Аффинные алгебраические многообразия.

АГ5◇1. Пусть $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $\deg f > 0$. При каком условии на вектор $v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$ параллельная проекция гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ в направлении v на гиперплоскость $x_n = 0$ является: **а)** доминантной **б)** конечной **в)** сюрьективной?

АГ5◇2. Докажите, что проекция аффинной гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ из любой точки $p \notin V(f)$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ доминантна.

АГ5◇3. Покажите, что образ доминантного морфизма содержит открытое плотное множество.

АГ5◇4 (лемма Нётер о нормализации). Покажите, что любая гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ допускает конечную сюрьекцию на некоторую гиперплоскость $\mathbb{A}^{n-1} \subset \mathbb{A}^n$.

АГ5◇5. Покажите, что открытое подмножество U аффинного многообразия X является его аффинным подмногообразием[1] тогда и только тогда, когда для некоторых $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[U]$, порождающих единичный идеал в кольце $\Bbbk[U]$, каждое из главных открытых подмножеств $U_i = \mathcal{D}\left(f_i\right)$ является аффинным многообразием с координатным кольцом $\Bbbk[U_i]$.

АГ5◇6 (рациональные функции). Кольцо частных[2] $Q_{\Bbbk[X]}$ координатной алгебры $\Bbbk[X]$ аффинного многообразия X называется *алгеброй рациональных функций* на X и обозначается $\Bbbk(X)$. Множество $D_f = \{x \in X \mid \exists p, q \in \Bbbk[X] : q(x) \neq 0 \;\&\; f = p/q\}$ называется *областью определения* рациональной функции $f \in \Bbbk(X)$. Покажите, что: **а)** если $x \in D_f$, то значение $f(x) = p(x)/q(x) \in \Bbbk$ не зависит от способа записи $f = p/q$ с $p, q \in \Bbbk[X]$ и $q(x) \neq 0$ **б)** D_f открыто и плотно в X **в)** отображение $f : D_f \to \Bbbk$, $x \mapsto f(x)$, непрерывно[3] **г)** идеал $I_f = \{q \in \Bbbk[X] \mid qf \in \Bbbk[X]\}$ порождается содержащимися в нём неделителями нуля **д)** $D_f = X \smallsetminus V(I_f)$ **е)** если $\mathcal{D}(h) \subset D_f$, где $h \in \Bbbk[X]$, то $f = g/h^m$ для некоторых $g \in \Bbbk[X]$ и $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ **ж)** если $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m$ — разложение на неприводимые компоненты, то имеется изоморфизм[4]:

$$\Bbbk(X) \xrightarrow{\sim} \Bbbk(X_1) \times \Bbbk(X_2) \times \cdots \times \Bbbk(X_m), \quad f \mapsto \left(f|_{X_1}, f|_{X_2}, \dots, f|_{X_m}\right).$$

АГ5◇7. Найдите D_f для **а)** $f = (1-y)/x$ на $V(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$ **б)** $f = y/x$ на $V(x^3 + x^2 - y^2) \subset \mathbb{A}^2$ **в)** $f = x_1/x_3$ на $X = V(x_1x_4 - x_2x_4) \subset \mathbb{A}^4$ и выясните, лежит ли f в $\Bbbk[X]$.

АГ5◇8 (фактор по конечной группе). Пусть конечная группа $\mathfrak{G}$ действует регулярными автоморфизмами на аффинном алгебраическом многообразии X над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Обозначим через $R = \Bbbk[X]^{\mathfrak{G}} \subset \Bbbk[X]$ подалгебру инвариантов. Покажите, что **а)** $\Bbbk$-линейный оператор $\natural : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow R$, переводящий функцию $f \in \Bbbk[X]$ в центр тяжести её $\mathfrak{G}$-орбиты $f^\natural \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathfrak{G}|} \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{G}} \sigma f$, обладает для всех $f \in \Bbbk[X]$ и $h \in R$ свойствами:

$$f^\natural \in R, \quad h^\natural = h, \quad (fh)^\natural = f^\natural h$$

б) алгебра R конечно порождена и не имеет нильпотентов.

в) Постройте такие аффинное алгебраическое многообразие $X/\mathfrak{G}$ и конечную регулярную сюрьекцию $\pi : X \twoheadrightarrow X/\mathfrak{G}$, что слои π — это в точности $\mathfrak{G}$-орбиты и для любого регулярного морфизма аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$, такого что $\forall\, \sigma \in \mathfrak{G}$ и $\forall\, x \in X$ $\varphi(\sigma x) = \varphi(x)$, существует единственный регулярный морфизм $\psi : X/\mathfrak{G} \to Y$, такой что $\psi \circ \pi = \varphi$.

г) Опишите явными уравнениями в подходящем аффинном пространстве фактор $\mathbb{C}^2/\mathfrak{G}$, где $\mathfrak{G} = \mathbb{Z}/(n)$ действует на $\mathbb{C}^2$ по правилу $[k]_n : (x, y) \mapsto (e^{2\pi i k/n}x, e^{2\pi i k/n}y)$.

---

[1] Т. е. существует аффинное многообразие Y и регулярный морфизм $Y \hookrightarrow X$ гомеоморфно отображающий Y на U.

[2] Т. е. локализация со знаменателями в мультипликативной системе всех неделителей нуля.

[3] В топологии Зарисского.

[4] Через $f|_{X_i}$ обозначен образ f при гомоморфизме $\Bbbk(X) \to \Bbbk(X_i)$, продолжающем гомоморфизм $\varphi_i^* : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow \Bbbk[X_i]$, отвечающий замкнутому вложению $\varphi_i : X_i \hookrightarrow X$.

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 5 (05.10.2016)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
2			
3			
4			
5			
6а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
7а			
б			
в			
8а			
б			
в			
г			