A}^n$, биективно отображающее $\mathrm{Spec}_\mathrm{m} A$ на аффинное алгебраическое многообразие $V(\ker \varphi^*) \subset \mathbb{A}^n$, где $\varphi^* : \Bbbk[\mathbb{A}^n] \twoheadrightarrow A$ это гомоморфизм подъёма вложения φ. Задание такой структуры равносильно выбору представления алгебры A образующими и соотношениями, т. е. фиксации изоморфизма $A \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$.

[1] В смысле цитированной выше лекции.

Пример 3.5 (прямая и гипербола)
В прим. 3.4 на стр. 58 мы видели, что точки спектра $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[t]$ биективно соответствуют точкам аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \Bbbk$, ибо всякий гомоморфизм $\mathrm{ev} : \Bbbk[t] \to \Bbbk$ однозначно определяется своим значением $\mathrm{ev}(t) = \lambda \in \Bbbk$ на образующей алгебры $\Bbbk[t]$, и это значение может быть любым. Аналогично, спектр алгебры полиномов Лорана $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[t, t^{-1}]$ находится в естественной биекции с точками аффинной прямой с выколотым нулём, т. е. с открытым множеством $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\} = \Bbbk^*$, ибо значение $\lambda = \mathrm{ev}(t) = 1/(\mathrm{ev}(t^{-1})$ может быть любым *обратимым* элементом поля $\Bbbk$. Если же задать алгебру полиномов Лорана образующими и соотношениями, например, посредством изоморфизма $\varphi^* : \Bbbk[t, t^{-1}] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[x, y]/(xy - 1)$, переводящего t в x, а t^{-1} в y, то её спектр отождествится с множеством точек гиперболы $xy = 1$ в $\mathbb{A}^2$. При этом отображение поднятия $\varphi = \varphi^{**} : V(xy - 1) \to \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\}$ будет проекцией гиперболы на координатную ось.

3.2.5. Дизъюнктные объединения (копроизведения) многообразий. Для аффинных алгебраических многообразий X и Y прямое произведение алгебр $\Bbbk[X]\times\Bbbk[Y]$ конечно порождено, приведено, содержит единицу и обладает следующим универсальным свойством: для любой пары гомоморфизмов $\varphi^* : B \to \Bbbk[X]$, $\psi^* : B \to \Bbbk[Y]$ из произвольной $\Bbbk$-алгебры B существует единственный гомоморфизм $\eta^* : B \to \Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& \Bbbk[X]\times\Bbbk[Y] \arrow[dl, "i_X^*"'] \arrow[dr, "i_Y^*"] & \\
\Bbbk[X] & & \Bbbk[Y] \\
& B \arrow[ul, "\varphi^*"] \arrow[ur, "\psi^*"'] \arrow[uu, dotted, "\eta^*"] &
\end{tikzcd}$$

в которой $i_X^* : \Bbbk[X] \times \Bbbk[Y] \twoheadrightarrow \Bbbk[X]$ и $i_Y^* : \Bbbk[X] \times \Bbbk[Y] \twoheadrightarrow \Bbbk[Y]$ суть проекции произведения на сомножители, переводящие $(f, g) \in \Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]$ в $f \in \Bbbk[X]$ и $g \in \Bbbk[Y]$ соответственно.

Упражнение 3.13. Проверьте это, и покажите любая алгебра A с парой гомоморфизмов

$$i_X^* : A \to \Bbbk[X] \quad \text{и} \quad i_Y^* : A \to \Bbbk[Y],$$

удовлетворяющих предыдущему универсальному свойству, канонически изоморфна алгебре $\Bbbk[X]\times\Bbbk[Y]$ посредством единственного изоморфизма, перестановочного с гомоморфизмами i_X^* и i_Y^*.

Из установленной в n° 3.2.4 эквивалентности категорий вытекает, что аффинное алгебраическое многообразие $X \sqcup Y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}\big(\Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]\big)$ обладает двойственным универсальным свойством: для любой пары регулярных морфизмов $\varphi : X \to Z$, $\psi : Y \to Z$ в любое аффинное алгебраическое многообразие Z существует единственный регулярный морфизм $\eta : X \sqcup Y \to Z$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& X \sqcup Y \arrow[dd, dotted, "\eta^*"] & \\
X \arrow[ur, "i_X"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[ul, "i_Y^*"'] \arrow[dl, "\psi^*"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Упражнение 3.14. Проверьте, что для любых объектов X, Y произвольной категории объект $X \sqcup Y$ и обладающие предыдущим универсальным свойством морфизмы

$$i_X : X \to X \sqcup Y, \quad i_Y : Y \to X \sqcup Y,$$

если существуют, то единственны точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с i_X и i_Y. Убедитесь также, что в категории множеств таким объектом является дизъюнктное объединение множеств X и Y.

Упражнение 3.15. Пусть аффинное алгебраическое многообразие X является теоретико-множественным объединением двух непустых непересекающихся аффинных алгебраических многообразий Y и Z. Покажите, что $\Bbbk[X] = \Bbbk[Y] \times \Bbbk[Z]$.

3.2.6. Прямые произведения многообразий. Для коммутативных $\Bbbk$-алгебр A и B и единицами тензорное произведение векторных пространств $A \otimes B$ имеет естественную структуру коммутативной $\Bbbk$-алгебры с единицей $1 \otimes 1$ и умножением, которое на разложимых тензорах задаётся формулой $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$.

Упражнение 3.16. Убедитесь в этом.

Из универсального свойства тензорного произведения вытекает, что гомоморфизмы $\Bbbk$-алгебр

$$\begin{aligned} \alpha &: A \to A \otimes B \quad a \mapsto a \otimes 1, \\ \beta &: B \to A \otimes B \quad b \mapsto 1 \otimes b, \end{aligned} \tag{3-15}$$

обладают универсальными свойствами *копроизведения*, т. е. для любой пары гомоморфизмов $\varphi: A \to C, \psi: B \to C$ существует единственный гомоморфизм $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \to C$ со свойствами $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ \alpha$ и $\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \beta$, и этот гомоморфизм действует на разложимые тензоры по правилу $\varphi \otimes \psi : a \otimes b \mapsto \varphi(a)\psi(b)$.

Упражнение 3.17. Убедитесь в этом.

Например, тензорное произведение алгебр $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \otimes \Bbbk[y_1, y_2, \dots, y_m]$ изоморфно алгебре многочленов $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m]$ посредством отображения

$$x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n} \otimes y_1^{r_1} y_2^{r_2} \cdots y_m^{r_m} \mapsto x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n} y_1^{r_1} y_2^{r_2} \cdots y_m^{r_m}.$$

Эквивалентность категорий из n° 3.2.4 превращает этот изоморфизм в изоморфизм аффинных алгебраических многообразий $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \simeq \mathbb{A}^{n+m}$.

Предложение 3.5

Тензорное произведение конечно порождённых приведённых $\Bbbk$-алгебр $A \otimes B$ является конечно порождённой приведённой $\Bbbk$-алгеброй с максимальным спектром $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A \otimes B) = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A) \times \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(B)$. В частности, теоретико множественное произведение аффинных алгебраических многообразий тоже является аффинным алгебраическим многообразием.

Доказательство. Биекция $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A) \times \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A \otimes B)$ переводит точку (p, q), представленную парой эпиморфизмов вычисления $\mathrm{ev}_p : A \to \Bbbk$, $\mathrm{ev}_q : B \to \Bbbk$ в эпиморфизм вычисления

$$A \otimes B \to \Bbbk, \quad a \otimes b \mapsto \mathrm{ev}_p(a)\,\mathrm{ev}_p(b),$$

существующий в силу универсального свойства тензорного произведения. Алгебра $A \otimes B$ порождается над $\Bbbk$ всевозможными попарными тензорными произведениями образующих алгебр A и B, коих имеется конечное число. Чтобы показать, что $A \otimes B$ приведена, достаточно согласно предл. 3.4 на стр. 58 убедиться в том, что всякий элемент $h \in A \otimes B$, задающий нулевую функцию на $\mathrm{Spec_m}(A \otimes B)$, равен нулю. Для этого запишем такой элемент h в виде $\sum f_\nu \otimes g_\nu$ с линейно независимыми над $\Bbbk$ элементами $g_\nu \in B$. Из равенства $(\mathrm{ev}_p \otimes \mathrm{ev}_q)h = 0$, справедливого для всех $(p, q) \in \mathrm{Spec_m}(A \otimes B)$, вытекает, что при произвольно зафиксированном $p \in \mathrm{Spec_m} A$ линейная комбинация $\sum f_\nu(p) \cdot g_\nu \in B$ является тождественно нулевой функцией на $\mathrm{Spec_m} B$, и значит, равна нулю в B, так как алгебра B приведена. Это означает, что все константы $f_\nu(p)$ нулевые для любого $p \in \mathrm{Spec_m} A$, т. е. элементы $f_\nu \in A$ задают тождественно нулевые функции $\mathrm{Spec_m} A \to \Bbbk$. Поскольку алгебра A приведена, все $f_\nu = 0$, а значит и $h = 0$. □

3.3. Топология Зарисского. На множестве $X = \mathrm{Spec_m} A$ имеется каноническая топология, отражающая алгебраические свойства алгебры A. Она называется *топологией Зарисского* и имеет в качестве замкнутых подмножеств алгебраические подмногообразия в X, т. е. множества $V(I) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in I\} = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec_m} A \mid I \subset \mathfrak{m}\}$ для всевозможных идеалов $I \subset A$.

Упражнение 3.18. Убедитесь, что[1]

$$\varnothing = V(1)\,, \quad X = V(0)\,, \quad \bigcap_\nu V(I_\nu) = V\Big(\sum_\nu I_\nu\Big)\,, \quad V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(IJ)\,, \tag{3-16}$$

где идеал $\sum_\nu I_\nu$ состоит из всех конечных сумм $\sum_\nu f_\nu$ с $f_\nu \in I_\nu$, а идеал IJ является $\Bbbk$-линейной оболочкой всевозможных произведений ab с $a \in I$, $b \in J$.

В топологии Зарисского вложение открытых окрестностей друг в друга выражает связано, скорее, с делимостью в алгебре функций, чем с «близостью» или «удалённостью» точек, составляющих эти окрестности. Поэтому многие свойства топологии Зарисского выглядят экзотическими с точки зрения интуиции, основанной на опыте работы с метрическими пространствами.

Например, топология Зарисского на произведении $X \times Y$ обычно тоньше произведения топологий Зарисского на X и Y, поскольку замкнутые подмножества $Z \subset X \times Y$ не исчерпываются пересечениями произведений замкнутых подмножеств в X, Y. Скажем, для $X = Y = \mathbb{A}^1$ любая плоская алгебраическая кривая замкнута в топологии Зарисского на $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$, в то время как произведения замкнутых множеств на $\mathbb{A}^1$ это конечные объединения изолированных точек и координатных прямых.

Лемма 3.6
Всякий регулярный морфизм алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ непрерывен в топологии Зарисского.

Доказательство. Прообраз $\varphi^{-1}(Z)$ замкнутого $Z = V(I) \subset Y$ состоит из всех $x \in X$, для которых $0 = f(\varphi(x)) = \varphi^* f(x) \quad \forall f \in I$, т. е. является множеством нулей идеала, порождённого в $\Bbbk[X]$ образом $\varphi^*(I)$ идеала I при гомоморфизме поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$. □

3.3.1. База и компактность. Поскольку всякий идеал $I \subset \Bbbk[X]$ конечно порождён, каждое замкнутое множество является пересечением конечного набора гиперповерхностей:

$$V(I) = V(f_1, f_2, \dots, f_m) = \bigcap_\nu V(f_\nu)$$

для идеала $I = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. Поэтому любое открытое множество

$$X \smallsetminus V(I) = \bigcup_\nu \big(X \smallsetminus V(f_\nu)\big)$$

[1] Обратите внимание, что последнее равенство в (3-16) равносильно равенству $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{IJ}$.

является *конечным* объединением *главных* открытых множеств

$$\mathcal{D}(f) \overset{\text{def}}{=} X \smallsetminus V(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}\,.$$

Таким образом, главные открытые множества составляют базу топологии Зарисского, и любое открытое подмножество $U \subset X$, включая само X, *компактно* в том смысле, что в каждом его открытом покрытии содержится конечное подпокрытие.

Упражнение 3.19. Докажите это.

3.3.2. Неприводимые компоненты. Топологическое пространство X, представимое в виде объединения $X = X_1 \cup X_2$ собственных замкнутых подмножеств $X_1, X_2 \subsetneq X$, называется *приводимым*. В метрической топологии это понятие бессодержательно, поскольку любое пространство, содержащее более одной точки, приводимо. В топологии Зарисского неприводимые алгебраические многообразия играют примерно такую же роль, какую степени простых чисел играют в арифметике.

Предложение 3.6
Аффинное алгебраическое многообразие неприводимо тогда и только тогда, когда в его координатной алгебре $\Bbbk[X]$ нет делителей нуля.

Доказательство. Разложение $X = X_1 \cup X_2$, в котором каждое X_i замкнуто, непусто и отлично от X, означает наличие ненулевых регулярных функций $f_1 \in I(X_1)$ и $f_2 \in I(X_2)$, произведение которых $f_1 f_2$ тождественно зануляется на всём X, и значит, равно нулю $\Bbbk[X]$. Наоборот, если $f_1 f_2 = 0$ в $\Bbbk[X]$ каких-либо ненулевых функций $f_i \in \Bbbk[X]$, то обе они необратимы в $\Bbbk[X]$, а значит, замкнутые подмножества $V(f_1), V(f_2) \subset X$ оба непусты, отличны от X, и при этом $X = V(f_1) \cup V(f_2)$. □

Упражнение 3.20. Убедитесь, что $V(f)$ непусто и отлично от X для всякого ненулевого необратимого многочлена $f \in \Bbbk[X]$.

Следствие 3.6
Аффинная гиперповерхность $\{g(x) = 0\} \subset \mathbb{A}^n$ неприводима тогда и только тогда, когда g является степенью неприводимого многочлена.

Доказательство. Поскольку алгебра $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ факториальна, радикал любого главного идеала $\sqrt{(f)}$ также является главным идеалом, порождённым произведением всех попарно неассоциированных неприводимых делителей многочлена f. Следовательно координатная алгебра $\Bbbk[V(f)] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/\sqrt{(f)}$ не имеет делителей нуля , если и только если у f имеется единственный с точностью до умножения на константы неприводимый делитель. □

Теорема 3.4
Каждое аффинное алгебраическое многообразие имеет единственное разложение в конечное объединение $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k$ таких неприводимых замкнутых подмножеств $X_i \subset X$, что $X_i \not\subset X_j$ при $i \neq j$.

Доказательство. Разложение строится рекурсивно. Если X приводимо, мы представляем его в виде $X = Z_1 \cup Z_2$, где $Z_{1,2}$ являются собственными замкнутыми подмножествами в X, и далее повторяем эту процедуру с каждым Z_i, пока не придём к конечному разложению $X = \bigcup Z_\nu$, в котором все Z_ν неприводимы. Выкидывая те Z_ν, которые содержатся в других Z_μ, получаем требуемое разложение. Если рекурсивная процедура никогда не остановится, возникнет бесконечная цепочка строго вложенных замкнутых подмножеств $X \supsetneq Y_1 \supsetneq Y_2 \supsetneq \dots$, идеалы которых образуют бесконечную строго возрастающую цепочку $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$, а это противоречит нётеровости алгебры $\Bbbk[X]$.

Единственность разложения доказывается индукцией по числу неприводимых компонент. Пусть X раскладывается на k компонент и для всех многообразий, раскладывающихся на меньшее число компонент, разложение единственно. Для неприводимого Y включение $Y \subset Z_1 \cup Z_2$ означает разложение $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$ и влечёт включение $Y \subset Z_1$ или включение $Y \subset Z_2$. Поэтому равенство двух разложений на неприводимые компоненты

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = Y_1 \cup Y_2 \cup \ \dots \ \cup Y_m$$

означает, что $X_1 \subset Y_\alpha \subset X_\beta$ для некоторых α, β, откуда $X_1 = Y_\alpha = X_\beta$ и $\beta = 1$. Перенумеруем Y_i так, чтобы $\alpha = 1$. Тогда из упр. 3.21 ниже вытекает равенство

$$\begin{aligned} X_2 \cup \ldots \cup X_k = \overline{X_2 \smallsetminus X_1} \cup \ldots \cup \overline{X_k \smallsetminus X_1} = \overline{X \smallsetminus X_1} = \\ = \overline{X \smallsetminus Y_1} = \overline{Y_2 \smallsetminus X_1} \cup \ldots \cup \overline{Y_m \smallsetminus Y_1} = Y_2 \cup \ldots \cup Y_m\,, \end{aligned}$$

к которому применимо предположение индукции. □

Упражнение 3.21. Пусть $Z \subsetneq Y \subset X$ замкнуты и Y неприводимо. Убедитесь, что $Y = \overline{Y \smallsetminus Z}$ (замыкание берётся в X) и что неприводимость Y для этого существенна.

Определение 3.3
Неприводимые замкнутые подмножества $X_i \subset X$, о которых идёт речь в теор. 3.4, называются *неприводимыми компонентами* многообразия X.

Предложение 3.7
Элемент $f \in \Bbbk[X]$ делит нуль , если и только если он обращается в нуль на какой-нибудь неприводимой компоненте многообразия X.

Доказательство. Пусть $fg = 0$ и $g \neq 0$. Обозначим ограничения функций f, g на неприводимые компоненты $X_i \subset X$ через $f_i, g_i \in \Bbbk[X_i]$. Поскольку $g \neq 0$ в $\Bbbk[X]$, хотя бы при одном i ограничение $g_i \neq 0$ в $\Bbbk[X_i]$. Так как в $\Bbbk[X_i]$ нет делителей нуля, мы заключаем, что $f_i = 0$ в $\Bbbk[X_i]$. Наоборот, если $f_i = 0$ для какого-нибудь i, то $fg = 0$ для любой ненулевой функции $g \in I\left(\bigcup_{\nu \neq i} X_\nu\right)$. □

3.3.3. Большие открытые множества. Топология Зарисского нехаусдорфова. Если X неприводимо, любые два непустых открытых подмножества $U_1, U_2 \subset X$ имеют непустое пересечение, т. к. в противном случае возникает разложение $X = (X \smallsetminus U_1) \cup (X \smallsetminus U_2)$ в объединение собственных замкнутых подмножеств. Таким образом, каждое непустое открытое подмножество неприводимого многообразия всюду плотно в нём. Поскольку регулярные функции непрерывны в топологии Зарисского, из плотности непустых открытых множеств вытекает, что две регулярных функции f, g на неприводимом многообразии X, принимающие равные значения во всех точках какого-нибудь непустого открытого подмножества в X, совпадают как элементы алгебры $\Bbbk[X]$.

3.4. Рациональные функции. Все элементы координатной алгебры $\Bbbk[X]$, которые не являются делителями нуля, образуют *мультипликативную систему*[1] $S_X \subset \Bbbk[X]$. Кольцо частных[2] $\Bbbk[X]S_X^{-1}$ называется *кольцом рациональных функций* на X и обозначается $\Bbbk(X)$.

Если многообразие X неприводимо, то $S_X = \Bbbk[X]^* = \Bbbk[X] \smallsetminus 0$ и $\Bbbk(X) = Q_{\Bbbk[X]}$ является полем частных целостного кольца $\Bbbk[X]$.

Скажем, что рациональная функция $f \in \Bbbk(X)$ *определена* в точке $x \in X$, если существует такое её представление в виде дроби $f = p/q$, в котором $p, q \in \Bbbk[X]$, q не делит нуль, и $q(x) \neq 0$. Число $f(x) = p(x)/q(x) \in \Bbbk$ называется *значением* функции f в точке x.

Упражнение 3.22. Убедитесь, что $f(x)$ не зависит от выбора представления $f = p/q$ оговорённого выше вида.

Множество точек x, в которых определена рациональная функция f, называется *областью определения* функции f и обозначается $\mathrm{Dom}(f)$. Из предл. 3.7 и n° 3.3.3 вытекает, что $\mathrm{Dom}(f)$ является плотным открытым подмножеством в X.

Упражнение 3.23. Убедитесь, что для совпадения двух рациональных функций как элементов кольца $\Bbbk(X)$ достаточно поточечного совпадения их значений на каком-нибудь плотном открытом подмножестве в X.

Для открытого $U \subset X$ положим $\Bbbk[U] \overset{\text{def}}{=} \{f \in \Bbbk(X) \mid \mathrm{Dom}(f) \supset U\}$ и будем называть эту алгебру *алгеброй рациональных функций*, регулярных в U.

Лемма 3.7
Если $h \in \Bbbk[X]$ не делит нуль, то $\Bbbk\big[\mathcal{D}(h)\big] = \Bbbk[X][h^{-1}]$ является кольцом частных $\Bbbk[X]$ со знаменателями из мультипликативной системы $\{h^k\}_{k\geqslant 0}$.

Доказательство. Для рациональной функции $f \in \Bbbk(X)$ положим

$$\left(f^{-1}\right) \overset{\text{def}}{=} \{g \in \Bbbk[X] \mid gf \in \Bbbk[X]\}\,. \tag{3-17}$$

Это идеал в $\Bbbk[X]$, и лежащие в нём неделители нуля исчерпывают все знаменатели, встречающиеся во всевозможных представлениях функции f в виде дроби.

Упражнение 3.24. Покажите, что они линейно порождают идеал $\left(f^{-1}\right)$ как векторное пространство над $\Bbbk$.

Таким образом, $X \smallsetminus \mathrm{Dom}(f) = V\big(\left(f^{-1}\right)\big)$. Включение $\mathcal{D}(h) \subset \mathrm{Dom}(f)$ равносильно включению $V(h) \supset V\big(\left(f^{-1}\right)\big)$, т. е. занулению функции h на общих нулях всех знаменателей функции f. По теоремам Гильберта о нулях $h^d \in \left(f^{-1}\right)$ для некоторого $d \in \mathbb{N}$. Тем самым, $f = p/h^d$, где $p = h^d \cdot f \in \Bbbk[X]$. □

[1] Напомню, что подмножество S в коммутативном кольце A с единицей называется *мультипликативной системой*, если $1 \in S$, $0 \notin S$ и $s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 s_2 \in S$.

[2] Напомню, что кольцо частных AS^{-1} со знаменателями в мультипликативной системе S коммутативного кольца A с единицей называется фактор декартова произведения $A \times S$ по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему равенства $a/s = (at)/(st)$ со всевозможными $a \in A$ и $s, t \in S$. Классы эквивалентности пар (a, s) по модулю этого отношения называются *дробями*, обозначаются a/s и образуют коммутативное кольцо. Подробности см. в курсе алгебры, например, в лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-04.pdf.

3.4.1. Аффинность главных открытых множеств. Если $h \in \Bbbk[X]$ не делит нуль, то главное открытое подмножество $\mathcal{D}(h) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][h^{-1}] \simeq \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][t]/(1-ht)$ всюду плотно в X и является аффинным алгебраическим многообразием, реализуемым, например, замкнутой гиперповерхностью $V(1-ht) \subset X \times \mathbb{A}^1$. Вложение $i : \mathcal{D} \hookrightarrow X$ является регулярным морфизмом аффинных многообразий. Его гомоморфизм подъёма задаёт каноническое вложение $i^* : \Bbbk[X] \hookrightarrow \Bbbk[X][h^{-1}] \simeq \Bbbk[\mathcal{D}(h)]$ и продолжается до изоморфизма колец частных $i^* : \Bbbk(X) \xrightarrow{\sim} \Bbbk\big(\mathcal{D}(h)\big)$. Обратите внимание, что два *разных* толкования записи $\Bbbk\big[\mathcal{D}(h)\big]$ — как координатной алгебры замкнутого аффинного многообразия $\mathcal{D}(h) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][h^{-1}]$ и как алгебры рациональных функций, регулярных на открытом множестве $\mathcal{D}(h) \subset X$, вполне *согласованы* друг с другом.

Теорема 3.5
Пусть $X = X_1 \cup X_2 \cup \ \dots\ \cup X_k$ — разложение аффинного алгебраического многообразия X на неприводимые компоненты. Тогда $\Bbbk(X) = \Bbbk(X_1) \times \Bbbk(X_2) \times \ \dots\ \times \Bbbk(X_k)$.

Доказательство. Выберем в идеале $I = I\big(\bigcup\limits_{i\neq j}(X_i \cap X_j)\big) \subset \Bbbk[X]$, который состоит из всех функций, зануляющихся на всех попарных пересечениях различных неприводимых компонент многообразия X, функцию $f \in I$, не делящую нуль в $\Bbbk[X]$.

Упражнение 3.25. Убедитесь, что идеал I в действительности линейно порождается такими функциями как векторное пространство над $\Bbbk$.

Главное открытое подмножество $W = \mathcal{D}(f) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][f^{-1}] \subset X$ аффинно и является дизъюнктным объединением подмножеств $W_i = W \cap X_i \subset X_i$. Каждое W_i является главным открытым подмножеством многообразия X_i и тоже аффинно:

$$W_i = \mathcal{D}(f_i) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X_i][f_i^{-1}] \subset X_i\,, \quad \text{где} \quad f_i = f \pmod{I(X_i)} \in \Bbbk[X_i]\,.$$

Согласно упр. 3.15, $\Bbbk[W] \simeq \Bbbk[W_1] \times \Bbbk[W_2] \times \cdots \times \Bbbk[W_k]$.

Упражнение 3.26. Проверьте, что кольцо частных прямого произведения коммутативных колец с единицами изоморфно прямому произведению колец частных сомножителей

$$(K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_k) S^{-1}_{K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_k} \simeq K_1 S^{-1}_{K_1} \times K_2 S^{-1}_{K_2} \times \cdots \times K_k S^{-1}_{K_k}\,.$$

Таким образом, $\Bbbk(X) \simeq \Bbbk(W) \simeq \prod \Bbbk(W_i) \simeq \prod \Bbbk(X_i)$. □

Предостережение 3.1. Хотя главные открытые множества $\mathcal{D}(f)$, задаваемые не делящими нуль регулярными функциями $f \in \Bbbk[X]$, и являются аффинными алгебраическими многообразиями, произвольное открытое подмножество $U \subset X$ аффинным алгебраическим многообразием, вообще говоря, *не является*, и вложение $U \hookrightarrow \operatorname{Spec_m} \Bbbk[U]$, сопоставляющее точке $u \in U$ её максимальный идеал $\mathfrak{m}_u = \ker \operatorname{ev}_u \subset \Bbbk[U]$, может не быть биективным.

Упражнение 3.27. Пусть $n \geqslant 2$ и $U = \mathbb{A}^n \smallsetminus O$ — дополнение к началу координат в аффинном пространстве. Покажите, что $\Bbbk[U] = \Bbbk[\mathbb{A}^n]$, и тем самым, $\operatorname{Spec_m} \Bbbk[U] = \mathbb{A}^n \neq U$.

3.5. Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр. Любой гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$$

канонически разлагается в композицию эпиморфизма и вложения:

$$\Bbbk[Y] \twoheadrightarrow \Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi^*) \hookrightarrow \Bbbk[X]\,. \tag{3-18}$$

Поскольку алгебра $\Bbbk[Y]$ конечно порождена, а алгебра $\Bbbk[X]$ приведена, алгебра

$$\Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi^*) \subset \Bbbk[X]$$

тоже является конечно порождённой приведённой $\Bbbk$-алгеброй, отвечающей аффинному многообразию $Z = \operatorname{Spec_m}(\operatorname{im}(\varphi^*)) \simeq V(\ker(\varphi^*)) \subset Y$. Инъективность гомоморфизма

$$\varphi_1^* : \Bbbk[Z] \to \Bbbk[X]$$

означает отсутствие ненулевых функций $f \in \Bbbk[Z]$, зануляющихся на образе $\varphi_1(X) \subset Z$, т. е. *плотность* множества $\varphi_1(X)$ в Z. Тем самым, $Z = \overline{\varphi(X)} \subset Y$ является замыканием образа $\varphi(X)$ в многообразии Y. Оно вложено в Y как замкнутое подмногообразие $V(\ker\varphi^*)$ нулей идеала $\ker\varphi^* \subset \Bbbk[Y]$. Мы заключаем, что алгебраическому разложению (3-18) на геометрическом языке отвечает разложение регулярного морфизма многообразий $\varphi : X \to Y$ в композицию

$$X \xrightarrow{\varphi_1} Z = \overline{\varphi(X)} \xhookrightarrow{\varphi_2} Y$$

регулярного морфизма $X \to Z$ с плотным образом и регулярного вложения Z в Y в качестве замкнутого подмногообразия.

3.5.1. Замкнутые вложения. Морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *замкнутым вложением*, если его гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to k[X]$ сюрьективен. Это означает, что φ является изоморфизмом между X и замкнутым подмногообразием $V(\ker\varphi^*) \subset Y$. Если замкнутое подмножество $Z \subset X$ неприводимо, замкнутое вложение $i : Z \hookrightarrow X$ имеет сюрьективный гомоморфизм подъёма $i^* : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow \Bbbk[Z]$, принимающий значения в целостном кольце $\Bbbk[Z]$, которое канонически вложено в своё поле частных $\Bbbk(Z)$. По универсальному свойству кольца частных $\Bbbk(X)$ эпиморфизм i^* однозначно продолжается до эпиморфизма

$$\operatorname{ev}_Z : \Bbbk(X) \twoheadrightarrow \Bbbk(Z)\,, \tag{3-19}$$

который ограничивает рациональные функции с X на Z. Сюрьекцию (3-19) можно воспринимать как гомоморфизм вычисления рациональных функций на X в «общей точке» неприводимого подмногообразия $Z \subset X$, где всякая рациональная функция определена. Результатом такого вычисления является рациональная функция на подмногообразии Z, т. е. элемент поля $\Bbbk(Z)$, который в дальнейшем может быть вычислен в некоторых «конкретных» точках $z \in Z$. В частности, когда $Z \subset X$ является неприводимой компонентой приводимого аффинного многообразия X, сюрьективность гомоморфизма (3-19) даёт возможность представить любую рациональную функцию на компоненте $Z \subset X$ в виде ограничения некоторой рациональной функции на X, т. е. в виде дроби p/q, знаменатель q которой не зануляется тождественно ни на одной из неприводимых компонент многообразия X.

Упражнение 3.28. Укажите такое представление для рациональной функции $1/x$ на компоненте $Z = V(y)$ координатного креста $X = V(xy)$ на аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$.

3.5.2. Доминантные морфизмы. Если многообразие X неприводимо, то регулярное отображение $\varphi : X \to Y$ называется *доминантным*, если его гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ инъективен. Как мы видели выше, это означает, что $\overline{\varphi(X)} = Y$. Регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ приводимого многообразия X называется *доминантным*, если доминантно его ограничение $\varphi_i = \varphi|_{X_i} : X_i \to Y$ на каждую неприводимую компоненту $X_i \subset X$. В этом случае все гомоморфизмы подъёма $\varphi_i^* : \Bbbk[Y] \hookrightarrow \Bbbk[X_i] \subset \Bbbk(X_i)$ инъективны, и по универсальному свойству кольца частных их прямое произведение однозначно продолжается до вложения колец рациональных функций $\Bbbk(Y) \hookrightarrow \prod \Bbbk(X_i) = \Bbbk(X)$.

Упражнение 3.29. Покажите, что любой доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$ является композицией замкнутого вложения $\psi : X \hookrightarrow Y \times \mathbb{A}^m$ с последующей проекцией $\pi : Y \times \mathbb{A}^m \twoheadrightarrow Y$ вдоль $\mathbb{A}^m$.

3.5.3. Конечные морфизмы. Регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *конечным*, если расширение алгебр $\varphi^*(k[Y]) \subset \Bbbk[X]$ является целым, т. е. когда координатная алгебра $\Bbbk[X]$ является конечно порождённым модулем над своей подалгеброй $\varphi^*(\Bbbk[Y])$.

Упражнение 3.30. Убедитесь, что конечность морфизма $\varphi : X \to Y$ равносильна конечности индуцированного им морфизма $X \to \overline{\varphi(X)}$.

Предложение 3.8
Любой конечный морфизм аффинных алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ переводит каждое замкнутое подмножество $Z \subset X$ в замкнутое подмножество $\varphi(Z) \subset Y$, и ограничение

$$\varphi_Z : Z \to \varphi(Z)$$

тоже является конечным морфизмом. Если многообразие X неприводимо, собственные замкнутые подмножества в X переходят в собственные замкнутые подмножества в Y.

Доказательство. Если замкнутое множество $Z \subset X$ имеет идеал $I = I(Z) \subset \Bbbk[X]$, гомоморфизм подъёма для регулярного отображения $\varphi_Z : Z \to \overline{\varphi(Z)}$ является композицией гомоморфизма $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ с последующей факторизацией $\Bbbk[X] \twoheadrightarrow \Bbbk[X]/I = \Bbbk[Z]$. Поскольку алгебра $\Bbbk[X]$ конечно порождена как модуль над $\varphi^*(\Bbbk[Y])$, её фактор алгебра $\Bbbk[Z] = \Bbbk[X]/I$ тоже конечно порождена как модуль над $\varphi_Z^*(\Bbbk[Y]) = \varphi^*(\Bbbk[Y])/(I \cap \varphi^*(\Bbbk[Y]))$. Поэтому морфизм $\varphi_Z : Z \to \overline{\varphi(Z)}$ конечен. Замкнутость множества $\varphi(Z)$ равносильна тому, что он сюрьективен. Проверять это можно отдельно для каждой неприводимой компоненты множества Z. Таким образом, для доказательства первого утверждения леммы достаточно проверить, что каждый конечный доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$ сюрьективен. Так как гомоморфизм подъёма $\varphi^* : \Bbbk[Y] \hookrightarrow \Bbbk[X]$ в этой ситуации инъективен, мы можем отождествить алгебру $\Bbbk[Y]$ с её образом $\varphi^*(\Bbbk[Y]) \subset \Bbbk[X]$. При таком отождествлении морфизм $\varphi = \varphi^{**} : \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X] \to \operatorname{Spec_m} \Bbbk[Y]$ переводит каждый максимальный идеал из $\Bbbk[X]$ в его пересечение с подалгеброй $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk[X]$, и сюрьективность φ означает, что любой максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$ является пересечением подалгебры $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk[X]$ с каким-нибудь максимальным идеалом $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[X]$. Если идеал $\mathfrak{m}\,\Bbbk[X]$, порождённый элементами идеала $\mathfrak{m}$ в объемлющей алгебре $\Bbbk[X]$, является собственным, то нужное равенство $\mathfrak{m} = \widetilde{\mathfrak{m}} \cap \Bbbk[Y]$ выполняется для любого максимального идеала $\widetilde{\mathfrak{m}} \supset \mathfrak{m}\,\Bbbk[X]$. Проверим, для любого собственного идеала $J \subset \Bbbk[Y]$, идеал $J\,\Bbbk[X] \subsetneq \Bbbk[X]$ тоже собственный.

Пусть функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ порождают $\Bbbk[X]$ как модуль над $\Bbbk[Y]$. Если $J\,\Bbbk[X] = \Bbbk[X]$, то каждую из них можно записать в виде $f_i = \sum\limits_{\nu} f_\nu c_{\nu i}$, где все $c_{\nu i} \in J$. Как и в доказательстве

лем. 3.2 на стр. 46 это приводит к матричному равенству $(f_1, f_2, \dots, f_m) \cdot (E - C) = 0$, где матрица $C = \left(c_{\nu i}\right) \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(J)$, а E — единичная матрица. Поэтому умножение на $\det(E - C)$ аннулирует алгебру $\Bbbk[X]$, откуда $\det(E - C) = 0$. Раскрывая этот определитель, заключаем, что $1 \in J$, т. е. идеал J не является собственным.

Для доказательства последнего утверждения леммы рассмотрим произвольное собственное замкнутое подмножество $Z \subsetneq X$ и любую ненулевую функцию $f \in \Bbbk[X]$, тождественно зануляющуюся вдоль Z. Поскольку функция f цела над подалгеброй $\varphi^*(k[Y])$, она удовлетворяет уравнению $f^m + \varphi^*(g_1)f^{m-1} + \dots + \varphi^*(g_{m-1})f + \varphi^*(g_m) = 0$, в котором $g_i \in \Bbbk[Y]$. Если X неприводимо, функция f не является делителем нуля, и сокращая, при необходимости, это уравнение на f, мы можем считать, что его свободный член $\varphi^*(g_m) \neq 0$, а значит, и $g_m \neq 0$. Вычисляя левую часть уравнения в точках $z \in Z$, заключаем, что функция g_m тождественно зануляется на $\varphi(Z) \subset Y$. Стало быть $\varphi(Z) \neq Y$. □

3.5.4. Нормальные многообразия. Аффинное алгебраическое многообразие Y называется *нормальным*, если оно неприводимо и его координатная алгебра $\Bbbk[Y]$ целозамкнута в поле рациональных функций $\Bbbk(Y) = Q_{\Bbbk[Y]}$, т. е. является *нормальным кольцом* в смысле n° 3.1.5. Например, любое аффинное многообразие с факториальной координатной алгеброй нормально. В частности, нормальны все аффинные пространства[1] $\mathbb{A}^n$.

Предложение 3.9

Всякий сюрьективный конечный морфизм $\varphi : X \to Y$ в нормальное многообразие Y открыт[2] и сюрьективно отображает каждую неприводимую компоненту многообразия X на всё Y.

Доказательство. Отождествим $\Bbbk[Y]$ с подалгеброй в $\Bbbk[X]$ при помощи инъективного гомоморфизма φ^*. Открытость φ означает, что образ любого главного открытого множества $\mathcal{D}(f) \subset X$ содержит некоторую главную открытую окрестность каждой своей точки, т. е. для любой функции $f \in \Bbbk[X]$ и любой точки $p \in X$, в которой $f(p) \neq 0$, существует такая функция $a \in \Bbbk[Y]$, что $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$ на многообразии Y. Чтобы предъявить такую функцию a, рассмотрим отображение $\psi = \varphi \times f : X \to Y \times \mathbb{A}^1$, $p \mapsto \big(\varphi(p), f(p)\big)$. Его гомоморфизм поднятия

$$\psi^* : \Bbbk[Y \times \mathbb{A}^1] = \Bbbk[Y][t] \to \Bbbk[X]$$

является гомоморфизмом вычисления полиномов от t с коэффициентами из подалгебры $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk[X]$ на элементе $f \in \Bbbk[X]$. Будучи целой над подалгеброй $\Bbbk[Y]$, алгебра $\Bbbk[X]$ тем более цела над образом гомоморфизма ψ^*. По сл. 3.5 на стр. 52 минимальный многочлен μ_f элемента f над полем $\Bbbk(Y)$ лежит в $\Bbbk[Y]$. Поэтому ядром гомоморфизма ψ^* является главный идеал $(\mu_f) \subset \Bbbk[Y][t]$. Таким образом, морфизм ψ конечен и сюрьективно отображает многообразие X на гиперповерхность в $Y \times \mathbb{A}^1$, образованную нулями функции

$$\mu_f(y; t) = t^m + a_1(y)t^{m-1} + \dots + a_m(y). \tag{3-20}$$

Ограничение этой функции на аффинную прямую $y \times \mathbb{A}^1$ над точкой $y \in Y$ является полиномом от t, корни которого суть значения функции $f : X \to \Bbbk$ во всех точках многообразия X, которые переводятся в точку y отображением φ. В частности, образ $\varphi(\mathcal{D}(f))$ состоит из таких точек $y \in Y$, над которыми у многочлена $\mu(y; t)$ имеется ненулевой корень. Поскольку поле $\Bbbk$

[1] Включая одноточечное пространство $\mathbb{A}^0 = \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk$.

[2] Т. е. $\varphi(U)$ открыто в Y для любого открытого $U \subset X$

алгебраически замкнуто, наличие ненулевого корня равносильно тому, что хоть один из коэффициентов $a_i(y)$ не равен в точке y нулю. По нашему предположению, в точке $y = \varphi(p)$ такой коэффициент a_i имеется. Тогда $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a_i) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$, поскольку многочлен $\mu_f(q;t) \in \Bbbk[t]$ имеет ненулевой корень над всеми точками $q \in \mathcal{D}(a_i) \subset Y$.

Что касается ограничения φ на неприводимые компоненты $X_i \subset X$, то для каждого i множество $U_i = X \smallsetminus \bigcup\limits_{\nu \neq i} X_\nu = X_i \smallsetminus \bigcup\limits_{\nu \neq i}(X_i \cap X_\nu)$ открыто в X и плотно в X_i. Поскольку $\varphi(U_i)$ открыто, а Y неприводимо, $\varphi(U_i)$ плотно в Y, откуда $\varphi(X_i) = \overline{\varphi(U_i)} = Y$. $\square$

§4. Алгебраические многообразия

Всюду в этом параграфе мы продолжаем по умолчанию считать, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто.

4.1. Определения и примеры. Алгебраическое многообразие определяется по той же схеме, как и гладкие или аналитические многообразия в дифференциальной геометрии, т. е. как топологическое пространство, каждая точка которого обладает открытой окрестностью, гомеоморфной некой стандартной «локальной модели», и любые две таких модели, происходящие из разных окрестностей, регулярным образом согласованы на пересечении этих окрестностей. В качестве локальных моделей в алгебраической геометрии допускаются *произвольные*[1] аффинные алгебраические многообразия, а регулярная согласованность двух таких моделей на их пересечении означает, что переход от одной модели к другой задаётся рациональными функциями, регулярными на рассматриваемом пересечении. Точные определения таковы.

Алгебраической аффинной картой на топологическом пространстве X называется гомеоморфизм $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ какого либо аффинного алгебраического многообразия X_U с топологией Зарисского на открытое подмножество $U \subset X$ с индуцированной из X топологией. Две алгебраических аффинных карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ и $\varphi_W : X_W \xrightarrow{\sim} W$ на X называются *совместимыми*, если *гомеоморфизм склейки* между прообразами пересечения $U \cap W$ в X_U и X_W

$$\varphi_{WU} \overset{\text{def}}{=} \varphi_W^{-1} \circ \varphi_U\big|_{\varphi_U^{-1}(U\cap W)} : \varphi_U^{-1}(U \cap W) \xrightarrow{\sim} \varphi_W^{-1}(U \cap W)$$

регулярен в том смысле, что его гомоморфизм поднятия $\varphi_{WU}^* : f \mapsto f \circ \varphi_{WU}$ является изоморфизмом алгебры рациональных функций на X_U, регулярных на $\varphi_U^{-1}(U \cap W)$, с алгеброй рациональных функций на X_W, регулярных на $\varphi_W^{-1}(U \cap W)$, т. е.

$$\varphi_{WU}^* : \Bbbk\left[\varphi_W^{-1}(U \cap W)\right] \xrightarrow{\sim} \Bbbk\left[\varphi_U^{-1}(U \cap W)\right] .$$

Открытое покрытие $X = \bigcup U_\nu$ попарно совместимыми алгебраическими картами называется *алгебраическим атласом* на X. Два алгебраических атласа называются *эквивалентными*, если их объединение также представляет собой алгебраический атлас. Топологическое пространство X, с зафиксированным на нём классом эквивалентных алгебраических атласов называется *алгебраическим многообразием*. Алгебраические многообразия, обладающие конечным атласом, называются многообразиями *конечного типа*.

Пример 4.1 (проективные пространства)
Проективное пространство $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}\left(\Bbbk^{n+1}\right)$ с однородными координатами

$$x = (x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n)$$

обладает алгебраическим атласом из $(n+1)$ стандартных аффинных карт

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n) \,|\, x_i \neq 0\}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n .$$

Обозначим через $X_i \simeq \mathbb{A}^n$ аффинное пространство с координатами[2]

$$t_i = \left(t_{i,0}, \ \dots \ , t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \ \dots \ , t_{i,n}\right) .$$

[1] В том числе не гладкие — такие, как крест $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(\Bbbk[x,y]/(xy))$.

[2] первый индекс i является номером карты, а сами координаты $t_{i,\nu}$ в i-той карте нумеруются вторым индексом $\nu \neq i$, $0 \leqslant \nu \leqslant n$

Отображение $\varphi_i : t_i \mapsto \left(t_{i,0} : \dots : t_{i,i-1} : 1 : t_{i,i+1} : \dots : t_{i,n}\right)$ задаёт биекцию

$$\varphi_i : X_i \simeq U_i, \tag{4-1}$$

в которой прообразом пересечения $U_i \cap U_j$ является главное открытое множество $\mathcal{D}\left(t_{i,j}\right) \subset X_i$. Отображение склейки

$$\varphi_{ji} = \varphi_j^{-1}\varphi_i : X_i \supset \mathcal{D}\left(t_{i,j}\right) \simeq \mathcal{D}\left(t_{j,i}\right) \subset X_j$$

действует по формуле $t_i \mapsto t_{i,j}^{-1} \cdot t_j$ и устанавливает изоморфизм между аффинными алгебраическими многообразиями

$$\mathcal{D}\left(t_{i,j}\right) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk\left[t_{i,j}^{-1}, t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}\right],$$
$$\mathcal{D}\left(t_{j,i}\right) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk\left[t_{j,i}^{-1}, t_{j,0}, \dots, t_{j,j-1}, t_{j,j+1}, \dots, t_{j,n}\right].$$

Упражнение 4.1. Убедитесь в этом.

Поэтому перенос топологии Зарисского с $X_i \simeq \mathbb{A}^n$ на U_i при помощи биекции (4-1) определяет согласованные индуцированные топологии на пересечениях $U_i \cap U_j$ и корректно наделяет $\mathbb{P}_n$ топологией, в которой все отображения (4-1) являются гомеоморфизмами.

Пример 4.2 (грассманианы)

Точками грассманова многообразия $\mathrm{Gr}(k, m)$ являются k-мерные векторные подпространства в координатном векторном пространстве $\Bbbk^m$. Иначе их можно воспринимать как орбиты матриц x ранга k из k строк ширины m под действием полной линейной группы $\mathrm{GL}_k(\Bbbk)$ левыми умножениями. При этом орбите матрицы x отвечает линейная оболочка её строк, а подпространству — орбита матрицы, по строкам которой записаны координаты базисных векторов любого базиса этого подпространства в стандартном базисе пространства $\Bbbk^m$. Грассманиан $\mathrm{Gr}(k, m)$ покрывается $\binom{m}{k}$ стандартными аффинными картами U_I, занумерованными строго возрастающими наборами индексов $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant m$. Если обозначить через $s_I(x)$ подматрицу матрицы x, образованную столбцами с номерами из I, то

$$U_I = \{x \in \mathrm{Mat}_{k\times m}(\Bbbk) \mid \det s_I(x) \neq 0\}.$$

Упражнение 4.2. Убедитесь, что карта U_I состоит из всех k-мерных подпространств $W \subset \Bbbk^m$, которые изоморфно проектируются на k-мерную координатную плоскость, натянутую на стандартные базисные векторы e_i с $i \in I$ пространства $\Bbbk^m$, вдоль дополнительной $(m-k)$-мерной координатной плоскости, натянутой на остальные базисные векторы.

Обозначим через $X_I \simeq \mathrm{Mat}_{k\times(m-k)}(\Bbbk) \simeq \mathbb{A}^{k(m-k)}$ аффинное пространство всех матриц из k строк ширины $m-k$ и будем нумеровать столбцы этих матриц индексами ν из дополнительного к I набора $\hat{I} = \{1, 2, \dots, m\} \smallsetminus I$. Отображение

$$\varphi_I : X_I \simeq U_I, \tag{4-2}$$

превращающее $k\times(m-k)$-матрицу $t \in X_I$ в $k\times m$-матрицу $\varphi_I(t)$ дописыванием к ней единичной $k \times k$-матрицы в столбцы с номерами из I, биективно. Прообраз

$$\varphi_I^{-1}\left(U_I \cap U_J\right) = \mathcal{D}\Big(\det s_J\big(\varphi_I(t)\big)\Big) \subset X_I.$$

Упражнение 4.3. Убедитесь, что отображение склейки

$$\varphi_{JI} = \varphi_J^{-1}\varphi_I : X_I \supset \mathcal{D}\Big(\det s_J\big(\varphi_I(t)\big)\Big) \to \mathcal{D}\Big(\det s_I\big(\varphi_J(t)\big)\Big) \subset X_J$$

действует по формуле $t \mapsto s_{\hat{J}}\Big(s_J^{-1}\big(\varphi_I(t)\big)\cdot\varphi_I(t)\Big)$ и является изоморфизмом аффинных алгебраических многообразий.

Отсюда мы как и в предыдущем примере заключаем, что грассманиан $\mathrm{Gr}(k,n)$ является алгебраическим многообразием конечного типа. Отметим, что при $k = 1$, $m = n + 1$ проделанное только что построение превращается в построение из прим. 4.1.

Пример 4.3 (прямое произведение многообразий)
Структура алгебраического многообразия на прямом произведении алгебраических многообразий X и Y задаётся атласом, состоящим из всех попарных произведений $U \times W$ аффинных карт $U \subset X$ и $W \subset X$ на X, Y.

4.1.1. Структурный пучок и регулярные морфизмы. Функция $f : X \to \Bbbk$ называется *регулярной* в точке x алгебраического многообразия X, если существуют такие порывающая x аффинная карта $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U \ni x$ и определённая в x рациональная функция $\widetilde{f} \in \Bbbk(X_U)$, что значения $\varphi_U^* f(z) = \widetilde{f}(z)$ совпадают во всех точках $z \in \mathrm{Dom}\widetilde{f}$. Функции $U \to \Bbbk$ на открытом подмножестве $U \subset X$, регулярные в каждой точке этого подмножества, образуют коммутативное кольцо, которое обозначается $\mathcal{O}_X(U)$ и называется кольцом *локальных регулярных функций* на U. Сопоставление $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$ задаёт пучок $\Bbbk$-алгебр на топологическом пространстве X. Он называется *структурным пучком* алгебраического многообразия X.

Отображение алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ называется *регулярным*, если для любой точки $x \in X$ и локальной регулярной функции $f \in \mathcal{O}_Y(W)$, определённой в какой-либо окрестности $W \ni \varphi(x)$, существует такая окрестность $U \subset \varphi^{-1}(W)$ точки x, что $\varphi^*(f) \in \mathcal{O}_X(U)$. Иными словами, над каждым открытом $U \subset Y$ гомоморфизм поднятия должен переводить локальные регулярные функции на U в локальные регулярные функции на $\varphi^{-1}(U)$, т. е. быть гомоморфизмом $\varphi^* : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X\left(\varphi^{-1}(U)\right)$. Например, множество регулярных морфизмов $X \to \mathbb{A}^1$ совпадает с $\mathcal{O}_X(X)$.

Упражнение 4.4. Покажите, что для каждой аффинной карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ гомоморфизм подъёма $\varphi_U^* : \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\sim} \Bbbk[X_U]$ отождествляет кольцо локальных регулярных на U функций с координатной алгеброй аффинного многообразия X_U.

4.1.2. Замкнутые подмногообразия. Каждое замкнутое подмножество Z алгебраического многообразия X имеет естественную структуру алгебраического многообразия. А именно, для каждой аффинной карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ прообраз пересечения $\varphi_U^{-1}(Z \cap U)$ является замкнутым подмножеством в X_U, т. е. аффинным алгебраическим многообразием с координатным кольцом

$$\Bbbk[X_U]/\varphi_U^* I(Z \cap U) \simeq \mathcal{O}_X(U)/I(Z \cap U)\,,$$

где идеал $I(Z\cap U) \subset \mathcal{O}_X(U)$ состоит из всех локальных регулярных на U функций[1], тождественно зануляющихся на $Z \cap U$. Аффинные карты $\varphi_U^{-1}(Z \cap U) \xrightarrow{\sim} Z \cap U \subset Z$ образуют алгебраический атлас на Z. Сопоставление $U \mapsto I(Z \cap U)$ является подпучком идеалов в структурном пучке $\Bbbk$-алгебр $\mathcal{O}_X$. Он называется *пучком идеалов* замкнутого подмногообразия $Z \subset X$ и обозначается $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_X$. В этой ситуации пишут, что $Z = V(\mathcal{I}_Z)$.

[1] ср. с упр. 4.4

Регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *замкнутым вложением*, если его образ $\varphi(X) \subset \subset Y$ является замкнутым подмногообразием и φ устанавливает изоморфизм между X и $\varphi(X)$. В частности, алгебраическое многообразие X тогда и только тогда допускает замкнутое вложение в аффинное пространство, когда оно является аффинным алгебраическим многообразием в смысле n° 3.1.6 на стр. 52, т. е. является множеством нулей системы полиномиальных уравнений в аффинном пространстве.

Пример 4.4 (семейства подмногообразий)
Каждый регулярный морфизм $\pi : X \to Y$ может восприниматься как семейство замкнутых подмногообразий $X_y = \pi^{-1}(y) \subset X$, параметризованное точками $y \in Y$. Если $\pi : X \to Y$, $\pi' : X' \to Y$ — два семейства с одной и той же базой, то регулярный морфизм $\varphi : X \to X'$ называется *морфизмом семейств*[1], если он переводит X_y в X'_y для каждого $y \in Y$, т. е. если $\pi = \pi' \circ \varphi$. Семейство $\pi : X \to Y$ называется *постоянным* или *тривиальным*, если оно изоморфно над Y прямому произведению $\pi_Y : X_0 \times Y \to Y$ для некоторого многообразия X_0.

4.1.3. Отделимость. Стандартный атлас на $\mathbb{P}_1$ состоит из двух карт $\varphi_i : \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} U_i \subset \mathbb{P}_1$, где $i = 0, 1$. Их пересечение видно внутри каждой из них как дополнение к началу координат:

$$\varphi_0^{-1}(U_0 \cap U_1) = \varphi_1^{-1}(U_0 \cap U_1) = \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\} = \{t \in \mathbb{A}^1 \mid t \neq 0\}.$$

Карты склеены по этому пересечению посредством отображения склейки

$$\varphi_{01} : t \mapsto 1/t. \tag{4-3}$$

Если вместо этого отображения воспользоваться тождественным отображением

$$\tilde{\varphi}_{01} : t \mapsto t, \tag{4-4}$$

получится другое многообразие — «прямая с раздвоенной точкой»: ————:————. Такого рода патология называется *неотделимостью*. Причина её возникновения в том, что правило склейки (4-4) «не замкнуто»: его можно «продолжить по непрерывности» с $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}$ на всё $\mathbb{A}^1 = \overline{\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}}$. В общем случае явление (не) отделимости формализуется так. Включения

$$U_0 \hookleftarrow U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_1$$

задают вложение $U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_0 \times U_1$, образ которого является пересечением аффинной карты $U_0 \cap U_1 \subset X \times X$ с диагональю $\Delta = (x, x) \subset X \times X$. Правило (4-3) задаёт вложение $(\mathbb{A}^1 \smallsetminus O) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по формуле $t \mapsto (t, t^{-1})$ и отождествляет пересечение $U_0 \cap U_1 \simeq (U_0 \times U_1) \cap \Delta$ с *замкнутым* подмножеством в $U_0 \times U_1 \simeq \mathbb{A}^2$ — а именно, с гиперболой $xy = 1$. Правило (4-4) задаёт вложение $(\mathbb{A}^1 \smallsetminus O) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по формуле $t \mapsto (t, t)$. Образ этого вложения не замкнут в $U_0 \times U_1 \simeq \mathbb{A}^2$ — он получается выкидыванием начала координат из диагонали $x = y$.

Алгебраическое многообразие X называется *отделимым*, если для любой пары аффинных карт U, W на X образ канонического вложения $U \cap W \hookrightarrow U \times W$ замкнут, или, что то же самое, если диагональ $\Delta \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

Например, $\mathbb{A}^n$ и $\mathbb{P}_n$ отделимы, поскольку диагонали в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ и в $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$ задаются, соответственно, уравнениями $x_i = y_i$ и $x_i y_j = x_j y_i$. Замкнутое подмногообразие $X \subset Y$ отделимого многообразия Y тоже отделимо, ибо диагональ в $X \times X$ является прообразом диагонали в $Y \times Y$ при вложении $X \times X \hookrightarrow Y \times Y$. В частности, всякое аффинное или проективное многообразие отделимо и имеет конечный тип.

[1]Или *морфизмом над* Y.

Пример 4.5 (график морфизма)
Пусть $\varphi : X \to Y$ — регулярный морфизм. Прообраз диагонали $\Delta \subset Y \times Y$ при индуцированном морфизме $\varphi \times \mathrm{Id}_Y : X \times Y \to Y \times Y$ называется *графиком* φ и обозначается через Γ_φ. Геометрически, $\Gamma_\varphi = \{(x, f(x))\} \subset X \times Y$. Если Y отделимо, то график замкнут. Например, график регулярного морфизма аффинных многообразий $\varphi : \mathrm{Spec_m}(A) \to \mathrm{Spec_m}(B)$ задаётся в $A \otimes B$ системой уравнений $1 \otimes f = \varphi^*(f) \otimes 1$, где f пробегает B.

4.1.4. Рациональные отображения. Регулярный морфизм $\varphi : U \to Y$, определённый на некотором открытом плотном подмножестве U алгебраического многообразия X, называется *рациональным отображением* из X в Y. Рациональное отображение $\psi : W \to Y$, заданное на открытом множестве $W \supset U$ и совпадающее с φ на U, называется *продолжением* рационального отображения $\varphi : U \to Y$. Объединение всех открытых множеств $W \supset U$, на которые продолжается φ, называется *областью определения* рационального отображения $\varphi : X \dashrightarrow Y$.

Упражнение 4.5 (квадратичная инволюция Кремоны). Покажите, что правило

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^{-1} : x_1^{-1} : x_2^{-1})$$

задаёт рациональное отображение $\varkappa : \mathbb{P}_2 \dashrightarrow \mathbb{P}_2$, определённое всюду, кроме трёх точек, найдите эти точки и опишите образ $\varkappa$.

Рациональные отображения $\varphi : X \dashrightarrow Y$ не являются отображениями «из X» в теоретико-множественном смысле, ибо определены не везде. В частности, композиция рациональных отображений не определена, когда образ первого отображения оказывается целиком вне области определения второго. Тем не менее, рациональные отображения часто возникают и играют важную роль в алгебраической геометрии. Например, естественная проекция $\mathbb{A}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$, переводящая точку пространства $\mathbb{A}(V)$, представленную вектором $v \in V$, в точку пространства $\mathbb{P}(V)$, представленную тем же самым вектором v, является сюрьективным рациональным отображением определённым всюду, кроме нуля.

4.2. Проективные многообразия. Алгебраическое многообразие X называется *проективным*, если оно допускает замкнутое вложение в проективное пространство, т. е. изоморфно замкнутому подмногообразию в $\mathbb{P}_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Упражнение 4.6. Покажите, что множество решений системы однородных полиномиальных уравнений на однородные координаты пространства $\mathbb{P}_n$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_n$.

В частности, проективными алгебраическими многообразиями являются грассманианы $\mathrm{Gr}(k, V)$, задаваемые квадратичными соотношениями Плюккера в $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$.

Упражнение 4.7. Покажите, что прямое произведение проективных многообразий проективно, и выведите из этого, что подмножество в $\mathbb{P}_{n_1} \times \mathbb{P}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{P}_{n_m}$, задаваемое набором однородных по координатам каждого сомножителя полиномиальных уравнений на однородные координаты, является проективными алгебраическим многообразием.

Пример 4.6 (раздутие точки в $\mathbb{P}_n$)
Прямые, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_n$, образуют проективное пространство $E \simeq \mathbb{P}_{n-1}$. График инцидентности $\mathcal{B}_p = \{(q, \ell) \in \mathbb{P}_n \times E \mid q \in \ell\}$ называется *раздутием* точки $p \in \mathbb{P}_n$. Проекция $\sigma_p : \mathcal{B}_p \twoheadrightarrow \mathbb{P}_n$ биективна всюду над $\mathbb{P}_n \smallsetminus \{p\}$, но прообразом самой точки

p является весь слой $\sigma_p^{-1}(p) = \{p\} \times E \subset \mathbb{P}_n \times E$. Он называется *исключительным дивизором*[1]. Вторая проекция $\varrho_E : \mathcal{B}_p \twoheadrightarrow E$ реализует $\mathcal{B}_p$ как *линейное расслоение* над E, слой которого над точкой $q \in E$ — это прямая $(pq) \subset \mathbb{P}_n$. Это расслоение называется *тавтологическим* линейным расслоением над E. Из упр. 4.7 вытекает, что $\mathcal{B}_p$ является проективным многообразием: выберем однородные координаты на $\mathbb{P}_n$ так, чтобы

$$p = (1 : 0 : \dots : 0),$$

и отождествим E с гиперплоскостью $V\left(x_0\right) = \{(0 : \lambda_1 : \dots : \lambda_n)\} \subset \mathbb{P}_n$, сопоставляя прямой $\ell \ni p$ точку $\lambda = \ell \cap V(x_0)$; тогда коллинеарность точек p, q, λ запишется системой однородных квадратичных уравнений

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ q_0 & q_1 & \cdots & q_n \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = 2\,, \quad \text{или} \quad q_i t_j = q_j t_i \quad \forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

на $(q, \lambda) \in \mathbb{P}_n \times E$. Иначе раздутие точки p можно представлять себе как результат вклеивания проективного пространства E в проделанное на $\mathbb{P}_n$ вместо p точечное отверстие таким образом, что приход в точку p вдоль прямой $\ell \subset \mathbb{P}_n$ приводит в точку $\ell \in E$.

Лемма 4.1

Каждое замкнутое подмногообразие $X \subset \mathbb{P}_n$ является множеством решений конечной системы полиномиальных уравнений на однородные координаты пространства $\mathbb{P}_n$.

Доказательство. В обозначениях из прим. 4.1 на стр. 71 пересечение $X \cap U_i$ со стандартной открытой картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ является множеством нулей некоторого идеала I_i в кольце многочленов от n переменных $t_{i,\nu} = x_\nu / x_i$, где $0 \leqslant \nu \leqslant n$ и $\nu \neq i$. Каждый такой многочлен f можно переписать как $\overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)/x_i^d$, где $d = \deg f$, а $\overline{f} \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ — такой однородный многочлен степени d, что $\overline{f}\left(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}\right) = f\left(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}\right)$. Для каждого i рассмотрим какое-нибудь конечное множество образующих $f_{i,\alpha}$ идеала I_i и построим по ним однородные многочлены $\overline{f}_{i,\alpha} \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Покажем, что многообразие X совпадает с множеством Z решений системы однородных полиномиальных уравнений

$$x_i \cdot \overline{f}_{i,\alpha}(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0\,, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant i \leqslant n\,,$$

и при каждом i второй индекс α нумерует образующие $f_{i,\alpha}$ идеала I_i. Достаточно для каждого i установить равенство $Z \cap U_i = X \cap U_i$. Поскольку пересечение множества нулей однородного многочлена $x_i \cdot \overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ со картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ задаётся в аффинных координатах t_i на U_i уравнением $\overline{f}\left(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}\right) = f\left(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}\right) = 0$, пересечение карты U_i с множеством общих нулей однородных многочленов $x_i \cdot \overline{f}_{i,\alpha}$, индекс i которых равен номеру карты, совпадает с $X \cap U_i$. Тем самым, $Z \cap U_i \subset X \cap U_i$, и для доказательства равенства остаётся убедиться, что каждый однородный многочлен $x_j \cdot \overline{f}_{j,\beta}$ с $j \neq i$ также зануляется на $X \cap U_i$. Но множитель x_j зануляется на гиперплоскости $V(t_{i,j}) \subset U_i$, а множитель $\overline{f}_{j,\beta}$ зануляется на дополнительном к этой гиперплоскости главном открытом множестве $\mathcal{D}(t_{i,j}) = X \cap U_i \cap U_j \subset X \cap U_i$, т. к. последнее содержится в пересечении $X \cap U_j$, на котором $\overline{f}_{j,\beta}$ равен нулю. □

[1] Вообще, *дивизорами* (*Вейля*) на алгебраическом многообразии называются элементы свободной абелевой группы, порождённой неприводимыми замкнутыми подмногообразиями коразмерности 1 (размерности алгебраических многообразий обсуждаются в n° 4.3 ниже).

Пример 4.7 (иллюстрация доказательства лем. 4.1)
Проективное многообразие $X = V(x_0x_1x_2) \subset \mathbb{P}_2$ представляет собою объединение трёх координатных прямых и локально, в стандартных картах U_0, U_1, U_2, задаётся, соответственно, уравнениями $t_{0,1}t_{0,2} = 0$, $t_{1,0}t_{1,2} = 0$, $t_{2,0}t_{2,1} = 0$, которым в предыдущем доказательстве отвечают однородные многочлены $\overline{f}_{0,1} = x_1x_2$, $\overline{f}_{1,1} = x_0x_2$, $\overline{f}_{2,1} = x_0x_1$, а задающее X глобальное однородное уравнение $x_0x_1x_2 = 0$ имеет в левой части многочлен

$$x_0x_1x_2 = x_0 \cdot \overline{f}_{0,1} = x_1 \cdot \overline{f}_{1,1} = x_2 \cdot \overline{f}_{2,1}\,.$$

4.2.1. Замкнутость проективных морфизмов. Проективные многообразия занимают в алгебраической геометрии примерно такое же место, как компактные многообразия в дифференциальной геометрии.

Лемма 4.2
Проекция $\pi : \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ *замкнута*, т. е. переводит замкнутые множества в замкнутые.

Доказательство. Зафиксируем однородные координаты x на $\mathbb{P}_m$ и аффинные координаты t на $\mathbb{A}^n$. Замкнутое подмножество $X \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$ задаётся системой однородных по x полиномиальных уравнений $f_\nu(x,t) = 0$. Его образ $\pi(X) \subset \mathbb{A}^n$ состоит из всех точек p, при подстановке которых в эти уравнения вместо t получается обладающая ненулевым решением система однородных уравнений $f_\nu(x,p) = 0$ на x. Это означает, что полиномиально зависящие от p коэффициенты форм $f_\nu(x,p)$ удовлетворяют системе полиномиальных результантных уравнений[1]. Таким образом, $\pi(X)$ задаётся полиномиальными уравнениями. □

Следствие 4.1
Если многообразие X проективно, то для любого многообразия Y проекция $\pi : X \times Y \twoheadrightarrow Y$ замкнута.

Доказательство. Утверждение можно доказывать отдельно для каждой аффинной карты многообразия Y, т. е. мы можем считать Y аффинным. Тогда $X \times Y$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$, и проекция π получается ограничением замкнутой проекции $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ на замкнутое подмножество $X \times Y \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$. □

Следствие 4.2
Если X проективно, а Y отделимо, то любой морфизм $\varphi : X \to Y$ замкнут.

Доказательство. Если Y отделимо, график $\Gamma_\varphi \overset{\text{def}}{=} \{(x, \varphi(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ отображения φ замкнут в $X \times Y$, поскольку является прообразом диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ при отображении $\varphi \times \mathrm{Id}_Y : X \times Y \to Y \times Y$. Образ $\varphi(Z) \subset Y$ любого подмножества $Z \subset X$ совпадает с образом пересечения $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y) \subset X \times Y$ при проекции $X \times Y \twoheadrightarrow Y$. Если Z замкнуто в X, произведение $Z \times Y$ замкнуто в $X \times Y$. Если X проективно, проекция $X \times Y \twoheadrightarrow Y$ замкнута и переводит замкнутое множество $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y) \subset X \times Y$ в замкнутое множество $\varphi(Z) \subset Y$. □

Следствие 4.3
Любое регулярное отображение из связного проективного многообразия X в аффинное многообразие стягивает X в одну точку. В частности, $\mathcal{O}_X(X) = \Bbbk$.

[1] См. n° 3.1.7 на стр. 54.

Доказательство. Беря композицию такого отображения с координатными функциями на аффинном многообразии, мы заключаем, что достаточно доказать утверждение для любого регулярного морфизма $\varphi : X \to \mathbb{A}^1$. Композиция φ с последующим вложением $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_1$ в качестве стандартной аффинной карты является регулярном и не сюрьективным отображением $X \to \mathbb{P}_1$. Так как его образ замкнут и связен, он состоит из одной точки. □

4.2.2. Конечные проекции. Регулярное отображение алгебраических многообразий

$$\varphi : X \to Y$$

называется *конечным*, если прообраз $W = \varphi^{-1}(U)$ любой аффинной карты $U \subset Y$ является аффинной картой на X, и ограничение $\varphi_W : W \to U$ является конечным морфизмом аффинных многообразий в смысле n° 3.5.3 на стр. 68. Из предл. 3.8 на стр. 68 следует, что каждый конечный морфизм замкнут, и его ограничение на любое замкнутое подмногообразие $Z \subset X$ также является конечным морфизмом. Более того, если X неприводимо, то собственные замкнутые подмножества многообразия X переводятся конечным морфизмом в *собственные* замкнутые подмножества в Y.

Упражнение 4.8. Проверьте, что композиция конечных морфизмов конечна.

Предложение 4.1
Проекция любого проективного многообразия $X \subsetneq \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \notin X$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ является конечным морфизмом.

Доказательство. Рассмотрим аффинную карту $U \subset H$ и выберем на $\mathbb{P}_n$ однородные координаты $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ так, что $p = (1 : 0 : \ldots : 0)$, гиперплоскость $H = V(x_0)$ состоит из точек $q = (0 : q_1 : \ldots : q_n)$, а карта $U \subset H$ — из точек $u = (0 : u_1 : \ldots : u_{n-1} : 1)$. Пусть X задаётся в этих координатах системой однородных уравнений $f_\nu(x) = 0$. Поскольку $p \notin X$, прообраз $Y = \pi_p^{-1}(U) \subset X$ высекается из X проколотым конусом C над U, который образован всеми прямыми $(pu) \subset \mathbb{P}_n$ с выколотой точкой[1] p. Конус C является является аффинным алгебраическим многообразием, изоморфным аффинному пространству $\mathbb{A}^n = U \times \mathbb{A}^1$. Изоморфизм переводит точку $(u, t) \in U \times \mathbb{A}_1$ в точку $x = tp + u \in \mathbb{P}_n$. Пересечение $Y = C \cap X$ задаётся в координатах (u, t) уравнениями

$$f_\nu(tp + u) = \alpha_0^{(\nu)}(u)\,t^m + \alpha_1^{(\nu)}(u)\,t^{m-1} + \cdots + \alpha_m^{(\nu)}(u) = 0\,, \tag{4-5}$$

и, тем самым, является аффинным алгебраическим многообразием. Покажем, что его координатная алгебра $\Bbbk[Y] = \Bbbk[u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}]/I$, где идеал I порождается многочленами $f_\nu(tp+u)$ из уравнений (4-5), цела над $\Bbbk[U] = \Bbbk[u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}]$. Для этого достаточно найти в идеале I приведённый многочлен от t с коэффициентами из $\Bbbk[U]$ — тогда класс $t \pmod I$, являющийся его корнем, будет цел над $\Bbbk[U]$. Наличие в идеале I такого многочлена равносильно тому, что идеал, порождённый в $\Bbbk[U]$ старшими коэффициентами $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ всех уравнений (4-5), содержит единицу, что по теореме Гильберта означает отсутствие у многочленов $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ общих нулей в U. Но если такой общий нуль u_0 имеется, то однородные версии уравнений (4-5)

$$f_\nu(\vartheta_0\, p + \vartheta_1\, u_0) = \alpha_0^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^m + \alpha_1^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^{m-1}\vartheta_1 + \cdots + \alpha_m^{(\nu)}(u_0)\vartheta_1^m = 0\,,$$

[1] Т. е. аффинными прямыми $u + pt$, $t \in \Bbbk$.

получающиеся ограничением задающих X уравнений на проективную прямую (p, u_0), имеют на этой прямой общий корень $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (1 : 0)$, находящийся в самой точке p, что противоречит условию $p \notin X$. □

Следствие 4.4
Каждое проективное многообразие допускает конечный сюрьективный морфизм на проективное пространство. □

Следствие 4.5
Каждое аффинное многообразие X допускает конечный сюрьективный морфизм на аффинное пространство.

Доказательство. Пусть $X \subsetneq \mathbb{A}^n$, где $\mathbb{A}^n$ вложено в $\mathbb{P}_n$ как стандартная карта U_0. Положим $H_\infty \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}_n \smallsetminus U_0$ и обозначим через $\overline{X} \subset \mathbb{P}_n$ проективное замыкание аффинного многообразия X. Проекция $\overline{X}$ из любой точки $p \in H_\infty \smallsetminus \overline{X}$ на любую гиперплоскость $L \not\ni p$ выглядит в аффинной карте U_0 как параллельная проекция многообразия $X = \overline{X} \smallsetminus H_\infty$ на гиперплоскость $U_0 \cap L = L \smallsetminus H_\infty$ в направлении вектора p и по предл. 4.1 является конечным морфизмом аффинных многообразий. Если он не сюрьективен, повторяем процедуру. □

Упражнение 4.9. Убедитесь, что если $X \neq \mathbb{A}^n$, то $\overline{X} \cap H_\infty \neq H_\infty$.

Пример 4.8 (нормализация Нётер)
Рассмотрим аффинную гиперповерхность $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$, заданную многочленом

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_d \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n],$$

где каждое слагаемое f_k однородно степени k. Замыкание $\overline{X}$ в проективном пространстве $\mathbb{P}_n$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, куда $\mathbb{A}^n$ вложено в качестве стандартной карты U_0, задаётся однородным многочленом

$$\overline{f} = f_0 x_0^d + f_1 x_0^{d-1} + \dots + f_{d-1} x_0 + f_d\,.$$

Бесконечно удалённая точка $p = (0 : p_1 : p_2 : \dots : p_n)$ не лежит на $\overline{X}$, если и только если $f_d(p_1, p_2, \dots, p_n) \neq 0$. Над *любым* бесконечным полем $\Bbbk$ такая точка существует. Изменяя при необходимости нумерацию координат, мы можем считать, что $p = (0, p_1, \dots, p_{n-1}, -1)$. Проекция из такой точки на гиперплоскость $x_n = 0$ выглядит в $\mathbb{A}^n$ как параллельная проекция $\pi_p : X \to \mathbb{A}^{n-1}$ вдоль вектора $p = (p_1, \dots, p_{n-1}, 1)$ и действует по формуле

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(x_1 - p_1 x_n,\, x_2 - p_2 x_n,\, \dots\,,\, x_{n-1} - p_{n-1} x_n,\, 0\right)\,.$$

Её гомоморфизм подъёма $\pi_p^* : \Bbbk[t_1, t_2, \dots, t_{n-1}] \to \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/(f)$ переводит t_i в $x_i - p_i x_n$. Подставляя $x_i = t_i + p_i x_n$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ в уравнение $f = 0$ получаем полиномиальное уравнение на x_n с коэффициентами в $\Bbbk[t_1, t_2, \dots, t_{n-1}]$ и ненулевым старшим коэффициентом $f_d(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \Bbbk$. Таким образом x_n, а с ним и все остальные $x_i = t_i + p_i x_n$, целы над $\Bbbk[\mathbb{A}^{n-1}]$. Таким образом, параллельная проекция гиперповерхности $V(f)$ в любом неасимптотическом направлении на трансверсальную этому направлению гиперплоскость конечна (над любым бесконечным полем) и сюрьективна (над алгебраически замкнутым полем). Этот факт известен как *лемма Нётер о нормализации*. Из него, в частности, вытекает, что $\operatorname{tr}\deg_{\Bbbk} \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/(f) = n - 1$.

4.3. Размерность. Максимальное число $n \in \mathbb{N}$, для которого существует цепочка таких неприводимых замкнутых подмногообразий $X_1, X_2, \dots, X_n \subset X$, что

$$X_0 = \{x\} \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n \subset X, \tag{4-6}$$

называется *размерностью* алгебраического многообразия X в точке $x \in X$ и обозначается $\dim_x X$. Если многообразие X само неприводимо, то с неизбежностью $X_n = X$ в любой максимальной цепочке (4-6). Если многообразие X приводимо, размерность $\dim_x X$ равна максимальной из размерностей всех проходящих через точку x неприводимых компонент многообразия X.

Упражнение 4.10. Покажите, что $\dim_x X = \dim_x U$ для любой аффинной окрестности U точки x.

Предложение 4.2
Для любого конечного морфизма неприводимых алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ в каждой точке $x \in X$ выполняется неравенство $\dim_x X \leqslant \dim_{\varphi(x)} Y$, равенство в котором равносильно сюрьективности морфизма φ.

Доказательство. В силу упр. 4.10 можно считать X и Y аффинными. Каждая цепочка (4-6) в X по предл. 3.8 на стр. 68 порождает цепочку строго вложенных друг в друга замкнутых неприводимых подмногообразий $\varphi(X_i)$ в Y. Отсюда вытекает требуемое неравенство, и при $\varphi(X) \neq Y$ оно строгое. Если $\varphi(X) = Y$, то для любой цепочки $Y_0 = \{\varphi(x)\} \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_m = Y$ при каждом i многообразие $\varphi^{-1}(Y_i) \subset X$ имеет неприводимую компоненту X_i сюрьективно отображающуюся на[1] Y_i, и из них составляется цепочка вида (4-6) в X. Это даёт противоположное неравенство $\dim_x X \geqslant \dim_{\varphi(x)} Y$. □

Следствие 4.6
Размерность аффинного пространства $\dim_x \mathbb{A}^n = n$ в любой точке $x \in \mathbb{A}^n$.

Доказательство. Неравенство $\dim_x \mathbb{A}^n \geqslant n$ выполняется, поскольку в $\mathbb{A}^n$ имеется цепочка (4-6), образованная проходящими через x аффинными подпространствами. Противоположное неравенство доказывается по индукции. Очевидно, что $\dim \mathbb{A}^0 = 0$. Пусть $\dim \mathbb{A}^k = k$ для всех $k < n$. Поскольку последний отличный от $\mathbb{A}_n$ элемент X_{m-1} любой цепочки $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{m-1} \subsetneq X_m = \mathbb{A}^n$ допускает конечную сюрьекцию на аффинное подпространство $\mathbb{A}^k \subset \mathbb{A}^n$ с $k < n$, из предл. 4.2 вытекает неравенство $\dim X_{m-1} < n$, из которого вытекает, что $m \leqslant n$. □

Следствие 4.7
Пусть X — неприводимое аффинное многообразие, и $\varphi : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ — конечный сюрьективный морфизм. Тогда $\dim_x X = m$ в каждой точке $x \in X$, и число m не зависит от выбора φ. □

Следствие 4.8
Размерность аффинного неприводимого многообразия X равна степени трансцендентности[2] алгебры $\Bbbk[X]$ над $\Bbbk$.

[1] Иначе Y_i окажется объединением конечного числа собственных замкнутых подмножеств — образов неприводимых компонент прообраза $\varphi^{-1}(Y_i) \subset X$.

[2] См. опр. 3.2 на стр. 51.

Доказательство. Гомоморфизм подъёма конечной сюрьекции $\pi : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ задаёт целое расширение $\pi^* : \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m] \hookrightarrow \Bbbk[X]$. Следовательно алгебраически независимые функции $\pi^* u_i$ образуют базис трансцендентности алгебры $\Bbbk[X]$ над $\Bbbk$. □

Упражнение 4.11. Докажите, что $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ для любых неприводимых многообразий X, Y.

4.3.1. Размерности подмногообразий. Если функция $f \in \Bbbk[X]$ тождественно обращается в ноль на одной из проходящих через точку $x \in X$ неприводимых компонент размерности $\dim_x X$ многообразия X, гиперповерхность $V(f) \subset X$ имеет в точке x ту же размерность, что и объемлющее многообразие X. Но такое бывает, только если f делит нуль в $\Bbbk[X]$.

Предложение 4.3
Для любой ненулевой регулярной функции $f \in \Bbbk[X]$ на неприводимом аффинном многообразии X в каждой точке $p \in V(f)$ выполняется неравенство $\dim_p V(f) = \dim_p(X) - 1$.

Доказательство. Случай $X = \mathbb{A}^n$ уже был разобран в прим. 4.8. Общий случай сводится к нему при помощи рассуждения, аналогичного тому, что использовалось в доказательстве предл. 3.9 на стр. 69. Зафиксируем конечную сюрьекцию $\pi : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ и рассмотрим отображение

$$\varphi = \pi \times f : X \to \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1, \quad x \mapsto \big(\pi(x), f(x)\big).$$

В предл. 3.9 мы видели, что оно конечно и сюрьективно отображает X на аффинную гиперповерхность $V(\mu_f) \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$ — множество нулей минимального многочлена

$$\mu_f(u,t) = t^n + \alpha_1(u)t^{n-1} + \dots + \alpha_n(u) \in \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m][t]$$

функции f над полем $\Bbbk(\mathbb{A}^m)$. Гиперповерхность $V(f) \subset X$ отображается морфизмом φ в пересечение гиперповерхности $V(\mu_f)$ с аффинной гиперплоскостью $t = 0$, внутри которой это пересечение задаётся уравнением $\alpha_n(u) = 0$, т. е. является аффинной гиперповерхностью $V(\alpha_n) \subset \mathbb{A}^m$ размерности $m - 1$. По предл. 4.2 $\dim V(f) = \dim V(\alpha_n) = m - 1 = \dim X - 1$. □

Следствие 4.9
Для любых функций $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$ на аффинном многообразии X в каждой точке $p \in V(f_1, f_2, \dots, f_m)$ выполнятся неравенство

$$\dim_p V(f_1, f_2, \dots, f_m) \geqslant \dim_p(X) - m.$$

Если при каждом i класс функции f_i не делит нуль в фактор кольце[1] $\Bbbk[X]/(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$. □

Предостережение 4.1. Ни предл. 4.3, ни сл. 4.9 не утверждают, что гиперповерхность $V(f)$ или подмногообразие $V(f_1, f_2, \dots, f_m)$ непусты. Оба утверждения формально верны и для пустых гиперповерхности и/или подмногообразия. По слабой теореме Гильберта о нулях $V(f_1, f_2, \dots, f_m) = \varnothing$, если и только если при некотором i класс f_i в $\Bbbk[X]/(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$ равен ненулевой константе. И такое вполне случается, например, $V(1) = \varnothing$ на любом многообразии X, и $V(x, x+1) = \varnothing$ на плоскости $\mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[x, y]$. Это предупреждение относится и к следующему предложению.

[1] При $i = 1$ это условие означает, что f_1 не делит нуль в $\Bbbk[X]$. Последовательности функций $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$, обладающие указанным в следствии свойством, называются *регулярными*.

Предложение 4.4
Для любых аффинных многообразий $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}^n$ в каждой точке $x \in X_1 \cap X_2$ выполняется неравенство $\dim_x(X_1 \cap X_2) \geqslant \dim_x(X_1) + \dim_x(X_2) - n$.

Доказательство. Пусть $\varphi_1 : X_1 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ и $\varphi_2 : X_2 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ — замкнутые вложения. Тогда $X_1 \cap X_2$ является прообразом диагонали $\Delta \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ при отображении $\varphi_1 \times \varphi_2 : X_1 \times X_2 \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Внутри $X_1 \times X_2$ он задаётся n уравнениями $(\varphi_1 \times \varphi_2)^*(x_i) = (\varphi_1 \times \varphi_2)^*(y_i)$, которые являются поднятиями линейных уравнений $x_i = y_i$, задающих диагональ Δ в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Остаётся применить сл. 4.9. □

Предложение 4.5
Если размерности неприводимых проективных многообразий $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ удовлетворяют неравенству $\dim(X_1) + \dim(X_2) \geqslant n$, то $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.

Доказательство. Для неприводимого проективного многообразия $Z \subset \mathbb{P}(V)$ обозначим через $Z' \subset \mathbb{A}(V)$ аффинный конус над Z, задаваемый теми же самыми однородными уравнениями, что и Z, но только теперь в аффинном пространстве. Он содержит начало координат $O \in \mathbb{A}^{n+1}$ и имеет размерность $\dim_O Z' \geqslant \dim Z + 1$, так как любая цепочка $\{z\} \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_m = Z$ в проективном многообразии порождает в аффинном конусе цепочку $\{O\} \subsetneq (O, z) \subsetneq Z_1' \subsetneq \dots \subsetneq Z_m' = Z'$, первыми элементами которой служат начало координат O и прямая (O, z). По предл. 4.4 для аффинных конусов $X_1', X_2' \subset \mathbb{A}^{n+1}$ выполняются неравенства

$$\dim_O(X_1' \cap X_2') \geqslant \dim_O(X_1') + \dim_O(X_2') - n - 1 \geqslant \dim(X_1) + \dim_O(X_2) - n + 1 \geqslant 1\,.$$

Поэтому $X_1' \cap X_2''$ не исчерпывается одной только точкой O. □

4.3.2. Размерности слоёв регулярных морфизмов. В алгебраической геометрии размерность прообраза при регулярном отображении контролируется почти столь же жёстко, как в линейной алгебре.

Теорема 4.1
Для любого доминантного морфизма $\varphi : X \to Y$ неприводимых алгебраических многообразий в каждой точке $x \in X$ выполняется неравенство $\dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant \dim X - \dim Y$, причём существует такое плотное открытое подмножество $U \subset Y$, что для всех $y \in U$ и $x \in \varphi^{-1}(y)$ имеет место равенство $\dim_x \varphi^{-1}(y) = \dim_x X - \dim_y Y$.

Доказательство. Беря композицию φ с конечным сюрьективным морфизмом какой-нибудь аффинной окрестности точки $\varphi(x)$ на аффинное пространство $\mathbb{A}^m$ и заменяя X прообразом этой окрестности, мы сводим первое утверждение теоремы к случаю

$$Y = \mathbb{A}^m = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m], \quad \varphi(x) = 0\,.$$

Заменяя X аффинной окрестностью точки x, мы можем считать X аффинным. В этом случае $\varphi^{-1}(0)$ является непустым пересечением m гиперповерхностей $V(\varphi^*(u_i)) \subset X$, и требуемое неравенство вытекает из сл. 4.9. В доказательстве второго утверждения мы также можем считать оба многообразия аффинными. Более того, по форм. (упр. 3.29) на стр. 68 можно считать X замкнутым подмногообразием в $Y \times \mathbb{A}^m$, а морфизм $\varphi : X \to Y$ ограничением проекции $\pi : Y \times \mathbb{A}^m \twoheadrightarrow Y$. Мы собираемся применить к слоям этой проекции сл. 4.5. Для этого рассмотрим проективное замыкание $\overline{X} \subset Y \times \mathbb{P}_m$ и выберем в одном из слоёв проекции $\overline{\pi} : Y \times \mathbb{P}_m \twoheadrightarrow Y$

не лежащую на $\overline{X}$ точку $p \in \mathbb{P}_m \smallsetminus \mathbb{A}^m$ и любую гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}_m$, не проходящую через p. Проекция из p на H является конечным морфизмом во всех слоях, где точка p не лежит в $\overline{X}$. Пересечение $(Y \times \{p\}) \cap \overline{X}$ является собственным замкнутым подмножеством в $\overline{X}$, а его образ при проекции $\overline{\pi}$ — собственным замкнутым подмножеством в Y. Над каждой точкой y из дополнительного к $\overline{\pi}\big((Y \times \{p\}) \cap \overline{X}\big)$ плотного открытого подмножества $U \subset Y$ проекция из p на H конечна. Заменяя Y на любое содержащееся в U главное открытое подмножество (также являющееся аффинным алгебраическим многообразием), мы можем, как в сл. 4.5, конечно спроектировать $X \subset Y \times \mathbb{A}^m$ на аффинную гиперплоскость $Y \times \mathbb{A}^{m-1} \subset Y \times \mathbb{A}^m$. Повторяя эту конструкцию, мы получим конечную сюрьекцию $\psi : X \twoheadrightarrow Y \times \mathbb{A}^n$, ограничение которого на каждый слой $\varphi^{-1}(y)$ является конечным сюрьективным морфизмом $\varphi^{-1}(y) \twoheadrightarrow \{y\} \times \mathbb{A}^n$. Конечность ψ влечёт равенство $n = \dim X - \dim Y$, а конечность его ограничений на слои — равенство $\dim_x \varphi^{-1}(y) = n$. □

Следствие 4.10 (теорема о полунепрерывности размерностей слоёв)
Для любого морфизма алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ и каждого $k \in \mathbb{Z}$ множество

$$X_k \overset{\text{def}}{=} \{\, x \in X \mid \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant k \,\}$$

замкнуто в X.

Доказательство. Если $\dim Y = 0$, то теорема тривиально верна для всех X и k. Пусть теперь $\dim Y = m$ и для всех Y меньшей размерности теорема верна для всех X и k. Покажем, что она верна для Y. Можно считать X и Y неприводимыми. Если $k \leqslant \dim(X) - \dim(Y)$, то $X_k = X$ по теор. 4.1. Для $k > \dim(X) - \dim(Y)$ заменим Y на $Y' = Y \smallsetminus U$, где U взято из теор. 4.1, а X — на $X' = \varphi^{-1}(Y')$. Тогда $\dim Y' < \dim Y$, и множество $X_k \subset X'$ замкнуто по индуктивному предположению. □

Следствие 4.11
Для любого замкнутого морфизма алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ и каждого $k \in \mathbb{Z}$ множество $Y_k \overset{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geqslant k\}$ замкнуто в Y.

Теорема 4.2 (размерностный критерий неприводимости)
Если замкнутый регулярный морфизм $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ сюрьективен, а все его слои неприводимы и имеют одинаковые размерности, то неприводимость Y влечёт неприводимость X.

Доказательство. Пусть $X = X_1 \cup X_2$, где X_1, X_2 замкнуты. Положим $Y_i \overset{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_i\}$, где $i = 1, 2$. Так как каждый слой φ, будучи неприводимым, целиком содержится либо в X_1, либо в X_2, мы заключаем, что $Y = Y_1 \cup Y_2$, и если $X_i \neq X$, то и $Y_i \neq Y$. Поскольку множество Y_i состоит из всех таких точек в Y, над которыми слой отображения $\varphi|_{X_i} : X_i \to Y$ имеет максимальную из достигаемых слоями этого отображения размерностей, множество Y_i замкнуто по сл. 4.11. Тем самым, приводимость X влечёт приводимость Y. □

4.4. Размерности проективных многообразий. Согласно предл. 4.5, каждое d-мерное неприводимое многообразие $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ пересекается со всеми проективными подпространствами $H \subset \mathbb{P}_n$ размерности $\dim H \geqslant n - d$. Покажем, что общее подпространство H коразмерности $d + 1$ не пересекается с X, и тем самым, размерность неприводимого проективного многообразия равна наибольшему такому числу d, что X пересекается со всеми проективными подпространствами коразмерности d.

Проективные подпространства $H \subset \mathbb{P}(V)$ размерности $n-d-1$ являются точками грассманиана $\mathrm{Gr}(n-d, n+1) = \mathrm{Gr}(n-d, V)$. Рассмотрим многообразие инцидентности

$$\Gamma \overset{\text{def}}{=} \{(x, H) \in X \times \mathrm{Gr}(n-d, V) \mid x \in H\}\,. \tag{4-7}$$

Упражнение 4.12. Убедитесь, что Γ является проективным алгебраическим многообразием.

Проекция $\pi_1 : \Gamma \twoheadrightarrow X$ сюрьективна, и её слой над каждой точкой x состоит из всех проходящих через x проективных подпространств размерности $n-d-1$. Такие подпространства образуют грассманиан $\mathrm{Gr}(n-d-1, n) = \mathrm{Gr}(n-d-1, V/\Bbbk\cdot x)$ всех векторных $(n-d-1)$-мерных подпространств в фактор пространстве $V/\Bbbk\cdot x$. По теор. 4.2 многообразие Γ неприводимо и имеет размерность $d+(n-d-1)(d+1) = (n-d)(d+1)-1$. Образ $\pi_2(\Gamma) \subset \mathrm{Gr}(n-d, V)$ второй проекции $\pi_2 : \Gamma \to \mathrm{Gr}(n-d, V)$ состоит из всех $(n-d-1)$-мерных подпространств, пересекающих X. Это неприводимое замкнутое подмногообразие размерности, не превышающей $\dim\Gamma$ и, тем самым, строго меньшей, чем $\dim\mathrm{Gr}(n-d, V) = (n-d)(d+1)$. Поэтому множество не пересекающих X $(n-d-1)$-мерных подпространств содержит в себе открытое по Зарисскому всюду плотное подмножество грассманиана $\dim\mathrm{Gr}(n-d, V)$.

Соображения размерности позволяют сказать и больше. Повторяя предыдущее рассуждение для $(n-d)$-мерных подпространств H' вместо $(n-d-1)$-мерных, мы получим неприводимое проективное многообразие

$$\Gamma' \overset{\text{def}}{=} \{(x, H') \in X \times \mathrm{Gr}(n-d+1, V) \mid x \in H\}$$

размерности $\dim X + \dim\mathrm{Gr}(n-d, n) = d + d(n-d) = d(n-d+1)$. Так как $X \cap H' \neq \varnothing$ для всех H', проекция $\pi_2 : \Gamma' \twoheadrightarrow \mathrm{Gr}(n-d+1, V)$ эпиморфна, и её *общий слой*[1] имеет по теор. 4.1 размерность $\dim\Gamma - \dim\mathrm{Gr}(n-d+1, n+1) = d(n-d+1) - (n-d+1)d = 0$. Это означает, что *общее подпространство H' коразмерности d пересекает X по конечному числу точек*.

Беря одну из таких плоскостей H' и проводя внутри неё $(n-d-1)$-мерную плоскость H через одну из точек пересечения $p \in X \cap H'$, мы видим, что $H \cap X$ конечно и непусто. Это означает, что у проекции $\pi_2 : \Gamma \to \mathrm{Gr}(n-d, V)$ первого многообразия инцидентности (4-7) имеется нульмерный слой. Тем самым, минимальная размерность непустого слоя этой проекции нулевая, откуда по теор. 4.1 вытекает, что $\dim\pi_2(\Gamma) = \dim\Gamma = \dim\mathrm{Gr}(n-d, V) - 1$, т. е. *пересекающие X подпространства размерности $(n-d-1)$ образуют неприводимую гиперповерхность*[2] в грассманиане $\mathrm{Gr}(n-d, n+1)$.

Упражнение 4.13. Выведите отсюда, что существует неприводимый многочлен от плюккеровых координат $(n-d-1)$-мерного подпространства в $\mathbb{P}_n$, обращение которого в нуль на данном подпространстве H равносильно тому, что $H \cap X \neq \varnothing$.

Проделанные рассуждения иллюстрируют стандартный метод подсчёта размерностей при помощи многообразий инцидентности, часто используемый в геометрии.

Пример 4.9 (результант)

Фиксируем $(n+1)$ степеней $d_0, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$ и обозначим через $\mathbb{P}_{N_i} = \mathbb{P}\left(S^{d_i}V^*\right)$ пространство проективных гиперповерхностей степени d_i в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, как в n° 3.1.7 на стр. 54. Покажем, что результантное многообразие системы из $(n+1)$ однородных полиномиальных уравнений на $n+1$ неизвестных $\mathcal{R} = \{(S_0, S_1, \dots, S_n) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \mid \cap S_i \neq \varnothing\}$ является неприводимой гиперповерхностью[3] в $\mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$, т. е. существует такой (единственный с

[1] Т. е. слой над любой точкой из некоторого плотного открытого подмножества в грассманиане.

[2] т. е. подмногообразие коразмерности 1

[3] т. е.

точностью до пропорциональности) неприводимый многочлен от коэффициентов уравнений системы, однородный по коэффициентам каждого уравнения, что его обращение в нуль на наборе многочленов $f_0, f_1, \dots, f_n$ равносильно существованию ненулевого решения у системы полиномиальных уравнений $f_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Этот многочлен называется *результантом* системы однородных полиномиальных уравнений степеней $d_0, d_1, \dots, d_n$ на $n+1$ переменных. Рассмотрим многообразие инцидентности

$$\Gamma \overset{\text{def}}{=} \{(S_1, S_2, \dots, S_n, p) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \times \mathbb{P}_n \mid p \in \cap S_i\}.$$

Упражнение 4.14. Убедитесь, что G является проективным алгебраическим многообразием.

Поскольку уравнение $f(p) = 0$ линейно по f, проективные гиперповерхности степени d_i, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_n$, образуют гиперплоскость в пространстве $\mathbb{P}_{N_i}$. Поэтому проекция $\pi_2 : \Gamma \twoheadrightarrow \mathbb{P}_n$ сюрьективна, а все её слои являются произведениями проективных гиперплоскостей и имеют одинаковую размерность $\sum (N_i - 1) = \sum N_i - n - 1$. Поэтому Γ является неприводимым проективным многообразием размерности $\sum N_i - 1$.

Упражнение 4.15. Предъявите в $\mathbb{P}_n$ набор из $n+1$ гиперповерхностей S_i заданных степеней d_i, пересекающихся ровно в одной точке.

Из упражнения вытекает, что у проекции $\pi_1 : \Gamma \to \mathbb{P}_{N_0} \times \mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$ имеется нульмерный слой. Поэтому общий непустой слой тоже нульмерен, и $\dim \pi_1(\Gamma) = \dim \Gamma$. Тем самым, $\pi_1(\Gamma)$ является неприводимой гиперповерхностью в $\mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$.

Упражнение 4.16. Покажите, что всякое неприводимое подмногообразие коразмерности 1 в произведении проективных пространств задаётся неприводимым многочленом от однородных координат, однородным по координатам каждого из проективных пространств.

Пример 4.10 (прямые на поверхностях в $\mathbb{P}_3$)
Поверхности заданной степени d в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ образуют проективное пространство $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^d V^*)$ размерности $N = \frac{1}{6}(d+1)(d+2)(d+3) - 1$. Прямые в $\mathbb{P}_3$ образуют грассманиан $\mathrm{Gr}(2,4) = \mathrm{Gr}(2, V)$, который мы отождествим с квадрикой Плюккера $P \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. Рассмотрим многообразие всех прямых, лежащих на поверхностях степени d

$$\Gamma \overset{\text{def}}{=} \{\, (S, \ell) \in \mathbb{P}_N \times P \mid \ \ell \subset S \,\} \subset \mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_5 .$$

Упражнение 4.17. Докажите, что Γ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_5$.

Проекция $\pi_2 : \Gamma \twoheadrightarrow Q_P$ сюрьективна, и все её слои являются проективными пространствами одинаковой размерности $\frac{1}{6}\, d(d+1)(d+5) - 1$. В самом деле, прямая $\ell \subset \mathbb{P}(V)$, заданная уравнениями $x_0 = x_1 = 0$, лежит на поверхности $f = 0$, если и только если $f = x_2 \cdot g(x) + x_3 \cdot h(x)$ для некоторых $g, h \in S^{d-1}V^*$. Такие многочлены f составляют образ линейного отображения

$$S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^* \to S^d V^*, \quad (g, h) \mapsto x_2 g + x_3 h,$$

ядро которого состоит из всех таких (g, h), что $x_2 g = -x_3 h$. В силу факториальности кольца многочленов, последнее равенство равносильно тому, что $g = x_3 p$, $h = -x_2 p$ для некоторого $p \in S^{d-2}V^*$. Таким образом, ядро изоморфно $S^{d-2}V^*$, и значит, образ является векторным пространством размерности

$$2\,\dim(S^{d-1}V^*) - \dim(S^{d-1}V^*) = \frac{1}{6}\left(2d(d+1)(d+2) - (d-1)d(d+1)\right) = \frac{1}{6} d(d+1)(d+5).$$

Согласно теор. 4.2, многообразие Γ неприводимо и $\dim \Gamma = \frac{1}{6}\, d(d+1)(d+5)+3$.

Образ проекции $\pi_1 : \Gamma \to \mathbb{P}_N$ состоит из поверхностей, содержащих хотя бы одну прямую. По сл. 4.2 на стр. 77 он является замкнутым неприводимым подмногообразием в $\mathbb{P}_N$, а его размерность равна разности $\dim \Gamma$ и минимальной из размерностей непустых слоёв проекции π_1. Поскольку $\dim \mathbb{P}_N - \dim \Gamma = \frac{1}{6}\big((d+1)(d+2)(d+3) - d(d+1)(d+5)\big) - 4 = d-3$, мы заключаем, что при $d \geqslant 4$ образ $\pi_1(\Gamma) \subset \mathbb{P}_N$ заведомо является собственным подмногообразием. Это означает, что на общей[1] поверхность степени $d \geqslant 4$ в $\mathbb{P}_3$ нет прямых.

Упражнение 4.18. Убедитесь, что на проективном замыкании аффинной кубической поверхности $xyz = 1$ лежат ровно три прямых.

Упражнение показывает, что при $d = 3$ у проекции $\pi_1 : \Gamma \to \mathbb{P}_N$ есть непустой нульмерный слой. Следовательно, $\dim \pi_1(\Gamma) = \dim \Gamma = N$, и из неприводимости $\pi_1(\Gamma)$ вытекает равенство $\pi_1(\Gamma) = \mathbb{P}_N$. Таким образом, каждая кубическая поверхность $S_3 \subset \mathbb{P}_3$ содержит хотя бы одну прямую, причём для общей кубики множество лежащих на ней прямых конечно.

Упражнение 4.19. Опишите все слои проекции $\pi_1 : \Gamma \to \mathbb{P}_N$ для $d = 2$.

Упражнение 4.20. Найдите все прямые на кубике Ферма $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$.

4.5. Отступление: 27 прямых на гладкой кубической поверхности. Рассмотрим гладкую[2] кубическую поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$, заданную уравнением $F(x) = 0$.

Лемма 4.3
Всякое приводимое плоское сечение S распадается либо в объединение прямой и гладкой коники, либо в объединение трёх различных прямых.

Доказательство. Предложение утверждает, что никакое плоское сечение $\pi \cap S$ не содержит двойной прямой. Допустим, что такая двойная прямая $\ell \subset \pi \cap S$ имеется. Выберем координаты так, чтобы плоскость π имела уравнение $x_2 = 0$, а прямая ℓ — уравнения $x_2 = x_3 = 0$. Тогда $F(x) = x_2 Q(x) + x_3^2 L(x)$ с линейным L и квадратичным Q. Обозначим через a одну из точек пересечения прямой ℓ с квадрикой $Q(x) = 0$. Тогда $x_2(a) = x_3(a) = Q(a) = 0$ и все частные производные $\partial F/\partial x_i$ равны нулю в точке a, т. е. кубика S особа в точке a. □

Следствие 4.12
В одной точке поверхности S может пересекаться не более трёх лежащих на S прямых, и в этом случае все три прямые лежат в одной плоскости.

Доказательство. Все проходящие через $p \in S$ прямые, лежащие на S, принадлежат $S \cap T_p S$. □

Лемма 4.4
Для каждой прямой $\ell \subset S$ существуют ровно 5 различных плоскостей $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_5$, содержащих ℓ и пересекающих S по тройке прямых $\pi_i \cap S = \ell \cup \ell_i \cup \ell_i'$. При этом $\ell_i \cap \ell_j = \ell_i \cap \ell_j' = \ell_i' \cap \ell_j' = \varnothing$ для всех $i \neq j$, и любая лежащая на S и не пересекающая ℓ прямая при каждом i пересекает ровно одну из двух прямых ℓ_i, ℓ_i'.

[1] Т. е. на любой из некоторого плотного по Зарисскому открытого подмножества в пространстве всех гиперповерхностей.

[2] См. n° 2.2.2 на стр. 29.

Доказательство. Рассмотрим такой базис $e_0, e_1, e_2, e_3 \in V$, что прямая $\ell = (e_0 e_1)$ задаётся уравнениями $x_2 = x_3 = 0$. Тогда задающий поверхность S многочлен F имеет вид

$$L_{00}(x_2, x_3) \cdot x_0^2 + 2\,L_{01}(x_2, x_3) \cdot x_0 x_1 + L_{11}(x_2, x_3) \cdot x_1^2 + \\ + 2\,Q_0(x_2, x_3) \cdot x_0 + 2\,Q_1(x_2, x_3) \cdot x_1 + R(x_2, x_3) = 0\,, \quad (4\text{-}8)$$

где $L_{ij}, Q_\nu, R \in k[x_2, x_3]$ являются однородными многочленами степеней 1, 2, 3 соответственно. Каждая содержащая прямую ℓ плоскость пересекает прямую $(e_2 e_3)$ в единственной точке $e_\vartheta = \vartheta_2 e_2 + \vartheta_3 e_3$. Обозначим такую плоскость через $\pi_\vartheta = (e_0 e_1 e_\vartheta)$ и будем использовать однородную координату $\vartheta = (\vartheta_2 : \vartheta_3) \in \mathbb{P}_1$ точки e_ϑ относительно базиса e_2, e_3 в качестве параметра в пучке плоскостей, проходящих через прямую ℓ. Обозначим через $(t_0 : t_1 : t_2)$ однородные координаты в плоскости π_ϑ относительно базиса e_0, e_1, e_ϑ. Прямая $\ell \subset \pi_\vartheta$ задаётся в этих координатах уравнением $t_2 = 0$, а уравнение плоской коники $(\pi_\vartheta \cap S) \smallsetminus \ell$ получается из уравнения (4-8) подстановкой $x = (t_0 : t_1 : \vartheta_2 t_2 : \vartheta_3 t_2)$ и сокращением общего множителя t_2 в левой части. Таким образом, матрица Грама этой коники равна

$$G = \begin{pmatrix} L_{00}(\vartheta) & L_{01}(\vartheta) & Q_0(\vartheta) \\ L_{01}(\vartheta) & L_{11}(\vartheta) & Q_1(\vartheta) \\ Q_0(\vartheta) & Q_1(\vartheta) & R(\vartheta) \end{pmatrix}$$

а её определитель $D(\vartheta) = \det G$ является однородным многочленом степени 5 от ϑ

$$D(\vartheta) = L_{00}(\vartheta) L_{11}(\vartheta) R(\vartheta) + 2\,L_{01}(\vartheta) Q_0(\vartheta) Q_1(\vartheta) - \\ - L_{11}(\vartheta) Q_0^2(\vartheta) - L_{00}(\vartheta) Q_1^2(\vartheta) - L_{01}(\vartheta)^2 R(\vartheta) \in \Bbbk[\vartheta_2, \vartheta_3]\,. \quad (4\text{-}9)$$

Он обращается в нуль в пяти точках $\vartheta \in \mathbb{P}_1$, учтённых с кратностями. Мы должны показать, что все эти кратности равны единице. Каждый нуль детерминанта (4-9) соответствует вырождению коники в пару прямых. Точка пересечения этих прямых либо лежит на ℓ, либо нет.

В первом случае выберем базис так, чтобы этими двумя прямыми были прямые $\ell' = (e_0 e_2)$ и $\ell'' = \big(e_0 (e_1 + e_2)\big)$, которые задаются уравнениями $x_3 = x_1 = 0$ и $x_3 = (x_1 - x_2) = 0$. Это вырождение происходит при $\vartheta = (1 : 0)$, и кратность этого корня равна наибольшей степени ϑ_3, на которую делится $D(\vartheta_2, \vartheta_3)$. Так как $\ell, \ell', \ell'' \subset S$, уравнение (4-8) имеет вид

$$x_1 x_2 (x_1 - x_2) + x_3 \cdot q(x) = 0$$

для некоторого квадратичного многочлена $q(x)$. Не делящимися на ϑ_3 элементами матрицы G могут быть лишь $L_{11} \equiv x_2 \pmod{\vartheta_3}$ и $Q_1 \equiv -x_2^2/2 \pmod{\vartheta_3}$, при условии, что мономы $x_1 x_2^2$ и $x_0^2 x_2$ входят в (4-8) с ненулевыми коэффициентами. Если это так, то

$$D(\vartheta_2, \vartheta_3) \equiv -L_{00} Q_1^2 \equiv \vartheta_3 \pmod{\vartheta_3^2}$$

имеет нужный порядок по ϑ_3. Поскольку моном $x_1 x_2^2$ является единственным, дающим ненулевой вклад в частные производные от F в точке $e_2 \in S$, а моном $x_0^2 x_2$ — единственным мономом с ненулевым вкладом в частные производные от F в точке $e_0 \in S$.

Во втором случае выберем базис так, чтобы $\ell' = (e_0 e_2)$, $\ell'' = (e_1 e_2)$ задавались уравнениями $x_3 = x_1 = 0$ и $x_3 = x_0 = 0$. Это вырождение также происходит при $\vartheta = (1 : 0)$, а уравнение (4-8) имеет вид $x_0 x_1 x_2 + x_3 \cdot q(x) = 0$. Не делящимся на ϑ_3 элементом матрицы G является лишь $L_{01} \equiv x_2/2 \pmod{\vartheta_3}$, и определитель $D(\vartheta_2, \vartheta_3) \equiv -L_{01}^2 R \equiv \vartheta_3 \pmod{\vartheta_3^2}$ имеет первый порядок по ϑ_3.

Оставшиеся утверждения о пересечениях прямых вытекают из сл. 4.12, лем. 4.3 и того, что каждая прямая в $\mathbb{P}_3$ пересекает любую плоскость. □

Следствие 4.13
Любая гладкая кубическая поверхность содержит не пересекающиеся прямые. □

Лемма 4.5
Ни через какие четыре лежащие на поверхности S попарно не пересекающиеся прямые нельзя провести квадрику, и для любой такой четвёрки прямых существует по крайней мере одна, но не более двух лежащих на S прямых, пересекающих каждую прямую четвёрки.

Доказательство. Если заданные четыре попарно скрещивающиеся прямые на S лежат на квадрике Q, то Q это гладкая квадрика Сегре[1], заметаемая двумя семействами прямых, и все прямые четвёрки лежат в одном из этих двух семейств. Каждая прямая из другого семейства пересекает все четыре заданные прямые, и стало быть, лежит на кубической поверхности S, ибо всякая прямая, проходящая через 4 различных точки кубической поверхности обязана лежать на поверхности целиком. Следовательно $Q \subset S$, т. е. поверхность S приводима, а значит, особа. □

Теорема 4.3
Каждая гладкая кубическая поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$ содержит ровно 27 прямых, причём матрица их попарных пересечений[2] с точностью до нумерации прямых не зависит от поверхности.

Доказательство. Зафиксируем пару скрещивающихся прямых a, $b \subset S$ и построим 5 пар прямых ℓ_i, ℓ_i', расположенных в проходящих через прямую a плоскостях согласно лем. 4.4, причём в каждой паре обозначим через ℓ_i ту прямую, которая пересекается с b, а через ℓ_i' — ту, что не пересекает. Далее, обозначим через ℓ_i'' ещё 5 прямых, образующих вместе с прямыми ℓ_i пять пар прямых, расположенных согласно лем. 4.4 в плоскостях проходящих через прямую b. Таким образом, каждая из прямых ℓ_i'' не пересекается ни с a, ни с прямым ℓ_j, у которых $j \neq i$, но пересекается с b и со всеми прямыми ℓ_j', у которых $j \neq i$.

Любая прямая $c \subset S$, отличная от 17 перечисленных, не пересекает ни a, ни b, но при каждом i пересекает ровно одну из двух прямых ℓ_i, ℓ_i'. Из лем. 4.5 вытекает, что все лежащие на S прямые, пересекающие не менее четырёх прямых ℓ_i, исчерпываются парой прямых a, b. С другой стороны, если лежащая на S прямая c пересекает не более двух прямых ℓ_i, то с точностью до перестановки индексов, она пересекается с тремя прямыми ℓ_1', ℓ_2', ℓ_3' и ещё либо с прямой ℓ_4', либо с прямой ℓ_5. В обоих случаях по лем. 4.5 прямая c это одна из двух прямых a, ℓ_5''.

Таким образом, каждая прямая $c \subset S$, отличная от 17 прямых a, b, ℓ_i, ℓ_i', ℓ_i'', пересекается в точности с тремя прямыми ℓ_i. Покажем, что на поверхности S есть ровно 10 таких прямых, и они биективно соответствуют $\binom{5}{3} = 10$ тройкам $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Для каждой тройки прямых ℓ_i имеется самое большее одна отличная от a прямая c, пересекающая все прямые из тройки и оставшиеся две прямые ℓ_j'. С другой стороны, по лем. 4.4 для каждого i на S лежит

[1] См. формулу (1-14) на стр. 19.

[2] Т. е. симметричная матрица размера 27×27, в позиции ij которой стоит нуль, если $\ell_i \cap \ell_j = \varnothing$, и единица, если $\ell_i \cap \ell_j \neq \varnothing$. При перенумерации прямых эта матрица сопрягается матрицей перестановки номеров.

ровно 10 прямых, пересекающих прямую ℓ_i. В их число входят 4 прямые a, b, ℓ_i', ℓ_i'', а оставшиеся 6 должны, как мы знаем, пересекать ещё ровно две из оставшихся четырёх прямых ℓ_j. Поскольку таких пар и имеется ровно $\binom{4}{2} = 6$, мы получаем нужную биекцию между прямыми c и тройками (i, j, k). $\square$

Упражнение 4.21. Найдите порядок подгруппы $G \subset S_{27}$, состоящей из всех тех перестановок 27 прямых, которые сохраняют матрицу их попарных пересечений.

Упражнение 4.22. Напомню, что поле $\mathbb{F}_4 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ является квадратичным расширением поля $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2)$ и обладает автоморфизмом Фробениуса $z \mapsto \overline{z} \stackrel{\text{def}}{=} z^2$, который оставляет на месте подполе $\mathbb{F}_2$ и переставляет друг с другом корни многочлена[1] $x^2 + x + 1$. Покажите, что *проективная унитарная группа*[2] $\mathrm{PU}_4(\mathbb{F}_4)$ канонически вкладывается в группу G из упр. 4.21 в качестве нормальной подгруппы индекса 2.

[1] В этом смысле расширение $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_4$ аналогично расширению $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, в котором поле $\mathbb{C}$ определяется как $\mathbb{R}[\omega]$, где $\omega \in \mathbb{C}$ это нетривиальный кубический корень из единицы (он удовлетворяет уравнению $\omega^2 + \omega + 1 = 0$). Автоморфизм Фробениуса аналогичен комплексному сопряжению $\omega \mapsto \overline{\omega} = \omega^2$.

[2] Т. е. фактор *унитарной группы* $\mathrm{U}_4(\mathbb{F}_4) = \{M \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_4) \mid \overline{M}M^t = E\}$ по подгруппе скалярных унитарных матриц.

Упр. 1.2. В правой части стоит геометрическая прогрессия $q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1$, а слева — количество ненулевых векторов в $(n+1)$-мерном пространстве, делённое на количество ненулевых векторов в одномерном пространстве, т. е. $(q^{n+1} - 1)/(q - 1)$.

Упр. 1.3. Это очевидно из подобия прямоугольных треугольников на рис. 1◇2 на стр. 5, а также из соотношения $(s : 1) = (x_0 : x_1) = (1 : t)$.

Упр. 1.4. В качестве точек q и r, задающих такую прямую, можно взять компоненты u, w разложения любого вектора $v \in V$, отвечающего точке $p \in \mathbb{P}(V)$. Наоборот, если v лежит в двумерном векторном подпространстве с базисом u, v, где $u \in U$ и $w \in W$, то компоненты разложения вектора v по U и W пропорциональны u и w в силу единственности такого разложения.

Упр. 1.6. Пусть $L_1 = \mathbb{P}(U)$, $L_2 = \mathbb{P}(W)$, $p = \mathbb{P}(\Bbbk \cdot e)$. Поскольку $p \notin L_2$, $V = W \oplus \Bbbk \cdot e$. Центральная проекция из p индуцирована линейной проекцией V на W вдоль $\Bbbk \cdot e$. Так как $p \notin L_1$, ограничение этой проекции на подпространство U имеет нулевое ядро и, стало быть, является линейным изоморфизмом.

Упр. 1.7. Пусть $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ и дробно линейные автоморфизмы

$$\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \quad \text{и} \quad \varphi_q : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$$

таковы, что прообразами точек $\infty,\ 0,\ 1$ являются, соответственно, p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3. Тогда $\varphi_p(p_4) = \varphi_q(q_4)$ и $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$ переводит p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4. Наоборот, если $\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ переводит p_1, p_2, p_3 в $\infty,\ 0,\ 1$, а φ_{qp} переводит переводит p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4, то $\varphi_p \circ \varphi_{qp}^{-1}$ переводит q_1, q_2, q_3, q_4, соответственно, в $\infty,\ 0,\ 1,\ [p_1, p_2, p_3, p_4]$, откуда

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4].$$

Упр. 1.9. Если поле $\Bbbk$ конечно и состоит из q элементов, пространство функций $\mathbb{A}(V) \to \Bbbk$ тоже конечно и состоит из $q^{q^{\dim V}}$ элементов. Так как алгебра многочленов бесконечна, гомоморфизм из алгебры многочленов в алгебру функций имеет ненулевое ядро. Его сюрьективность следует из того, что для любого конечного набора точек существует многочлен, принимающий в этих точках любые наперёд заданные значения. Над бесконечным полем $\Bbbk$ инъективность гомоморфизма алгебры многочленов $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ в алгебру функций $\mathbb{A}(V) \to \Bbbk$ доказывается индукцией по $n = \dim V$. Так как ненулевой многочлен $f(x)$ от одной переменной не может иметь $\geqslant \deg f$ корней, тождественно нулевая на бесконечном множестве $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}(\Bbbk)$ функция может получиться только из нулевого многочлена. Многочлен от n переменных является многочленом от x_n с коэффициентами из $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum\limits_{\nu=0}^{d} \varphi_\nu(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n^{d-\nu}$. Вычисляя коэффициенты φ_ν в произвольной точке $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \in \Bbbk^{n-1}$, мы получаем многочлен от x_n с постоянными коэффициентами, задающий тождественно нулевую функцию на прямой $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$, и потому нулевой. Тем самым, все многочлены φ_ν являются тождественно нулевыми функциями на $\mathbb{A}^{n-1}$. По предположению индукции, они являются нулевыми многочленами.

Упр. 1.15. Особая квадрика в $\mathbb{P}_3$ это либо двойная плоскость (квадрика ранга 1), либо пара различных пересекающихся плоскостей (линейное соединение особой прямой с гладкой пустой квадрикой на дополнительной прямой), либо двойная прямая (линейное соединение особой прямой с гладкой пустой квадрикой на дополнительной прямой), либо одна двойная точка (линейное соединение особой точки с гладкой пустой коникой в дополнительной плоскости), либо простой конус (линейное соединение особой точки с гладкой непустой коникой в дополнительной плоскости). Убедитесь, что в последнем случае любая лежащая на квадрике прямая проходит через особую точку.

Упр. 1.17. Всякая прямая, лежащая на Q_s и проходящая через какую-нибудь точку $p \in Q_s$ содержится в плоской конике $Q_s \cap T_p Q_s$, где $T_p Q$ — касательная плоскость к Q в точке p. Эта коника исчерпывается парой проходящих через p прямых из описанных выше двух семейств.

Упр. 2.1. См. Лемму 1.1 из лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-01.pdf.

Упр. 2.3. Для любого линейного отображения $f : V \to A$ отображение

$$V \times V \times \cdots \times V \to A\,,$$

переводящее $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ в произведение $f(v_1) \cdot f(v_2) \cdot \cdots \cdot f(v_n) \in A$ полилинейно, и значит, корректно определяет для каждого $n \in \mathbb{N}$ линейное отображение $V^{\otimes n} \to A$. Вместе они задают гомоморфизм алгебр $\boldsymbol{T}V \to A$, продолжающий f. Всякий гомоморфизм $\boldsymbol{T}V \to A$, продолжающий f, переводит всякий разложимый тензор $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ в $\varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \cdot \cdots \cdot \varphi(v_n) \in A$, и стало быть, совпадает с построенным продолжением. Это доказывает выполнение универсального свойства. Тот факт, что $\boldsymbol{T}V$ и ι однозначно определяются этим универсальным свойством, доказывается стандартным рассуждением, как в Лемме 1.1 из лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-01.pdf.

Упр. 2.4. Ответ: $\binom{n+d-1}{d-1}$, т. е. число решений уравнения $m_1 + m_2 + \cdots + m_d = n$ в неотрицательных целых числах $m_1, m_2, \dots, m_d$.

Упр. 2.5. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают $V^{*\otimes n}$ и формула

$$v \llcorner \varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$$

линейна по v и φ, достаточно проверять её для форм φ, переводимых изоморфизмом (??) в разложимые тензоры вида $\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n$, а для таких форм она очевидна из построения.

Упр. 2.6. Выберем в V такой базис $e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q, w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s$, что векторы e_i образуют базис в $U \cap W$, векторы u_j и w_k дополняют его до базисов в U и W соответственно, а векторы v_m дополняют всё предыдущее до базиса в V. Разложим t по базисным тензорным мономам. Условие $t \in U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$ означает, что в t входят только мономы, не содержащие никаких иных векторов, кроме e_i.

Упр. 2.7. Стабилизатор каждого слагаемого в симметрической группе S_n состоит из

$$m_1!\, m_2! \cdots m_d!$$

независимых перестановок одинаковых сомножителей между собою. Остаётся применить формулу для длины орбиты.

Упр. 2.8. Свёртка базисного симметричного тензора $x_{[m_1, m_2, \dots, m_d]} \in \mathrm{Sym}^n(V^*)$ с тензором $v^{\otimes n} \in V^{\otimes n}$ представляет собой сумму $n!/(m_1! \cdot m_2! \cdots m_d!)$ одинаковых произведений

$$x_1(v)^{m_1} x_2(v)^{m_2} \cdot x_d(v)^{m_d}$$

и совпадает со значением на векторе v полиномиальной функции

$$(x_1, x_2, \dots, x_d) \mapsto \frac{n!}{m_1!\cdot m_2! \cdots m_d!} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}.$$

Упр. 2.10. Поскольку утверждение линейно по v, f и g достаточно проверить его для $v = e_i$, $f = x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}$, $g = x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}$, что делается прямо по определению.

Упр. 2.11. Это следует из равенства $\widetilde{f}(v, x, \dots, x) = \frac{1}{n} \cdot \partial_v f(x)$, где $n = \deg f$.

Упр. 2.13. Это аналогично упр. 2.10.

Упр. 2.14. Фиксируем в U базис $e_1, e_2, \dots, e_m$. Если $\omega \notin \Lambda^m U$, то в ω есть моном e_I, не содержащий какого-нибудь базисного вектора — скажем, e_i. Тогда $e_i \wedge \omega \neq 0$, поскольку будет содержать ненулевой моном $e_{i \sqcup I}$, возникающий только из произведения e_i на e_I и, стало быть, не способный ни с чем сократиться. Наоборот, если $\omega \in \Lambda^m U$, то $\omega = \lambda \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_m$ и $e_i \wedge \omega = 0$ $\forall\ i$, а значит, $u \wedge \omega = 0 \ \ \forall\, u \in U$.

Упр. 2.18. Возрастающий набор номеров $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ тех столбцов, в которых располагаются углы ступенек, однозначно восстанавливается по U как лексикографически минимальный набор набор I, такой что U изоморфно проектируется на координатное подпространство E_I вдоль дополнительного координатного подпространства, а строки матрицы — как координаты прообразов стандартных базисных векторов $e_i \in E_I$ при этой проекции.

Упр. 2.19. Если $\omega = u_1 \wedge u_2$, то $\omega \wedge \omega = u_1 \wedge u_2 \wedge u_1 \wedge u_2 = 0$. Из курса линейной алгебры известно, что произвольный бивектор $\omega \in \Lambda^2 V$ в подходящем базисе $e_1, e_2, \dots, e_d$ пространства V записывается как $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \cdots$. Если слагаемых больше одного, то $\omega \wedge \omega = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \cdots \neq 0$, и стало быть, ω не разложим.

Упр. 2.22. Рассмотрим конус $C = P \cap T_p P$. Он имеет вершину в p и состоит из всех прямых, проходящих через p и лежащих на P. Фиксируем 3-мерную гиперплоскость $H \subset T_p P$, которая не содержит p. Тогда $G = C \cap H$ есть невырожденная квадрика на H. Таким образом, любая прямая, проходящая через p, имеет вид $(pp') = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$, где $p' \in G$ и плоскости π_α, π_β натянутые на p и две прямые, проходящие через p' в G (см. рис. 2◇1).

Упр. 2.23. Каждая прямая, которая проходит через p и не касается Q, пересекает квадрику ещё ровно в одной отличной от p точке, координаты которой, по теореме Виета, рационально зависят от прямой.

Упр. 3.1. Если a и b являются старшими коэффициентами многочленов $f(x)$ и $g(x)$ из идеала I, причём $\deg f = m$ и $\deg g = n$, где $m \geqslant n$, то $a + b$ либо равно нулю, либо является старшим коэффициентом многочлена $f(x) + x^{m-n} \cdot g(x) \in I$ степени m. Аналогично, для любого $\alpha \in A$ произведение αa является старшим коэффициентом многочлена $\alpha f(x) \in I$ степени m.

Упр. 3.2. Пусть $\pi : A \twoheadrightarrow B$ — гомоморфизм факторизации. Полный прообраз $\pi^{-1}(I)$ любого идеала $I \subset B$ является конечно порождённым идеалом в A. Образы его образующих в B продят идеал I.

Упр. 3.5. В силу универсального свойства поля частных, любой ненулевой гомоморфизм алгебры A без делителей нуля в любое поле однозначно продолжается до вложения в это поле поля частных алгебры A.

Упр. 3.6. По предл. 3.2 целое замыкание $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m)$ в Q_A является полем. Если оно содержит A, то содержит и Q_A.

Упр. 3.10. Если $a^n = 0$ и $b^m = 0$, то $(a + b)^{m+n-1} = 0$ и $(ca)^n = 0$ для любого $c \in A$.

Упр. 3.11. Так как для простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ фактор кольцо $A/\mathfrak{p}$ не имеет делителей нуля, гомоморфизм факторизации $A \twoheadrightarrow A\mathfrak{p}$ аннулирует все нильпотенты. Поэтому $\mathfrak{n}(A) \subset \bigcap \mathfrak{p}$. Если элемент $a \in A$ не является нильпотентом, его неотрицательные целые степени a^m образуют содержащее единицу и не содержащее нуля мультипликативно замкнутое подмножество в A. Локализация $A[a^{-1}]$ кольца A по этому мультипликативно замкнутому подмножеству[1] является ненулевым коммутативным кольцом с единицей. Полный прообраз любого простого идеала $\mathfrak{m} \subset A[a^{-1}]$ относительно канонического гомоморфизма $A \to A[a^{-1}]$ является не содержащим элемента a простым идеалом в кольце A.

Упр. 3.15. Это геометрическая версия китайской теоремы об остатках. Отображение $\varphi : \Bbbk[X] \hookrightarrow \Bbbk[Y] \times \Bbbk[Z]$, переводящее $f \in \Bbbk[X]$ в пару $(f|_Y, f|_Z)$, инъективно, т. к. $Y \cup Z = X$. По теореме Гильберта нулях идеал $I(Y) + I(Z) \subset \Bbbk[X]$, задающий в X пересечение $Y \cap Z = \varnothing$, содержит единицу, т. е. существуют такие $s \in I(Y)$ и $t \in I(Z)$, что $1 = s + t$. Тогда $\varphi(s) = \varphi(1-t) = (0,1)$ и $\varphi(t) = \varphi(1-s) = (1,0)$, а произвольная пара классов $(f \pmod{I(Y)}, g \pmod{I(Z)}) \in \Bbbk[Y] \times \Bbbk[Z]$ равна $\varphi(ft + gs)$, что означает сюрьективность φ.

Упр. 3.18. Первые три равенства и включения $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J) \subset V(IJ) \subset V(I) \cup V(J)$ очевидны.

Упр. 3.19. Объединение любого семейства главных открытых множеств $\mathcal{D}(f_\nu)$ является дополнением к множеству нулей идеала I, порождённого функциями f_ν. Но этот идеал порождается конечным числом функций $f_1, f_2, \dots, f_k$ из числа f_ν. Поэтому, $V(I) = V(f_1) \cap V(f_2) \cap \ldots \cap V(f_k)$, а значит $X \smallsetminus V(I) = V(f_1) \cup V(f_2) \cup \ldots \cup V(f_k)$.

Упр. 3.20. Если $V(f) = X$, то $f \in I(X)$, и значит, $f = 0$ в $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$. Если $V(f) = \varnothing$, то множество нулей идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, порождённого идеалом $I(X)$ и многочленом f пусто, и из слабой теоремы о нулях вытекает, что $1 \equiv sf \pmod{I(X)}$ для некоторого $s \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, т. е. f обратим в $\Bbbk[X]$.

Упр. 3.21. $Y = (Y \cap Z) \cup \overline{Y \smallsetminus Z}$, где по условию $Y \cap Z \neq Y$.

Упр. 3.24. Делители нуля в $\left(f^{-1}\right)$ исчерпываются пересечениями этого идеала с идеалами $I(X_i)$ неприводимых компонент X_i многообразия X. Так как неделители нуля в $\left(f^{-1}\right)$ по определению имеются, каждое из пересечений $\left(f^{-1}\right) \cup I(X_i) \subsetneq \left(f^{-1}\right)$ является собственным векторным подпространством в $\left(f^{-1}\right)$. Если бы все неделители нуля тоже содержались в каком-нибудь собственном подпространстве, всё пространство $\left(f^{-1}\right)$ оказалось бы объединением конечного набора собственных подпространств, что невозможно над бесконечным полем.

Упр. 3.25. Как и в упр. 3.24 каждое пересечение $I \cap I(X_i)$ является собственным векторным подпространством в I, поскольку включение $I \subset I(X_\nu)$ означало бы, что $X_\nu \subset \bigcup\limits_{i \neq j} (X_i \cap X_j)$, а это в силу непроводимости X_ν влечёт включение $X_\nu \subset X_i \cap X_j$ для некоторых $i \neq j$, что невозможно, т. к. ни одна из неприводимых компонент не содержится в другой. Если все неделители нуля в I лежат в собственном подространстве, то I оказывается объединением конечного числа собственных подпространств.

Упр. 3.26. Элемент прямого произведения не делит нуль тогда и только тогда, когда каждая из его компонент не делит нуль: $S^{-1}_{K_1 \times K_2 \times \dots \times K_k} = S^{-1}_{K_1} \times S^{-1}_{K_2} \times \dots \times S^{-1}_{K_k}$.

Упр. 3.27. Используйте покрытие $U = \bigcup \mathcal{D}(x_i)$ и лем. 3.7.

Упр. 3.29. Пусть $A = \Bbbk[X]$, $B = \Bbbk[Y]$. Вложение $\varphi^* : B \hookrightarrow A$ задаёт на A структуру конечно порождённой B-алгебры, т. е. представляет A в виде $A \simeq B[x_1, x_2, \dots, x_m]/J$, что и утверждается.

[1] Т. е. кольцо дробей вида b/a^m с $b \in A$, $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Упр. 3.30. $\varphi^*(\Bbbk[Y]) = \Bbbk[\overline{\varphi(X)}]$.

Упр. 4.1. Если $x_i x_j \neq 0$, то $t_{j,\nu} = x_\nu/x_j = (x_\nu : x_i) / (x_j : x_i) = t_{i,\nu}/t_{i,j}$ (при $\nu = i$ надо считать $t_{i,i} = 1$). Поэтому $\varphi^*_{ji} : t_{j,\nu} \mapsto t_{i,\nu}/t_{i,j}$. Обратный к φ^*_{ji} гомоморфизм $\Bbbk\left[\mathcal{D}\left(t_{i,j}\right)\right] \to \Bbbk\left[\mathcal{D}\left(t_{j,i}\right)\right]$ действует по той же формуле $t^{(i)}_j \mapsto 1/t^{(j)}_i$, $t_{i,\nu} \mapsto t_{j,\nu}/t_{j,i}$.

Упр. 4.2. В каждом таком W имеется единственный базис $w_1, w_2, \dots, w_k$, проектирующийся в стандартный базис $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ координатной k-плоскости. Матрица z, по строкам которой стоят координаты векторов w_i в стандартном базисе пространства $\Bbbk^m$, имеет $s_I(z) = E$. В GL_k-орбите каждой матрицы x im U_I также имеется единственная матрица z с $s_I(z) = E$ — именно, $z = s_I(x)^{-1} \cdot x$.

Упр. 4.3. Элементы $k \times m$-матрицы $s_J^{-1}(\varphi_I(t)) \cdot \varphi_I(t)$ являются рациональными функциями от элементов матрицы t со знаменателями $\det s_J(\varphi_I(t))$ и, стало быть, регулярны в $\mathcal{D}\left(\det s_J(\varphi_I(t))\right)$. Поэтому отображение φ_{JI}, переводящее эту матрицу в её $k \times (m-k)$-подматрицу, образованную столбцами с не лежащими в J номерами, регулярно. Обратное отображение задаётся той же формулой: $t \mapsto s_{\hat{I}}\left(s_I^{-1}\left(\varphi_J(t)\right) \cdot \varphi_J(t)\right)$ (удостоверьтесь в этом!).

Упр. 4.4. Это следует из определения локальной регулярной функции и **??** на стр. **??**.

Упр. 4.5. Отображение $\varkappa$ можно задать формулой $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$, из которой видно, что оно не определено только в точках $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ и образ $\varkappa$ тоже равен дополнению до этих трёх точек.

Упр. 4.6. В обозначения из прим. 4.1 на стр. 71 пересечение множества нулей однородного многочлена $\overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ со стандартной картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ задаётся в аффинных координатах t_i карты U_i полиномиальным уравнением

$$\overline{f}\left(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}\right) = 0\,.$$

Упр. 4.10. Пусть $X_1, X_2 \subset X$ — два замкнутых неприводимых подмножества и $U \subset X$ — открытое множество, такое что оба пересечения $X_1 \cap U$, $X_2 \cap U$ непусты. Тогда $X_1 = X_2 \iff X_1 \cap U = X_2 \cap U$, поскольку $X_i = \overline{X_i \cap U}$.

Упр. 4.11. Докажите, что произведение конечных сюрьекций $X \to \mathbb{A}^n$, $Y \to \mathbb{A}^m$ является конечной сюрьекцией $X \times Y \to \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$.

Упр. 4.12. Выберите в H какой-нибудь базис, запишите координаты векторов этого базиса и координаты точки p по строкам $(n-d+1) \times (n+1)$-матрицы. Условие $p \in H$ означает, что ранг этой матрицы равен $n-d$. Зануление всех миноров порядка $n-d+1$ является системой билинейных уравнений на плюккеровы координаты[1] подпространства H и однородные координаты точки p.

Упр. 4.14. Γ задаётся однородными по каждому f_i и по p уравнениями $f_0(p) = f_1(p) = \dots = f_n(p) = 0$.

Упр. 4.15. Возьмите $n+1$ гиперплоскостей, пересекающихся в одной точке, и возведите задающие их линейные формы в подходящие степени.

Упр. 4.17. Линейная оболочка векторов $u, w \in V$ является образом линейного отображения

$$V^* \to V\,, \quad \xi \mapsto \partial_\xi(u \wedge w) = \langle\, \xi\,,\, u \otimes w - w \otimes u \,\rangle\,.$$

[1] напомню, что плюккеровыми координатами подпространства являются старшие миноры матрицы, составленной из координат какого-нибудь базиса в этом подпространстве

Прямая $(uw) \subset \mathbb{P}_3$ лежит на поверхности $V(f) \subset \mathbb{P}_3$, если и только если $f\left(\partial_\xi(u \wedge w)\right) = 0$ для всех $\xi \in V^*$. Пусть векторы e_ν образуют базис в V, $u = \sum u_i e_i$, $v = \sum v_i e_i$, $\xi = \sum \xi_i e_i^*$. Тогда

$$u \wedge w = \sum_{i \neq j} p_{ij}\, e_i \wedge e_j\,, \quad \text{где} \quad p_{ij} = -p_{ji} = u_i v_j - u_j v_i$$

обозначают плюккеровы координаты на $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. Поскольку

$$\partial_\xi(u \wedge w) = \sum_k \sum_{i \neq j} \xi_k p_{ij} \frac{\partial}{\partial e_k}(e_i \wedge e_j) = \sum_k \Big(\sum_{i \neq j} p_{ij}\xi_k\Big) \cdot e_j\,,$$

подставляя $x_j = \sum\limits_{i \neq j} p_{ij}\xi_i$ в $f(x)$ и приравнивая к нулю коэффициент при каждом мономе от ξ_j, получаем систему полиномиальных уравнений на коэффициенты многочлена f и плюккеровы координаты p_{ij}, описывающую Γ как замкнутое алгебраическое подмногообразие в $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_5$.

Упр. 4.18. В аффинной части прямых нет вообще, так как подставляя вместо (x, y, z) точку, бегущую по прямой с параметрическим уравнением $x = x_0 + \alpha\, t$, $y = y_0 + \beta\, t$, $z = z_0 + \gamma\, t$ получаем несовместную систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = 0 \\ \alpha\beta z_0 + \beta\gamma x_0 + \gamma\alpha y_0 = 0 \\ \alpha y_0 z_0 + \beta x_0 z_0 + \gamma x_0 y_0 = 0 \\ x_0 y_0 z_0 = 1 \end{cases}$$

(убедитесь в этом!). Пересечение поверхности с бесконечно удалённой гиперплоскостью задаётся уравнением $xyz = 3$ и является объединением трёх прямых.

Упр. 4.19. В этом случае $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2V^*) = \mathbb{P}_5$ это пространство квадрик. Слой проекции $\pi_1 : \Gamma \to \mathbb{P}_5$ над каждой гладкой квадрикой является дизъюнктным объединением двух проективных прямых, слой над любой гладкой точкой гиперповерхности вырожденных квадрик $V(\det) \subset \mathbb{P}_5$ является одной проективной прямой, слой над парой пересекающихся плоскостей изоморфен дизъюнктному объединению двойственных плоскостей, а слой над двойной плоскостью — двойственной плоскости.

Упр. 4.20. С точностью до перенумерации координат, пара линейных уравнений, задающих прямую на кубике Ферма, приводится методом Гаусса к виду $x_0 = \alpha x_2 + \beta x_3$, $x_1 = \gamma x_2 + \delta x_3$. Подставьте эти значения в уравнение кубики, покажите, что $\alpha\beta\gamma\delta = 0$, а затем найдите их.

Упр. 4.21. Ответ: $|G| = 51\,840 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$

Упр. 4.22. Кубическая форма Ферма над $\mathbb{F}_4$ совпадает с эрмитовой формой $\sum x_i \overline{x}_i$. Поэтому кубика Ферма C_F из упр. 4.20 переводится в себя проективизированной унитарной группой $\mathrm{PU}_4(\mathbb{F}_4)$, отображающей прямые в прямые.