

### Напоминания из проективной геометрии

АГ1♦1. В стандартной карте  $U_0 \subset \mathbb{P}_2$  даны кривые а)  $y = x^2$  б)  $y = x^3$  в)  $y^2 + (x - 1)^2 = 1$  г)  $y^2 = x^2(x + 1)$ . Напишите их уравнения в картах  $U_1$  и  $U_2$  и нарисуйте все 12 кривых.

АГ1♦2 (рациональная нормальная кривая). Рассмотрим пространство  $U$  с базисом  $t_0, t_1$ , векторы которого интерпретируем как линейные формы от переменных  $t_0, t_1$ . Однородные многочлены степени  $d$  от  $t_0, t_1$  будем записывать в виде  $\sum_{n=0}^d a_n \binom{d}{n} t_0^n t_1^{d-n}$  и использовать коэффициенты  $a_i$  как однородные координаты на  $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U)$ . Покажите, что кривые  $C \subset \mathbb{P}_d$ , являющиеся образами перечисленных ниже отображений  $c_d, F, P : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(S^d U)$ , переводятся друг в друга подходящими линейными автоморфизмами пространства  $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U)$ : а)  $c_d : \psi \mapsto \psi^d$  б)  $F : a \mapsto (f_0(a) : f_1(a) : \dots : f_d(a))$ , где  $f_0, f_1, \dots, f_m$  — любой линейно независимый набор однородных многочленов степени  $d$  от  $a = (a_0, a_1)$  в)  $P : a \mapsto (\det^{-1}(p_0, a) : \det^{-1}(p_1, a) : \dots : \det^{-1}(p_d, a))$ , где  $p_0, p_1, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1$  произвольно фиксированные разные точки и  $\det(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} a_0 b_1 - a_1 b_0$  для  $a = (a_0 : a_1), b = (b_0 : b_1)$ .

АГ1♦3. Фиксируем  $d + 3$  точки  $p_1, p_2, \dots, p_d, a, b, c \in \mathbb{P}_d$  так, чтобы никакие  $(d + 1)$  из них не лежали в одной гиперплоскости, обозначим через  $\ell_i \simeq \mathbb{P}_1$  пучок гиперплоскостей, проходящий через все точки  $p_\nu$ , кроме  $p_i$ , и зададим проективные изоморфизмы  $\psi_{ij} : \ell_j \xrightarrow{\sim} \ell_i$  так, чтобы 3 гиперплоскости пучка  $\ell_j$ , проходящие через точки  $a, b, c$ , переходили в аналогичные 3 гиперплоскости пучка  $\ell_i$ . Покажите что  $\text{ГМТ} \bigcup_{H \in \ell_1} H \cap \psi_{21}(H) \cap \dots \cap \psi_{n1}(H)$  это кривая из зад. АГ1♦2.

АГ1♦4. Покажите, что: а) всякие  $n + 3$  точки в  $\mathbb{P}_n$ , любые  $n + 1$  из которых линейно независимы, лежат на единственной рациональной нормальной кривой б) над бесконечным полем любые  $n + 1$  разных точек рациональной нормальной кривой в  $\mathbb{P}_n$  линейно независимы.

АГ1♦5. Покажите, что два упорядоченных набора из  $n + 3$  точек на  $\mathbb{P}_n$ , такие что в каждом из наборов никакие  $n + 1$  точек не лежат в одной гиперплоскости, тогда и только тогда переводятся друг в друга проективным автоморфизмом, когда на проведённых через эти наборы рациональных нормальных кривых совпадают двойные отношения любых четвёрок соответственных точек.

АГ1♦6. В проективизации пространства однородных кубических многочленов от  $(t_0, t_1)$  опишите проекции кубики Веронезе  $C_3 = \{\varphi^3 \mid \varphi \in U\}$  а) из точки  $t_0^3$  на плоскость  $(3 t_0^2 t_1, 3 t_0 t_1^2, t_1^3)$  б) из точки  $3 t_0^2 t_1$  на плоскость  $(t_0^3, 3 t_0 t_1^2, t_1^3)$  в) из точки  $t_0^3 + t_1^3$  на плоскость  $(t_0^3, 3 t_0^2 t_1, 3 t_0 t_1^2)$  и убедитесь, что среди них нет гладкой<sup>1</sup> кубической кривой. Выведите отсюда, что гладкая кубическая кривая  $C \subset \mathbb{P}_2$  не допускает рациональной параметризации<sup>2</sup>.

АГ1♦7. Пусть в пучке коник на  $\mathbb{P}_2$  есть гладкая коника. Может ли в нём быть ровно а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4 вырожденных коники? е) Могут ли все коники пучка быть вырожденными?

АГ1♦8. Могут ли две гладкие коники пересекаться ровно по а) 1 б) 2 в) 3 различным точкам?

АГ1♦9. Покажите, что поляры данной точки  $a \in \mathbb{P}_2$  относительно коник произвольного пучка пересекаются в одной точке.

АГ1♦10. Из скольких точек состоят над девятиэлементным полем<sup>3</sup>  $\mathbb{F}_9$  а) коника  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$  на  $\mathbb{P}_2$  б) квадрика  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$  в  $\mathbb{P}_3$ .

АГ1♦11. Сколько прямых пересекают 4 данные попарно скрещивающиеся прямые в пространствах а)  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$  б)  $\mathbb{A}(\mathbb{C}^4)$  в)  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$  г)  $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ ? Найдите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых.

<sup>1</sup>без самопересечений и заострений, или, что то же самое, без таких точек  $p \in C$ , что любая проходящая через  $p$  прямая пересекает  $C$  с кратностью  $\geq 2$

<sup>2</sup>подсказка: всякая допускающая рациональную параметризацию плоская кривая степени  $d$  получается проектированием кривой Веронезе  $C_d \subset \mathbb{P}_d$  на подходящую плоскость  $\mathbb{P}_2 \subset \mathbb{P}_d$

<sup>3</sup>элементы поля  $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}[x]/(3, x^2 + 1)$  суть  $a + b\sqrt{-1}$ , где  $a, b \in \mathbb{Z}/(3)$  и  $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \in \mathbb{Z}/(3)$

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
2а			
б			
в			
3			
4а			
б			
5			
6а			
б			
в			
7			
8а			
б			
в			
9			
10а			
б			
11а			
б			
в			
г			