Соображения размерности

АГ6◇1 (результант). Зададимся $(n+1)$ натуральными степенями $d_0, d_1, \dots, d_n$, обозначим через $\mathbb{P}_{N_i} = \mathbb{P}\left(S^{d_i}V^*\right)$ пространство гиперповерхностей степени d_i в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и положим

$$\Gamma = \{(S_0, S_1, \dots, S_n, p) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \times \mathbb{P}_n \mid p \in S_0 \cap S_1 \cap \ldots \cap S_n\}.$$

Покажите что **а)** Γ — неприводимое проективное многообразие и найдите $\dim G$ **б)** существует единственный с точностью до пропорциональности неприводимый полином R от коэффициентов однородных форм $F_0, F_1, \dots, F_n$ заданных степеней от $(n+1)$ переменных, обращающийся в нуль , если и только если система $(n+1)$ уравнений $F_\nu = 0$ имеет ненулевое решение[1].

АГ6◇2 (геометрическое определение размерности). Покажите, что размерность неприводимого многообразия $X \subset \mathbb{P}_n$ равна: **а)** наибольшему $d \in \mathbb{Z}$, такому что $X \cap L \neq \varnothing$ для любого $(n-d)$-мерного проективного подпространства $L \subset \mathbb{P}_n$ **б)** наименьшему $d \in \mathbb{Z}$, при котором имеется $(n-d-1)$-мерное проективное подпространство $L \subset \mathbb{P}_n$ с $X \cap L = \varnothing$ **в)** наименьшему $d \in \mathbb{Z}$, такому что $X \cap L = \varnothing$ для общего[2] $(n-d-1)$-мерного проективного подпространства $L \subset \mathbb{P}_n$.

АГ6◇3. Покажите, что множество $(n-d)$-мерных проективных подпространств $H \subset \mathbb{P}(V)$, пересекающих произвольно заданное d-мерное проективное многообразие $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ по конечному множеству точек, является плотным открытым по Зарисскому подмножеством грассманиана[3] $\mathrm{Gr}(n+1-d, V)$, параметризующего все $(n-d)$-мерные проективные подпространства в $\mathbb{P}(V)$.

АГ6◇4 (k-детерминанталь). Обозначим через $\mathcal{D}_k(m,n) \subset \mathbb{P}\big(\mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)\big)$ проективное многообразие матриц M из m строк и n столбцов с $\mathrm{rk}\, M \leqslant k$. С помощью подходящего многообразия инцидентности $\Gamma = \{(L, M) \mid L \subset \ker M\}$ (где L — подпространство, а M — матрица) покажите, что $\mathcal{D}_k(m,n)$ является неприводимым проективным многообразием и найдите $\dim \mathcal{D}_k(m,n)$.

АГ6◇5. Покажите, что множество всех поверхностей 4-й степени $S \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, на которых имеется хоть одна прямая, образует неприводимую алгебраическую гиперповерхность в пространстве $\mathbb{P}(S^4V^*)$ всех поверхностей 4-й степени.

АГ6◇6 (изотропные грассманианы). Покажите, что множество n-мерных проективных подпространств, лежащих на гладкой $(2n+1)$-мерной квадрике в $\mathbb{P}_{2n+2}$ (соотв. на гладкой $2n$-мерной квадрике в $\mathbb{P}_{2n+1}$) является неприводимым проективным многообразием (соотв. дизъюнктным объединением двух изоморфных друг другу проективных многообразий) и выясните размерности этих многообразий[4].

АГ6◇7 (многообразие секущих). Для неприводимого $X \subset \mathbb{P}(V)$ обозначим через $\mathcal{S}(X) \subset \mathrm{Gr}(2,V)$ замыкание множества всех прямых (p,q) с $p,q \in X$ и $p \neq q$, а через $S(X) \subset \mathbb{P}(V)$ — объединение в $\mathbb{P}(V)$ всех прямых ℓ из $\mathcal{S}(X)$. Покажите, что **а)** $\mathcal{S}(X)$ неприводимо и $\dim \mathcal{S}(X) = 2\dim X$ **б)** $S(X)$ неприводимо и $\dim S(X) \leqslant 2\dim X + 1$ **в)** если X — скрученная[5] кривая, то $\dim S(X) = 3$

АГ6◇8. Покажите, что изолированные точки слоёв любого регулярного морфизма $\varphi : X \to Y$ заметают открытое (возможно, пустое) подмножество в X.

АГ6◇9 (теорема Шевалле о конструктивности). Докажите, что образ регулярного морфизма алгебраических многообразий получается применением конечного числа операций пересечения, объединения и разности из конечного числа открытых и замкнутых подмножеств.

---

[1] кстати, как выглядит этот многочлен, когда все степени равны единице?

[2] т. е. лежащего в некотором открытом по Зарисскому плотном подмножестве грассманиана $\mathrm{Gr}(n-d, V)$, параметризующего все $(n-d-1)$-мерные проективные подпространства в $\mathbb{P}(V)$

[3] подсказка: рассмотрите многообразие $\Gamma = \{(x, H) \in X \times \mathrm{Gr}(n+1-d, V) \mid x \in H\}$, с помощью проекции $\Gamma \to X$ установите его проективность, неприводимость и найдите размерность, затем примените проекцию $\Gamma \to \mathrm{Gr}(n+1-d, V)$

[4] они называются *изотропными грассманианами*

[5] т. е. не содержащаяся в плоскости

Персональный табель ________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 6 (19.10.2016)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2а			
б			
в			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
8			
9			