

Пучки модулей и семейства векторных пространств

АГ6◊1 (локализация). Пусть A — коммутативное кольцо с единицей, $S \subset A$ — мультипликативно замкнутое подмножество, содержащее 1, M — A -модуль.

- а) Покажите, что наименьшее отношение эквивалентности на $M \times S$, содержащее все отождествления $(m, s) \sim (tm, ts)$ с произвольными $m \in M$ и $t, s \in S$, тогда и только тогда отождествляет (m_1, s_1) с (m_2, s_2) , когда $ss_2m_1 = ss_1m_2$ для некоторого $s \in S$.
- б) Обозначим через MS^{-1} фактор $M \times S$ по предыдущей эквивалентности. Покажите, что на AS^{-1} имеется естественная структура кольца, а на MS^{-1} — модуля над кольцами A и AS^{-1} , и для любого гомоморфизма A -модулей $\varphi : M \rightarrow N$ постройте естественный гомоморфизм AS^{-1} -модулей $\varphi_S : MS^{-1} \rightarrow NS^{-1}$.
- в) Постройте гомоморфизмы: колец $A \rightarrow AS^{-1}$ и A -модулей $M \rightarrow MS^{-1}$ и опишите их ядра.
- г) Пусть $\text{im } \varphi = \ker \psi$ для A -линейных $\varphi : M' \rightarrow M$ и $\psi : M \rightarrow M''$. Покажите, что $\text{im } \varphi_S = \ker \psi_S$.
- д) Покажите, что $MS^{-1} = M \otimes_A AS^{-1}$.

АГ6◊2 (тензорное произведение). Пусть $M_1 = F_1/R_1$ и $M_2 = F_2/R_2$, где F_1, F_2 — свободные модули над коммутативным кольцом A . Покажите, что $F_1 \otimes_A F_2$ свободен ранга $\text{rk } F_1 \cdot \text{rk } F_2$ и

$$M_1 \otimes_A M_2 = F_1 \otimes_A F_2 / (R_1 \otimes_A F_2 + F_1 \otimes_A R_2).$$

АГ6◊3 (лемма Накаямы). Пусть A — локальное¹ кольцо, $\mathfrak{a} \subsetneq A$ — идеал, M — конечно порождённый A -модуль. Покажите, что: а) $M = \mathfrak{a}M \Rightarrow M = 0$ б) если $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ максимален, и классы $[m_i] = m_i \pmod{\mathfrak{m}M}$ образуют базис векторного пространства $M/\mathfrak{m}M$ над полем A/\mathfrak{m} , то элементы m_i линейно порождают M над A в) если M проективен, то M свободен.

АГ6◊4. Покажите, что конечно порождённый проективный модуль P над нётеровым кольцом A локально свободен, т. е. для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ найдётся такая функция $f \in A \setminus \mathfrak{p}$, что² P_f своден над A_f .

АГ6◊5. Обозначим через A кольцо непрерывных функций $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ с $f(0) = f(1)$, а через M — аддитивную группу непрерывных функций $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ с $f(0) = -f(1)$. Убедитесь, что M — несвободный проективный A -модуль.

АГ6◊6. Пусть A — конечно порождённая алгебра над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} , M — конечно порождённый A -модуль, $B = S^*M$ — симметрическая алгебра модуля M . Положим $\mathbb{V}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spec}_m B$, $X = \text{Spec}_m A$. Покажите, что: а) морфизм $\pi : \mathbb{V}(M) \rightarrow X$, двойственный к вложению $A \hookrightarrow B$ в качестве подалгебры констант, сюръективен, и его слой над точкой $x \in X$ с максимальным идеалом $\mathfrak{m} = \ker \text{ev}_x \subset A$, представляет собою векторное пространство над полем $\mathbb{k} = A/\mathfrak{m}$, канонически двойственное к векторному пространству³ $M_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}M_{\mathfrak{m}}$ над $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \simeq \mathbb{k}$ б) локализованный модуль $M_{\mathfrak{m}}$ является слоем в точке x пучка локальных регулярных сечений когерентного пучка \mathcal{O}_X -модулей⁴ \tilde{M} на X .

АГ6◊7. Пусть подмногообразие $Y = V(f_1, f_2, \dots, f_m) \subset X$ аффинного многообразия X задано регулярной последовательностью $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{k}[X]$, и $I = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. Покажите, что I/I^2 является свободным $\mathbb{k}[Y]$ -модулем ранга t (семейство векторных пространств $N_{Y/X} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{V}(I/I^2)$ называется *нормальным расслоением* к Y в X).

АГ6◊8. Для аффинного $X = \text{Spec}_m A$ покажите, что образ диагонального вложения $X \hookrightarrow X \times X$ замкнут, и его идеал совпадает с ядром умножения $A \otimes A \rightarrow A$.

¹Т. е. обладающее единственным максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subsetneq A$.

²Мы используем стандартное обозначение $M_f \stackrel{\text{def}}{=} MS^{-1}$ для мультипликативной системы $S = \{f^k \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.

³Мы используем стандартное обозначение $M_{\mathfrak{m}} \stackrel{\text{def}}{=} MS^{-1}$ для $S = A \setminus \mathfrak{m}$.

⁴Модуль его сечений над открытым $U \subset X$ это $\mathcal{O}_X(U)$ -модуль $M \otimes_{\mathbb{k}[X]} \mathcal{O}_X(U)$. В частности, для главного открытого множества $U = \mathcal{D}(f)$ имеем $\tilde{M}(U) = M_f = M \otimes_A A_f$.

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
д			
2			
3а			
б			
в			
4			
5			
6а			
б			
7			
8			