

### Проективные квадрики

**АГ2♦1.** Обозначим через  $S \subset \mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2V^*)$  множество всех вырожденных квадратик на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ . Покажите, что

- а)  $S$  является алгебраической гиперповерхностью, и точка  $Q \in S$  является неособой точкой поверхности  $S$  тогда и только тогда, когда соответствующая квадратика  $Q \subset \mathbb{P}_n$  имеет единственную особую точку  $p \in Q$
- б) касательная гиперплоскость  $T_Q S \subset \mathbb{P}_N$  в такой неособой точке  $Q \in S$  состоит из всех квадратик на  $\mathbb{P}_n$ , проходящих через особую точку  $p$  квадратика  $Q \subset \mathbb{P}_n$ .

**АГ2♦2 (спинорное разложение).** Пусть  $V = \text{End}(U)$ , где  $\dim U = 2$ . Покажите, что  $V = U^* \otimes U$  и разложение  $V^{\otimes 2}$  на симметричную и знакопеременную компоненты имеет вид

$$\underbrace{\left( (S^2U^* \otimes S^2U) \oplus (\Lambda^2U^* \otimes \Lambda^2U) \right)}_{S^2V} \oplus \underbrace{\left( (S^2U^* \otimes \Lambda^2U) \oplus (\Lambda^2U^* \otimes S^2U) \right)}_{\Lambda^2V}.$$

**АГ2♦3.** Пусть гладкая квадратика  $G \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$  задаётся квадратичной формой  $g$  с поляризацией  $\tilde{g}$ . Покажите, что билинейная форма  $\Lambda^2 \tilde{g}$  на  $\Lambda^2 V$ , заданная формулой

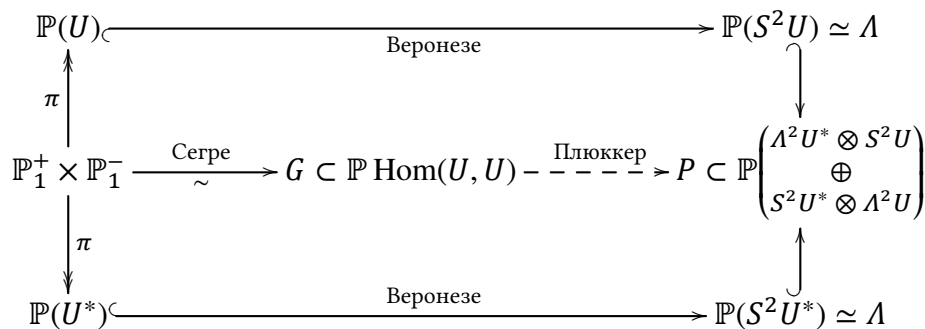
$$\Lambda^2 \tilde{g}(v_1 \wedge v_2, w_1 \wedge w_2) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \tilde{g}(v_1, w_1) & \tilde{g}(v_1, w_2) \\ \tilde{g}(v_2, w_1) & \tilde{g}(v_2, w_2) \end{pmatrix},$$

симметрична и невырождена, запишите её матрицу Грама в базисе  $e_i \wedge e_j$ , где  $e_i$  составляют  $g$ -ортонормальный базис в  $V$ , и покажите, что пересечение квадратика, задаваемой в  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 g)$  квадратичной формой  $\Lambda^2 g$ , с квадратикой Плюккера  $\text{Gr}(2, V) \subset \mathbb{P}_5$  состоит из плюккеревых образов всех касательных прямых к квадратике  $G \subset \mathbb{P}_3$ .

**АГ2♦4.** В обозначениях предыдущей задачи покажите, что вложение Плюккера  $\text{Gr}(2, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$  переводит два семейства прямых на квадратике Серге  $G \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(\text{Hom}(U, U))$  в пару гладких коник, высекаемых из квадратика Плюккера  $P \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$  двумя дополнительными плоскостями

$$\Lambda = \mathbb{P}(S^2U^* \otimes \Lambda^2U) \quad \text{и} \quad \Lambda = \mathbb{P}(\Lambda^2U^* \otimes S^2U),$$

лежащими в  $\mathbb{P}(\Lambda^2 \text{Hom}(U, U))$  по зад. АГ2♦2. Более того, обе коники вложены в эти плоскости по Веронезе, т. е. мы имеем следующую коммутативную диаграмму<sup>1</sup>:



**АГ2♦5 (звёздочка Ходжа).** В условиях предыдущих трёх задач оператор  $*$  :  $\Lambda^2 V \xrightarrow{\omega \mapsto \omega^*} \Lambda^2 V$  задаётся соотношением  $\omega_1 \wedge \omega_2^* = \Lambda^2 \tilde{g}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ , где  $\omega_{1,2} \in \Lambda^2$  любые, а  $e_i \in V$  составляют фиксированный ортонормальный базис формы  $g$ . Покажите что это определение корректно (не зависит от выбора базиса), найдите собственные значения и собственные подпространства оператора Ходжа и укажите место последних на предыдущей картинке.

<sup>1</sup>Плюккер пунктирный, поскольку отображает прямые в точки.

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2			
3			
4			
5			