

§3. Многообразия Веронезе, Грассмана и Серге

3.1. Напоминания из полилинейной алгебры. Тензорные степени¹ $V^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} V \otimes \dots \otimes V$ векторного пространства V объединяются в ассоциативную (некоммутативную) алгебру²

$$TV \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n},$$

которая называется *тензорной алгеброй* пространства V или *свободной ассоциативной алгеброй*, порождённой V . Выбор в V базиса из векторов e_i отождествляет TV с алгеброй многочленов от некоммутирующих друг с другом переменных e_i : мономы n -й степени

$$e_{v_1} \otimes \dots \otimes e_{v_n} \quad (3-1)$$

образуют базис в $V^{\otimes n}$ и перемножаются приписыванием друг к другу через значок $\otimes$. Алгебра TV вместе с вложением

$$\iota: V \hookrightarrow TV, \quad (3-2)$$

которое отождествляет V с подпространством $V^{\otimes 1} \subset TV$ однозначно с точностью до единственного перестановочного с ι изоморфизма алгебр характеризуется тем, что для любой ассоциативной $\mathbb{k}$ -алгебры A и всякого линейного отображения $f: V \rightarrow A$ существует единственный такой гомоморфизм $\mathbb{k}$ -алгебр $\alpha: TV \rightarrow A$, что $f = \alpha \circ \iota$.

Двусторонний идеал $\mathcal{I}_{\text{com}} \subset TV$, порождённый всевозможными разностями³

$$u \otimes w - w \otimes u \in V \otimes V, \quad (3-3)$$

называется *соотношениями коммутативности*, а фактор алгебра $SV \stackrel{\text{def}}{=} TV / \mathcal{I}_{\text{com}}$ называется *симметрической алгеброй* пространства V или *свободной коммутативной алгеброй*, порождённой V . Выбор в V базиса $e_1, \dots, e_d$ отождествляет SV с алгеброй многочленов $\mathbb{k}[e_1, \dots, e_d]$.

Двусторонний идеал $\mathcal{I}_{\text{sk}} \subset TV$, порождённый квадратами всевозможных векторов $v \in V$

$$v \otimes v \in V \otimes V, \quad (3-4)$$

называется *соотношениями антикоммутативности*⁴, а фактор алгебра $AV \stackrel{\text{def}}{=} TV / \mathcal{I}_{\text{sk}}$ называется *внешней* или *грассмановой алгеброй* пространства V . Умножение в алгебре AV называется *внешним* или *грассмановым* и обозначается $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$. Из равенств

$$0 = (u + w) \wedge (u + w) = u \wedge w + w \wedge u$$

вытекает, что внешнее произведение векторов $u, w \in V$ *знакопеременно*. Выбор в V базиса $e_1, \dots, e_d$ отождествляет внешнюю алгебру AV с алгеброй $\mathbb{k}\langle e_1, \dots, e_d \rangle$ *грассмановых многочленов*⁵ с коэффициентами в $\mathbb{k}$ от антикоммутирующих переменных e_i с нулевыми квадратами, базис в которой составляют грассмановы мономы

$$e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}, \quad \text{где } I = (i_1, \dots, i_n) \text{ и } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq d. \quad (3-5)$$

¹Подробнее про тензорные произведения и тензорную алгебру можно прочитать в лекциях http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2425/lec_13.pdf и http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2425/lec_14.pdf.

²Мы полагаем $V^{\otimes 0} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{k}$, а $V^{\otimes 1} \stackrel{\text{def}}{=} V$.

³Т. е. наименьшая по включению $\mathbb{k}$ -подалгебра, содержащая все такие разности и вместе с каждым элементом содержащая все его левые и правые кратные.

⁴Или *суперкоммутативности*, коротко — *s-коммутативности*.

⁵См. раздел 8.3 на с. 132 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2425/lec_08.pdf.

Подпространство $\Lambda^n V \subset \Lambda V$ однородных грассмановых многочленов степени n имеет размерность $\dim \Lambda^n V = \binom{d}{n}$, а вся грассманова алгебра $\Lambda V = \bigoplus_{n=0}^d \Lambda^n V$ имеет $\dim \Lambda V = 2^{\dim V} = 2^d$.

3.1.1. Свёртки. Для конечномерного векторного пространства V над произвольным полем $\mathbb{k}$ тензорные степени $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$ канонически двойственны друг другу посредством *полной свёртки*, сопоставляющей разложимым тензорам $v = v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ и $\xi = \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ произведение

$$\langle v, \xi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n \xi_i(v_i). \quad (3-6)$$

Если базисы $e_1, \dots, e_n \in V$ и $x_1, \dots, x_n \in V^*$ двойственны друг другу, то составленные из тензорных мономов $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}$ и $x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_s}$ базисы в $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$ также двойственны друг другу. Из универсального свойства тензорного произведения вытекает, что пространство линейных отображений $V^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{k}$ канонически изоморфно пространству n -линейных форм

$$V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}. \quad (3-7)$$

Комбинация этого изоморфизма с задаваемым полной свёрткой изоморфизмом между $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$ устанавливает канонический изоморфизм между $V^{*\otimes n}$ и пространством n -линейных форм (3-7). Разложимому тензору $\xi = \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ при этом отвечает n -линейная форма

$$V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}, (v_1, \dots, v_n) \mapsto \prod_{i=1}^n \xi_i(v_i).$$

Для любых двух упорядоченных наборов из m неповторяющихся¹ индексов

$$I = (i_1, \dots, i_m), \quad J = (j_1, \dots, j_m)$$

имеется линейное отображение *частичной свёртки* по m сомножителям I, J

$$c_J^I : V^{*\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow V^{*\otimes(p-m)} \otimes V^{\otimes(q-m)} \\ \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_q \mapsto \prod_{v=1}^m \xi_{i_v}(v_{j_v}) \cdot \left(\bigotimes_{i \notin I} \xi_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{j \notin J} v_j \right) \quad (3-8)$$

которое для каждого $v = 1, 2, \dots, m$ спаривает i_v -тый сомножитель в $V^{*\otimes p}$ с j_v -тым сомножителем в $V^{\otimes q}$, а все остальные сомножители оставляет в том же порядке, как они стояли.

УПРАЖНЕНИЕ 3.1. Интерпретируем n -линейную форму $\varphi : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$ как тензор из $V^{*\otimes n}$, обозначим через $v_{\perp} \varphi$ его свёртку по первому тензорному сомножителю с заданным вектором $v \in V$ и интерпретируем тензор $v_{\perp} \varphi \in V^{*\otimes(n-1)}$ как $(n-1)$ -линейную форму на V . Убедитесь, что $v_{\perp} \varphi(w_1, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, \dots, w_{n-1})$.

3.1.2. Линейный носитель тензора. Для заданного тензора $t \in V^{\otimes n}$ на конечномерном векторном пространстве V над произвольным полем $\mathbb{k}$ обозначим через $\text{supp}(t) \subset V$ пересечение всех таких подпространств $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$. Иначе $\text{supp}(t)$ описывается как такое наименьшее по включению² подпространство $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.2. Убедитесь, что для любой пары векторных подпространств $U, W \subset V$ включения $t \in U^{\otimes n}$ и $t \in W^{\otimes n}$ влекут включение $t \in (U \cap W)^{\otimes n}$.

¹Но не обязательно возрастающих или убывающих.

²Или, что то же самое, по размерности.

Подпространство $\text{supp}(t)$ называется *линейным носителем* тензора t . Если он отличается от всего пространства V , тензор t называется *вырожденным*. Это означает, что часть переменных в некоммутативном многочлене t можно уничтожить подходящей линейной заменой базиса. Например, если $\dim \text{supp}(t) = 1$, то $t = c \cdot v^{\otimes n}$ для некоторых ненулевых $c \in \mathbb{k}$ и $v \in \text{supp}(t)$.

Чтобы явно указать векторы, линейно порождающие $\text{supp}(t)$, где $t \in V^{\otimes n}$, для каждого набора $J = (j_1, \dots, j_{n-1})$ из $n - 1$ неповторяющихся индексов¹ $1 \leq j_v \leq n$ обозначим через

$$t_J : V^{*\otimes(n-1)} \rightarrow V, \quad \xi \mapsto c_{j_1, \dots, j_{n-1}}^{1, \dots, (n-1)}(\xi \otimes t), \quad (3-9)$$

полную свёртку с тензором t , спаривающую v -й сомножитель произведения $V^{*\otimes(n-1)}$ с j_v -м сомножителем тензора t для каждого $1 \leq v \leq (n - 1)$. Если записать t в виде суммы разложимых тензоров вида $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$, то результатом такой свёртки будет линейная комбинация векторов v_i с $i \notin J$. Очевидно, что она лежит в $\text{supp}(t)$.

ТЕОРЕМА 3.1

Пространство $\text{supp}(t)$ линейно порождается образами всех свёрток (3-9).

Доказательство. Обозначим $\text{supp}(t)$ через $W \subset V$. Достаточно доказать, каждая линейная форма $\xi \in V^*$, аннулирующая образы всех свёрток (3-9), аннулирует подпространство W . Предположим противное: пусть ковектор $\xi \in V^*$ имеет ненулевое ограничение на W , но аннулирует $t_J (V^{*\otimes(n-1)})$ для всех J . Выберем в V^* базис $\xi_1, \dots, \xi_d$, в котором $\xi_1 = \xi$, а ограничения ковекторов $\xi_1, \dots, \xi_k$ на W образуют базис в W^* . Обозначим через $w_1, \dots, w_k$ двойственный базис пространства W и разложим t по этому базису. Значение $\xi(t_J(\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{n-1}}))$ равно полной свёртке тензора t с базисным тензорным мономом $\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{n-1}} \otimes \xi_1$ по всем n тензорным сомножителям в том порядке, который предписан последовательностью² J . Получающееся в результате этой свёртки число равно коэффициенту, с которым соответствующий двойственный тензорный моном³ от базисных векторов w_i входит в разложение t . Подбирая надлежащие J , можно получить коэффициент при любом содержащем w_1 мономе, входящем в разложение t . Тем самым, все они нулевые, т. е. $w_1 \notin \text{supp}(t)$ вопреки нашему выбору. $\square$

3.1.3. Симметричные и знакопеременные тензоры. Всюду в этом разделе мы по умолчанию считаем, что основное поле $\mathbb{k}$ имеет характеристику нуль. Симметрическая группа S_n действует на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах⁴:

$$\forall g \in S_n \quad g(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = v_{g^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{g^{-1}(n)}, \quad (3-10)$$

и так как правая часть полилинейно зависит от $v_1, \dots, v_n$, эта формула корректно задаёт линейный оператор $g : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$. Тензор $t \in V^{\otimes n}$ называется *симметричным*, если $g(t) = t$

¹Которые не обязаны возрастать или убывать.

²Т. е. j_v -й сомножитель тензора t сворачивается с ξ_{i_v} при $1 \leq v \leq n - 1$, а оставшийся в t сомножитель с номером $\{1, \dots, n\} \setminus J$ сворачивается с ξ_1 .

³ j_v -й множитель этого монома равен w_{i_v} при $1 \leq v \leq n - 1$, а оставшийся сомножитель с номером $\{1, \dots, n\} \setminus J$ равен w_1 .

⁴Обратите внимание, что набор занумерованных векторов $v_1, \dots, v_n$ есть не что иное, как отображение $v : \{1, \dots, n\} \rightarrow V$. Левое действие группы S_n автоморфизмов множества $\{1, \dots, n\}$ на таких отображениях задаётся правилом $gv(i) = v(g^{-1}(i))$. При этом i -й слева элемент набора v оказывается в наборе $g(v)$ на $g(i)$ -м слева месте.

для всех $g \in S^n$, и *знакопеременным* — если $g(t) = \text{sgn}(g) t$ для всех $g \in S^n$. Симметричные и знакопеременные тензоры образуют в $V^{\otimes n}$ векторные подпространства

$$\begin{aligned}\text{Sym}^n V &= \{ t \in V^{\otimes n} \mid \forall g \in S_n \ g(t) = t \}, \\ \text{Alt}^n V &= \{ t \in V^{\otimes n} \mid \forall g \in S_n \ g(t) = \text{sgn}(g) \cdot t \}.\end{aligned}$$

Зафиксируем в пространстве V базис $E \subset V$ и будем записывать тензоры $t \in V^{\otimes n}$ в виде некоммутативных многочленов от базисных мономов $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$, где $e_i \in E$. Два таких монома лежат в одной S_n -орбите если и только если для каждого $e \in E$ количество $m(e)$ равных e сомножителей в этих мономах одинаково. Мы заключаем, что S_n -орбиты базисных мономов в $V^{\otimes n}$ нумеруются функциями $m : E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ с конечным носителем и суммой значений $|m| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{e \in E} m(e)$ равной n . При этом тензор t симметричен если и только если вместе с каждым базисным моном в него с тем же самым коэффициентом входят все мономы S_n -орбиты этого базисного монома. Мы заключаем, что симметричные тензоры

$$e_{[m]} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \text{сумма всех базисных тензорных мономов, куда} \\ \text{каждый вектор } e \in E \text{ входит ровно } m(e) \text{ раз,} \end{pmatrix} \quad (3-11)$$

занумерованные функциями $m : E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ с $|m| = n$, образуют базис векторного подпространства $\text{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$. Например, базис в $\text{Sym}^3(\mathbb{k}^2)$ составляют тензоры

$$\begin{aligned}e_{[3,0]} &= e_1 \otimes e_1 \otimes e_1, & e_{[0,3]} &= e_2 \otimes e_2 \otimes e_2, \\ e_{[2,1]} &= e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_1, \\ e_{[1,2]} &= e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_2 \otimes e_1,\end{aligned}$$

где $E = \{e_1, e_2\} \subset \mathbb{k}^2$ — стандартный базис, а $[i, j] : E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $e_1 \mapsto i$, $e_2 \mapsto j$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.3. Убедитесь, что в сумме (3-11) ровно $n! / \prod_{e \in E} m(e)!$ слагаемых.

В разложении кососимметричного тензора $t \in \text{Alt}^n V$ участвуют только те базисные мономы $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$, у которых $e_i \neq e_j$ при $i \neq j$. Орбита такого монома состоит из $n!$ мономов

$$e_{g(1)} \otimes \dots \otimes e_{g(n)}, \text{ где } g \in S_n,$$

и коэффициент при каждом таком мономе получается из коэффициента при $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ умножением на $\text{sgn } g$. Мы заключаем, что если зафиксировать на множестве базисных векторов $E \subset V$ какой-нибудь линейный порядок, то кососимметричные тензоры

$$\langle e_1 \otimes \dots \otimes e_n \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) e_{g(1)} \otimes \dots \otimes e_{g(n)}, \text{ где } e_1 < \dots < e_n, \quad (3-12)$$

составят базис векторного подпространства $\text{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$.

ТЕОРЕМА 3.2 (поляризация многочленов)

Если $\text{char } \mathbb{k} = 0$, то ограничения отображения факторизации

$$V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\text{com}} \cap V^{\otimes n}), \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto v_1 \dots v_n, \quad (3-13)$$

на подпространство симметричных тензоров $\text{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$ и отображения факторизации

$$V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n}), \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_n, \quad (3-14)$$

на подпространство знакопеременных тензоров $\text{Alt}^n \subset V^{\otimes n}$ являются линейными изоморфизмами векторных пространств. Они действуют на стандартные базисы (3-11) и (3-12) так:

$$e_{[m]} \mapsto \frac{n!}{\prod_{e \in E} m(e)!} \prod_{e \in E} e^{m(e)}, \quad (3-15)$$

$$\langle e_1 \otimes \dots \otimes e_n \rangle \mapsto n! e_1 \wedge \dots \wedge e_n. \quad (3-16)$$

Доказательство. Проекция (3-13) переводит каждое из $n! / \prod_{e \in E} m(e)!$ слагаемых, входящих в сумму (3-11), в стандартный коммутативный базисный моном $\prod_{e \in E} e^{m(e)}$ алгебры многочленов $\mathbb{k}[E]$, а проекция (3-14) переводит каждое из $n!$ слагаемых суммы (3-12) в стандартный базисный грассманов моном $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ алгебры грассмановых многочленов $\mathbb{k}\langle E \rangle$. $\square$

Предостережение 3.1. Не смотря на теор. 3.2, симметричные и знакопеременные тензоры, т. е. подпространства $\text{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$ и $\text{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$, не следует путать с однородными многочленами, т. е. с фактор пространствами $S^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\text{com}} \cap V^{\otimes n})$ и $\Lambda^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n})$. Если $\text{char } \mathbb{k} = p > 0$, то ограничения проекций $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ и $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ на подпространства симметрических и знакопеременных тензоров могут иметь ненулевые ядра. Даже в характеристике нуль эти проекции переводят стандартные базисные векторы тензорных и полиномиальных пространств не буквально друг в друга, но в некоторые кратности друг друга, и эти поправочные комбинаторные множители приходится учитывать как при попытке поднять на пространства симметричных и знакопеременных тензоров коммутативное и s -коммутативное умножения, имеющиеся в алгебрах SV и ΛV , так и при попытке спустить в симметрическую и грассманову алгебру отображения свёртки, которые имеются между тензорами из двойственных пространств V и V^* .

Пример 3.1 (двойственность)

Если $\text{char } \mathbb{k} = 0$ и $\dim V < \infty$, то ограничение задаваемого полной свёрткой спаривания между $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$ на подпространства $\text{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$ и $\text{Sym}^n V^* \subset V^{*\otimes n}$ задаёт между ними невырожденное спаривание, при котором стандартные базисные симметрические тензоры (3-11), составленные из векторов двойственных друг другу базисов в V и V^* сворачиваются друг с другом по правилу

$$\langle x_{[m]}, e_{[m]} \rangle = n! / \prod_{e \in E} m(e)! \quad \text{и} \quad \langle x_{[k]}, e_{[\ell]} \rangle = 0 \quad \text{при} \quad k \neq \ell, \quad (3-17)$$

так как каждое слагаемое суммы (3-11) сворачивается в единицу ровно с одним слагаемым такой же суммы, составленной из двойственных базисных векторов, и сворачивается в нуль со всеми прочими базисными мономами. Изоморфизм (3-15) превращает это спаривание в каноническое невырожденное спаривание между симметрическими степенями $S^n V$ и $S^n V^*$, при котором базисные мономы, составленные из векторов любых двойственных друг другу базисов в V и в V^* спариваются по правилу

$$\langle x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, e_1^{m_1} \dots e_n^{m_n} \rangle = \begin{cases} m_1! \dots m_n! / n! & \text{если } (k_1, \dots, k_n) = (m_1, \dots, m_n) \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3-18)$$

Аналогичным образом, ограничение полной свёртки на подпространства $\text{Alt}^n V$ и $\text{Alt}^n V^*$ над полем характеристики нуль задаёт между ними невырожденное спаривание, при котором стандартные базисные знакопеременные тензоры (3-12) сворачиваются по правилу

$$\langle \langle x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_n} \rangle, \langle e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_n} \rangle \rangle = \begin{cases} n! & \text{если } (i_1, \dots, i_n) = (j_1, \dots, j_n) \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (3-19)$$

и посредством изоморфизма (3-16) это спаривание превращается в невырожденное спаривание между внешними степенями $\Lambda^n V$ и $\Lambda^n V^*$, при котором базисные мономы, составленные из векторов любых двойственных друг базисов в V и в V^* спариваются по правилу

$$\langle x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_n}, e_{m_1} \wedge \dots \wedge e_{m_n} \rangle = \begin{cases} 1/n! & \text{если } (i_1, \dots, i_n) = (j_1, \dots, j_n) \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (3-20)$$

где оба набора индексов строго возрастают: $i_1 < \dots < i_n$ и $j_1 < \dots < j_n$.

Предложение 3.1 (принцип Аронгольда)

Над полем характеристики нуль пространство симметрических тензоров $\text{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$ линейно порождается тензорами $v^{\otimes n} = v \otimes \dots \otimes v$, где $v \in V$, а пространство однородных многочленов $S^n V^*$ — многочленами φ^n , где $\varphi \in V^*$.

Доказательство. Двойственное к $\text{Sym}^n V$ пространство канонически изоморфно пространству симметричных n -линейных форм $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$. Если такая форма $\tilde{f}$ зануляется на всех наборах $(v, \dots, v)$, то многочлен $f \in S^n V^*$, поляризацией которого она является, задаёт тождественно нулевую функцию $f: V \rightarrow \mathbb{k}$, откуда $f = 0$, а значит и $\tilde{f} = 0$. Тем самым, линейная оболочка тензоров $v^{\otimes n}$ не лежит ни в какой гиперплоскости пространства $\text{Sym}^n V$, что доказывает первое утверждение. Второе следует из первого, поскольку при изоморфизме $\text{Sym}^n V^* \simeq S^n V^*$ тензоры $\varphi^{\otimes n}$ переходят в многочлены φ^n . $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 3.4 (усиленный принцип Аронгольда). В условиях [предл. 3.1](#) для любого ненулевого многочлена $f \in S^n V^*$ покажите, что пространство $\text{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$ линейно порождается тензорами $v^{\otimes n}$ с $f(v) \neq 0$.

3.1.4. Линейный носитель (грассманова) многочлена. Линейным носителем многочлена $f \in S^n V^*$ (соотв. грассманова многочлена $\omega \in \Lambda^n V$) называется наименьшее такое подпространство $U \subset V^*$ (соотв. $W \subset V$), что $f \in S^n U$ (соотв. $\omega \in \Lambda^n W$). Над полем характеристики нуль носитель многочлена совпадает с носителем его полной поляризации: $\text{supp } f = \text{supp } \tilde{f}$ (соотв. $\text{supp } \omega = \text{supp } \tilde{\omega}$) и может быть найден при помощи [теор. 3.1](#) на стр. 40, причём в силу симметричности тензора $\tilde{f} \in \text{Sym}^n V^*$ (соотв. знакопеременности тензора $\tilde{\omega} \in \text{Alt}^n V$) образ полной свёртки

$$f_J: V^{\otimes(n-1)} \rightarrow V^*, \quad \tau \mapsto c_{1, \dots, (n-1)}^{j_1, \dots, j_{n-1}}(\tilde{f} \otimes \tau), \quad (3-21)$$

сворачивающей все $n-1$ сомножителей тензора $\tau \in V^{\otimes(n-1)}$ с какими-то $n-1$ сомножителями с тензора $\tilde{f}$, как и образ полной свёртки

$$\omega_J: V^{*\otimes(n-1)} \rightarrow V, \quad \eta \mapsto c_{j_1, \dots, j_{n-1}}^{1, \dots, (n-1)}(\eta \otimes \omega), \quad (3-22)$$

сворачивающей все $n-1$ сомножителей тензора $\eta \in V^{*\otimes(n-1)}$ с какими-то $n-1$ сомножителями с тензора $\tilde{\omega}$ не зависят от выбора последовательности J номеров сворачиваемых $n-1$ сомножителей у тензоров $\tilde{f}$ и $\tilde{\omega}$. Таким образом, линейный носитель $\text{supp } f \subset V^*$ обычного многочлена $f \in S^n V^*$ и линейный носитель $\text{supp } \omega = \text{supp } \tilde{\omega}$ грассманова многочлена $\omega \in \Lambda^n V$ совпадают, соответственно, с образами отображений (3-21) и (3-22) полной свёртки по *первым* $n-1$ тензорным сомножителям $J = \{1, \dots, n-1\}$.

3.1.5. Многочлены с минимальным (одномерным) носителем. Если записать многочлен f в виде

$$f = \sum_{v_1 \dots v_d} \frac{n!}{v_1! \dots v_d!} a_{v_1 \dots v_d} x_1^{v_1} \dots x_d^{v_d}, \quad (3-23)$$

то его полная поляризация, согласно форм. (3-15) на стр. 42, будет иметь вид

$$\tilde{f} = \sum_{v_1 \dots v_d} a_{v_1 \dots v_d} x_{[v_1 \dots v_d]},$$

где $x_{[v_1 \dots v_d]} \in \text{Sym}^n V^*$ — сумма всех тензорных мономов, содержащих v_i сомножителей x_i для всех $i = 1, \dots, d$. Образ полной свёртки (3-21) порождается $\binom{n+d-2}{d-1}$ линейными формами

$$\varphi_{m_1 \dots m_d}(x) = \tilde{f}(e_1^{m_1}, \dots, e_d^{m_d}, x) = \sum_{i=1}^d a_{m_1 \dots m_{i-1}(m_i+1)m_{i+1} \dots m_d} x_i, \quad (3-24)$$

где $m_1 + \dots + m_d = n - 1$ и все $m_i \geq 0$, а $x = (x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^d x_i e_i \in V$.

Предложение 3.2 (многочлены с одномерным носителем)

Однородный многочлен (3-23) над полем характеристики нуль пропорционален чистой n -й степени линейной формы, если и только если $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$ -матрица из коэффициентов линейных форм (3-24) имеет ранг 1, и в этом случае в качестве таковой формы можно взять любую из форм (3-24).

Доказательство. Если $f = \lambda \varphi^n$, где $\lambda \in \mathbb{k}$, $\varphi \in V^*$, то $\text{supp } f$ одномерен и порождается формой φ , а все формы (3-24) пропорциональны форме φ . Наоборот, если все формы (3-24) пропорциональны некоторой форме $\psi \in V^*$, то $\text{supp } f = \mathbb{k} \psi$ и $f = \lambda \psi^n$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{k}$. $\square$

Пример 3.2 (опять кривая Веронезе)

При $d = 2$ для однородной бинарной формы n -й степени

$$f(x_0, x_1) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \binom{n}{k} \cdot x_0^k x_1^{n-k}$$

получаем ровно n линейных форм (3-24):

$$\varphi_k(x) = f(e_0^k, e_1^{n-k-1}, x) = a_{k+1} x_0 + a_k x_1, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

и заключаем, что форма f пропорциональна форме вида $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n$, если и только если

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = 1,$$

что выражается системой квадратичных уравнений

$$\det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ a_{i+1} & a_{j+1} \end{pmatrix} = 0$$

на коэффициенты a_i многочлена f . Например, кубика Веронезе в $\mathbb{P}_3$ с однородными координатами $(a_0 : \dots : a_3)$ представляет собой пересечение трёх квадратиков:

$$a_0 a_2 = a_1^2, \quad a_0 a_3 = a_1 a_2, \quad a_2^2 = a_1 a_3,$$

каждые две из которых пересекаются по объединению кривой Веронезе и общей для обеих квадратиков прямолинейной образующей.

Упражнение 3.5. Убедитесь в этом.

3.1.6. Грассмановы многочлены с минимальным носителем. В отличие от обычных многочленов, размерность носителя однородного грассманова многочлена ограничена снизу его степенью.

УПРАЖНЕНИЕ 3.6. Пусть $\dim U = m$ и $\omega \in \Lambda U$ — ненулевой грассманов многочлен. Убедитесь, что а) если $\omega \in \Lambda^n U$, то $\dim \text{supp } \omega \geq n$ б) $\omega \in \Lambda^m U$ тогда и только тогда, когда $v \wedge \omega = 0$ для всех $v \in V$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3 (ГРАССМАНОВЫ МНОГОЧЛЕНЫ С МИНИМАЛЬНЫМ НЕНУЛЕВЫМ НОСИТЕЛЕМ)

Следующие три условия на грассманов многочлен

$$\omega = \sum_I a_I e_I = \sum_{i_1 < \dots < i_n} a_{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}, \quad (3-25)$$

где $I = (i_1, \dots, i_n)$ пробегает возрастающие последовательности из n индексов, эквивалентны:

- 1) $\dim \text{supp } \omega \leq n$ 2) $\omega = u_1 \wedge \dots \wedge u_n$, где $u_1, \dots, u_n \in V$ 3) $\forall u \in \text{supp } \omega \ u \wedge \omega = 0$
- 4) для любых двух наборов I, J возрастающих индексов $i_1 < \dots < i_{m+1}$ и $j_1 < \dots < j_{m-1}$, таких, что $I \not\supset J$, выполнены соотношения Плюккера

$$\sum_{v=1}^{m+1} (-1)^{v-1} \tilde{a}_{j_1 \dots j_{m-1} i_v} a_{i_1 \dots \hat{i}_v \dots i_{m+1}} = 0, \quad (3-26)$$

где «крышка» в $a_{i_1 \dots \hat{i}_v \dots i_{m+1}}$ означает, что индекс i_v следует пропустить.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия (1), (2) и (3) очевидно эквивалентны и означают, что ω лежит в старшей внешней степени $\Lambda^{\dim \text{supp } \omega}$ своей линейной оболочки $\text{supp } \omega$. Полной поляризацией грассманова многочлена (3-25) является знакопеременный тензор

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{n!} \sum_I a_I \langle e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} \rangle = \sum_{i_1, \dots, i_n} \tilde{a}_{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}, \quad (3-27)$$

где справа суммирование идёт уже по всем последовательностям из n не повторяющихся индексов, а коэффициенты $\tilde{a}_{i_1 \dots i_n}$ кососимметричны по $i_1, \dots, i_n$ и $\tilde{a}_{i_1 \dots i_n} = a_{i_1 \dots i_n} / n!$ когда индексы строго возрастают. Подпространство $\text{supp}(\tilde{\omega}) \subset V$ является образом полной свёртки

$$c_{\tilde{\omega}} : V^{*\otimes(n-1)} \rightarrow V$$

с тензором $\tilde{\omega} \in V^{\otimes n}$ по первым $n - 1$ тензорным сомножителям и линейно порождается векторами

$$w_J = c_{\tilde{\omega}}(x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_{n-1}}) = \sum_{i \notin J} \tilde{a}_{j_1 \dots j_{n-1} i} e_i, \quad (3-28)$$

где $J = (j_1, \dots, j_{n-1})$ пробегает возрастающие последовательности из $n - 1$ индексов. Соотношение (3-26) констатирует обнуление коэффициента при $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{m+1}}$ в произведении $w_J \wedge \omega$ для линейно порождающих $\text{supp } \omega$ векторов w_J из формулы (3-28). $\square$

ПРИМЕР 3.3 (соотношение Плюккера для $\Lambda^2 \mathbb{K}^4$)

Для четырёхмерного пространства V с базисом $e_1, \dots, e_4$ и $\omega = \sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j$ соотношение Плюккера для наборов индексов $I = (2, 3, 4)$ и $J = (1)$ имеет вид $-a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23} = 0$, и любой другой выбор непересекающихся наборов (i_1, i_2, i_3) и (j) приводит к тому же самому с точностью до общего знака соотношению. Если $j \in \{i_1, i_2, i_3\}$, скажем $I = (1, 2, 3)$, $J = (1)$, то получается тривиальное соотношение $a_{12}a_{13} - a_{13}a_{12} = 0$.

Предложение 3.4

Если $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, то однородный грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^2 V$ тогда и только тогда разложим в произведение $u \wedge w$ двух векторов $u, w \in V$, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

Доказательство. Если $\omega = u \wedge w$, то $\omega \wedge \omega = u \wedge w \wedge u \wedge w = 0$. Чтобы получить обратное, перейдём к базису Дарбу¹ $e_1, \dots, e_d$ в V , где $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots$. Если ω неразложим, то в этой сумме есть хотя бы два слагаемых, и тогда базисный моном $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ войдёт в $\omega \wedge \omega$ с коэффициентом 2, и тем самым $\omega \wedge \omega \neq 0$, если $2 \neq 0$. $\square$

Пример 3.4 (соотношения Пюккера для $\Lambda^2 \mathbb{k}^5$)

Если $V = \mathbb{k}^5$ с базисом $e_1, \dots, e_5$, то по [предл. 3.4](#) разложимость грассмановой квадратичной формы $\omega = \sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2 V$ равносильна равенству $\omega \wedge \omega = 0$. Поскольку $\omega \wedge \omega$ лежит в пятимерном пространстве $\Lambda^4 \mathbb{k}^5$, это равенство эквивалентно пяти квадратичным соотношениям на коэффициенты a_{ij} формы ω . Эти пять соотношений совпадают с пятью соотношениями Пюккера, возникающими из пяти пар непересекающихся наборов индексов $I = (i_1, i_2, i_3)$ и $J = (j)$, объединения которых $I \sqcup J$ пробегает пять различных четырёхэлементных подмножеств в $\{1, \dots, 5\}$. При фиксированном $I \sqcup J$ четыре различных разбиения этого множества на непересекающиеся поднаборы из одного и трёх элементов дают, как и в предыдущем [прим. 3.3](#), одинаковые с точностью до общего знака соотношения вида

$$\tilde{a}_{i_1 j} a_{i_2 i_3} - \tilde{a}_{i_2 j} a_{i_1 i_3} + \tilde{a}_{i_3 j} a_{i_1 i_2} = 0.$$

При $j = i_1 \in \{i_1, i_2, i_3\}$ получается тривиальное соотношение $a_{i_1 i_2} a_{i_1 i_3} - a_{i_1 i_3} a_{i_1 i_2} = 0$.

3.2. Грассманианы. Множество всех m -мерных векторных подпространств d -мерного векторного пространства V называется *грассманианом* $\text{Gr}(m, d)$ или $\text{Gr}(m, V)$, если важно подчеркнуть природу пространства V . С проективной точки зрения грассманиан $\text{Gr}(m, d)$ есть множество $(m-1)$ -мерных проективных подпространств в $\mathbb{P}_{d-1}$. Грассманианы являются естественными обобщениями проективных пространств: двойственные пространства

$$\mathbb{P}_n = \text{Gr}(1, n+1) \quad \text{и} \quad \mathbb{P}_n^\times = \text{Gr}(n, n+1)$$

служат простейшими примерами грассманианов. Двойственность $U \leftrightarrow \text{Ann } U$ между m -мерными и $(d-m)$ -мерными подпространствами двойственных векторных пространств V и V^* задаёт каноническое отождествление $\text{Gr}(m, V) = \text{Gr}(d-m, V^*)$.

3.2.1. Пюккеро вложение. Грассманиан $\text{Gr}(m, V)$ вкладывается в $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ отображением Пюккера

$$p_m : \text{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V), \quad (3-29)$$

которое переводит m -мерное векторное подпространство $U \subset V$ в одномерное векторное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$. Если векторы $u_1, \dots, u_m$ образуют базис в U , то $p_m(U) = u_1 \wedge \dots \wedge u_m$. Выбор другого базиса $w_1, \dots, w_m$ из векторов $w_i = \sum_j a_{ij} u_j$ заменяет $u_1 \wedge \dots \wedge u_m$ на пропорциональный разложимый грассманов многочлен $w_1 \wedge \dots \wedge w_m = \det(a_{ij}) u_1 \wedge \dots \wedge u_m$.

Предложение 3.5

Отображение Пюккера (3-29) инъективно, а его образ является алгебраическим многообразием, задаваемым квадратичными соотношениями Пюккера из [предл. 3.3](#).

¹См. пример 14.5 на стр. 230 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2425/lec_14.pdf.

Доказательство. Образ отображения (3-29) состоит из всех разложимых грассмановых многочленов степени m и описывается в [предл. 3.3](#) на стр. 45. Покажем, что отображение Плюккера инъективно. Пусть $U \neq W$ и $\dim U \cap W = r < m$. Тогда в V есть базис из таких векторов

$$e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_s, v_1, \dots, v_t,$$

где $s = m - r$, что векторы $e_1, \dots, e_r$ образуют базис в $U \cap W$, а наборы векторов

$$e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_s \quad \text{и} \quad e_1, \dots, e_r, w_1, \dots, w_s$$

являются базисами в U и в W . Отображение Плюккера сопоставляет им разные базисные мономы $e_1 \wedge \dots \wedge e_r \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_s$ и $e_1 \wedge \dots \wedge e_r \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_s$ пространства $\Lambda^m V$. $\square$

3.2.2. Однородные координаты на грассманиане обобщают однородные координаты на проективном пространстве. Если зафиксировать в V базис $e_1, \dots, e_d$, то m -мерное подпространство $U \subset V$ можно задавать матрицей X_u размера $d \times m$, по строкам которой записаны координаты векторов $u_1, \dots, u_m$ какого-нибудь базиса u в U . Разумеется, такое представление не единственно: другому базису w в U , составленному из векторов $w_1, \dots, w_m$, отвечает другая матрица $X_w = C_{wu} X_u$, получающаяся из X_u умножением слева на невырожденную квадратную $m \times m$ -матрицу перехода, которая определяется соотношением

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = C_{wu} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

Мы заключаем, что грассманиан $\text{Gr}(m, d) = \text{GL}_m(\mathbb{k}) \backslash \text{Mat}_{m \times d}^{\circ}(\mathbb{k})$ является множеством орбит левого действия группы $\text{GL}_m(\mathbb{k})$ на множестве $\text{Mat}_{m \times d}^{\circ}(\mathbb{k})$ матриц размера $m \times d$ и ранга m . При $m = 1$ это описание превращается в описание проективного пространства $\mathbb{P}_{d-1}$ как множества ненулевых координатных строк длины d с точностью до умножения на ненулевые константы. Таким образом, матрица X_u с точностью до умножения слева на обратимые матрицы является прямым аналогом однородных координат.

3.2.3. Плюккеревы координаты. Плюккерovo вложение $p_m : \text{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ сопоставляет m -мерному подпространству $U \subset V$ с базисом $u_1, \dots, u_m$ одномерное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$ с базисом $u_1 \wedge \dots \wedge u_m$. Если зафиксировать в V базис $e_1, \dots, e_d$, а в $\Lambda^m V$ — базис из грассмановых мономов $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$, то I -й однородной координатой разложимого грассманова многочлена $u_1 \wedge \dots \wedge u_m$ относительно базиса из мономов e_I будет I -й минор $\det X_I$ порядка m , где $X_I \subset X$ — подматрица, образованная столбцами с номерами $i_1, \dots, i_m$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.7. Убедитесь в этом.

При умножении матрицы X слева на обратимую матрицу $C \in \text{GL}_m$ все $(m \times m)$ -миноры $\det X_I$ матрицы X умножаются на ненулевую константу $\det C$. Рассматриваемый с точностью до пропорциональности набор миноров $\det X_I$ называется *плюккеревыми координатами* задаваемой матрицей X точки грассманиана $\text{Gr}(m, d)$. Таким образом, плюккеревы координаты суть ограничения однородных координат в $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ на образ грассманиана при плюккеревом вложении $p_m : \text{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$.

3.2.4. Стандартное аффинное покрытие и аффинные координаты. Аналогом i -й стандартной аффинной карты U_i проективного пространства¹ $\mathbb{P}_n = \text{Gr}(1, n)$ на произвольном грассманиане $\text{Gr}(m, d)$ является множество U_I всех $m \times d$ матриц X с ненулевым минором $\det X_I$. В $\text{GL}_m(\mathbb{k})$ -орбите каждой такой матрицы X есть единственный представитель, имеющий в столбцах I единичную матрицу размера $m \times m$. Обозначим его $T^{(I)} \triangleq X_I^{-1}X$. Стоящие вне столбцов с номерами из I матричные элементы $t_{\mu\nu}^{(I)}$ матрицы $T^{(I)}$ называются *локальными аффинными координатами* точки $X \in \text{Gr}(m, d)$ в стандартной карте U_I , и всего их имеется $m(d - m)$. Плюккерово вложение $p_m : \text{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ биективно отображает карту $U_I \subset \text{Gr}(m, V)$ на пересечение образа $p_m(\text{Gr}(m, V))$ со стандартной аффинной картой $U_I \subset \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ на проективном пространстве.

На геометрическом языке карта $U_I \subset \text{Gr}(m, V)$ состоит из всех подпространств $U \subset V$, которые изоморфно отображаются на I -е координатное подпространство $E_I \subset V$, натянутое на базисные векторы $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$, при проекции $\pi_I : V \rightarrow E_I$ вдоль дополнительного координатного подпространства $E_J \subset V$, натянутого на базисные векторы e_j с $j \notin I$. Подпространство $U \subset V$ лежит в стандартной карте U_I если и только если $U \cap E_J = 0$, и в каждом таком подпространстве U имеется единственный базис $u_1, \dots, u_m$, который проектируется в стандартный базис $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$ пространства E_I . Матрица $T^{(I)}$ составлена из координат этих векторов u_i .

3.2.5. Аффинная окрестность точки. Более общим образом, для любого $(d - m)$ -мерного векторного подпространства $W \subset V$ множество $U_W = \{U \in \text{Gr}(m, V) \mid U \cap W = 0\}$ является аффинным пространством над векторным пространством $\text{Hom}(V/W, W)$. В самом деле, любые два дополнительных к W подпространства U_1, U_2 изоморфно проектируются на V/W при факторизации $\pi_W : V \rightarrow V/W$. Поэтому у каждого класса $[v] = [v_1] = [v_2] \in V/W$ имеются единственные представители $v_1 \in U_1$ и $v_2 \in U_2$. Обозначая через $\overline{U_1 U_2} : V/W \rightarrow W$ линейное отображение, переводящее класс $[v] \in V/W$ в разность $v_2 - v_1 \in W$ этих представителей, мы сопоставляем каждой паре точек $U_1, U_2 \in U_W$ вектор $\overline{U_1 U_2} \in \text{Hom}(V/W, W)$. Очевидно, что $\overline{U_1 U_2} + \overline{U_2 U_3} = \overline{U_1 U_3}$ для всех $U_1, U_2, U_3 \in U_W$. Если зафиксировать любое «начальное» подпространство $U \in U_W$ и отождествить его с V/W при помощи изоморфизма $\pi_W|_U : U \xrightarrow{\sim} V/W$, а $\text{Hom}(V/W, W)$ отождествить с $\text{Hom}(U, W)$, то отображение векторизации с центром в U , переводящее каждую точку $U_1 \in U_W$ в её радиус вектор $\overline{U U_1} \in \text{Hom}(U, W)$, будет сопоставлять каждому дополнительному к W подпространству $U_1 \subset U \oplus W$ линейное отображение $U \rightarrow W$, графиком которого является подпространство U_1 . Очевидно, что такое сопоставление биективно. Поскольку $W \simeq V/U$, можно сказать, что каждая точка $U \in \text{Gr}(m, V)$ обладает аффинной окрестностью, получающейся «откладыванием» от U всевозможных векторов из пространства $\text{Hom}(U, V/U)$. Если зафиксировать какое-нибудь дополнительное к U подпространство W и представлять классы из V/U векторами из W , то результатом «откладывания» от U отображения $\tau : U \rightarrow W$ будет график $\Gamma_\tau = \{(u, \tau(u)) \in U \oplus W \mid u \in U\}$ отображения τ , представляющий собою дополнительное к W подпространство в $V = U \oplus W$.

3.2.6. Клеточное разбиение. Метод Гаусса показывает, что любое подпространство $U \subset V$ обладает *единственным* базисом $\{u_1, \dots, u_m\}$, матрица координат которого имеет *строгий*

¹Она состоит из всех точек $(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n$ с $x_i \neq 0$. Каждая такая точка p однозначно представляется вектором, у которого $x_i = 1$, и остальные n координат этого вектора берутся в качестве локальных аффинных координат точки p в карте U_i , см. пример 16.4 на стр. 207 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_16.pdf.

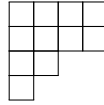
ступенчатый вид¹.

УПРАЖНЕНИЕ 3.8. Докажите, что различные строго ступенчатые матрицы задают разные подпространства в V .

Таким образом возникает биекция между точками грассманиана $\text{Gr}(m, d)$ и строгими ступенчатыми матрицами ранга m и размера $m \times d$. Строгие ступенчатые матрицы, ступеньки которых располагаются в столбцах с возрастающими номерами $I = (i_1, \dots, i_m)$, образуют аффинное пространство размерности

$$m(d - m) - \sum_{v=1}^m (i_v - v) = \dim \text{Gr}(m, d) - \left(|I| - \frac{m(m+1)}{2} \right).$$

Весь грассманиан $\text{Gr}(m, d)$ является дизъюнктивным объединением $\binom{d}{m}$ таких аффинных пространств, отвечающих различным выборам I . Эти аффинные пространства называются *открытыми* или *аффинными клетками Шуберта*. Альтернативным общепринятым способом нумерации клеток Шуберта является их индексация диаграммами Юнга² $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, уместающимися в прямоугольнике $m \times (d - m)$. При этом длина v -той сверху строки λ_v указывает на сколько клеток самый левый ненулевой элемент в v -той снизу строке ступенчатой матрицы сдвинут вправо от самого левого возможного своего положения, т. е. углы ступенек в матрице типа $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ находятся в столбцах с номерами $i_v = (m+1-v) + \lambda_{m+1-v}$. Открытая клетка Шуберта, отвечающая диаграмме λ , обозначается σ_λ . Обратите внимание, что коразмерность такой клетки в грассманиане в точности равна количеству клеток $|\lambda|$ в диаграмме λ . Например, диаграмма



отвечает 13-мерной аффинной клетке Шуберта $\sigma_{4,4,2,1}^\circ \text{Gr}(4, 10)$, образованной подпространствами $U \subset \mathbb{K}^{10}$, порождёнными строками строгих ступенчатых матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}.$$

Пустой диаграмме $(0, 0, 0, 0)$ отвечает самое левое из всех возможных положений ступенек, т. е. 24-мерное пространство матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

¹Т. е. самый левый ненулевой элемент каждой строки равен единице, располагается строго правее, чем в предыдущей строке, и является единственным ненулевым элементом в своём столбце.

²Т. е. выровненных по левому краю горизонтальных клетчатых полосочек, длины которых образуют невозрастающую сверху вниз последовательность $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$.

представляющее собою стандартную аффинную карту $U_{(1,2,3,4)} \subset \text{Gr}(4, 10)$). Самая большая диаграмма — прямоугольник $(6, 6, 6, 6)$ — описывает нульмерное аффинное пространство, ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с самым правым из возможных расположением ступенек. Над конечным полем $\mathbb{k}$ из q элементов разбиение $\text{Gr}(m, d) = \bigsqcup \check{\sigma}_\lambda$ влечёт формулу

$$\binom{d}{m}_q = q^m(d-m) \sum_{\lambda} q^{-|\lambda|},$$

где суммирование происходит по всем диаграммам Юнга, уместящимся в прямоугольнике $m \times (d-m)$, а

$$\binom{d}{m}_q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(q^d - 1)(q^d - q) \cdots (q^d - q^{m-1})}{(q^m - 1)(q^d - q) \cdots (q^m - q^{m-1})}$$

обозначает Гауссов q -биномиальный коэффициент.

3.3. Рабочий пример: квадрика Плюккера в $\mathbb{P}_5$ и прямые в $\mathbb{P}_3$. Первым отличным от проективного пространства грассманианом является $\text{Gr}(2, 4)$, точками которого служат двумерные векторные подпространства U в $V = \mathbb{k}^4$ или, что то же самое, проективные прямые $\ell = \mathbb{P}(U)$ в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$. Грассманиан $\text{Gr}(2, 4)$ вкладывается в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ отображением Плюккера

$$p : \text{Gr}(2, 4) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V), \quad U \mapsto \Lambda^2 U, \quad (3-30)$$

которое переводит прямую $(ab) \subset \mathbb{P}_3$, являющуюся проективизацией двумерного векторного подпространства $U \subset V$ с базисом a, b , в одномерное подпространство $\Lambda^2 U \subset \Lambda^2 V$, порождённое грассмановым произведением $a \wedge b$. Согласно [предл. 3.4](#) на стр. 46, разложимость грассмановой квадратичной формы $\omega \in \Lambda^2 V$ на два линейных множителя равносильна тому, что $\omega \wedge \omega = 0$. Это соотношение задаёт в пространстве $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ квадрику Плюккера

$$P = V(q) = \{\omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0\}, \quad (3-31)$$

Симметричная билинейная форма $\tilde{q} : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \rightarrow \mathbb{k}$, которая является поляризацией уравнения этой квадрики, однозначно с точностью до пропорциональности определяется тем, что для всех $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^2 V$ в одномерном векторном пространстве $\Lambda^4 V$ выполняется равенство

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{q}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad (3-32)$$

где e_1, e_2, e_3, e_4 — произвольный базис в V .

УПРАЖНЕНИЕ 3.9. Убедитесь, что задаваемая равенством (3-32) форма $\tilde{q}$ билинейна, симметрична, невырождена и при выборе другого базиса в V умножается на ненулевую константу.

Напишите её матрицу Грама в стандартном базисе из мономов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$.

В координатах x_{ij} относительно стандартного базиса $e_{ij} = e_i \wedge e_j$, равенство $\omega \wedge \omega = 0$ для формы $\omega = \sum_{ij} x_{ij} e_{ij}$ имеет вид¹ $x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0$, а отображение (3-30) переводит прямую (ab) , порождённую векторами a, b , строки координат которых в базисе $e_1, \dots, e_4$

¹См. [прим. 3.3](#) на стр. 45.

составляют 2×4 матрицу $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, в грассманову квадратичную форму $a \wedge b$ с координатами $x_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$.

ЛЕММА 3.1

Две прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$ пересекаются если и только если их плюккеровы образы ортогональны относительно квадратичной формы (3-32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$, то в V существует такой базис e_1, e_2, e_3, e_4 , что $\ell_1 = (e_1 e_2)$, а $\ell_2 = (e_3 e_4)$. Тогда $p(\ell_1) \wedge p(\ell_2) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$. Если ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке a , то $\ell_1 = (ab)$, а $\ell_2 = (ac)$ для некоторых $b, c \in V$, и $p(\ell_1) \wedge p(\ell_2) = a \wedge b \wedge a \wedge c = 0$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3.1

$P \cap T_p P = \{p(\ell') \mid \ell' \cap \ell \neq \emptyset\}$ для любой точки $p = p(\ell) \in P$.

3.3.1. Связки и пучки прямых в $\mathbb{P}_3$. Множество прямых в $\mathbb{P}_3$ называется *связкой*, если его плюккеров образ является двумерной плоскостью. Каждая такая плоскость $\pi \subset P$ линейно порождается тройкой неколлинеарных точек $a_i = p(\ell_i)$, $i = 1, 2, 3$. При этом

$$\pi = T_{a_1} P \cap T_{a_2} P \cap T_{a_3} P \subset P.$$

По лем. 3.1 и сл. 3.1 соответствующая связка прямых состоит из всех прямых, пересекающих каждую из трёх попарно пересекающихся прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 в $\mathbb{P}_3$. Три прямые в $\mathbb{P}_3$ попарно пересекаются ровно в двух случаях: когда они лежат в одной плоскости или когда они проходят через одну точку. Таким образом, есть два геометрически разных типа связок прямых на $\mathbb{P}_3$:

α -плоскость $\pi_\alpha(c) \subset P$, состоящая из всех прямых, проходящих через данную точку $c \in \mathbb{P}_3$

β -плоскость $\pi_\beta(\Pi) \subset P$, состоящая из всех прямых, лежащих в данной плоскости $\Pi \subset \mathbb{P}_3$.

Эти два семейства плоскостей на квадрике P таковы, что любые две плоскости одного типа пересекаются по точке: $\pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) = p(\Pi_1 \cap \Pi_2)$, $\pi_\alpha(c_1) \cap \pi_\alpha(c_2) = p((c_1 c_2))$, а две плоскости $\pi_\beta(\Pi)$, $\pi_\alpha(c)$ разных типов не пересекаются при $c \notin \Pi$, а при $c \in \Pi$ пересекаются по прямой

$$\lambda(c, \Pi) = \{p(\ell) \in P \mid c \in \ell \subset \Pi\}, \quad (3-33)$$

которая является плюккеровым образом пучка прямых, лежащих в плоскости Π и проходящих через точку $c \in \Pi$. Покажем, что все лежащие на квадрике P прямые имеют вид (3-33). Для этого рассмотрим конус $C = P \cap T_a P$ с вершиной в точке $a \in P$, образованный всеми проходящими через a прямыми, лежащими на P , и зафиксируем любое не проходящее через a трёхмерное проективное подпространство $H \subset T_a P$, см. рис. 3-4 на стр. 52. Пересечение $G = C \cap H$ является гладкой 1-планарной кватрикой в H , и любая проходящая через a прямая на P имеет вид $(ab) = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$ для некоторой точки $b \in G$ и плоскостей π_α, π_β натянутых на точку p и пару проходящих через b прямолинейных образующих кватрики G .

3.3.2. Клеточное разбиение плюккеровой квадрики. Зафиксируем какую-нибудь дополнительную к точке $p \in P$ трёхмерную гиперплоскость $H \subset T_p P$ в четырёхмерном касательном пространстве $T_p P$ к квадрике Плюккера $P \subset \mathbb{P}_5$. Особая квадрика $C = P \cap T_p P$ представляет собой простой конус с вершиной p над неособой квадратикой $G = H \cap P$, изоморфной квадрике Сегре в $\mathbb{P}_3$. Это приводит к следующей стратификации плюккеровой квадрики замкнутыми подмножествами:

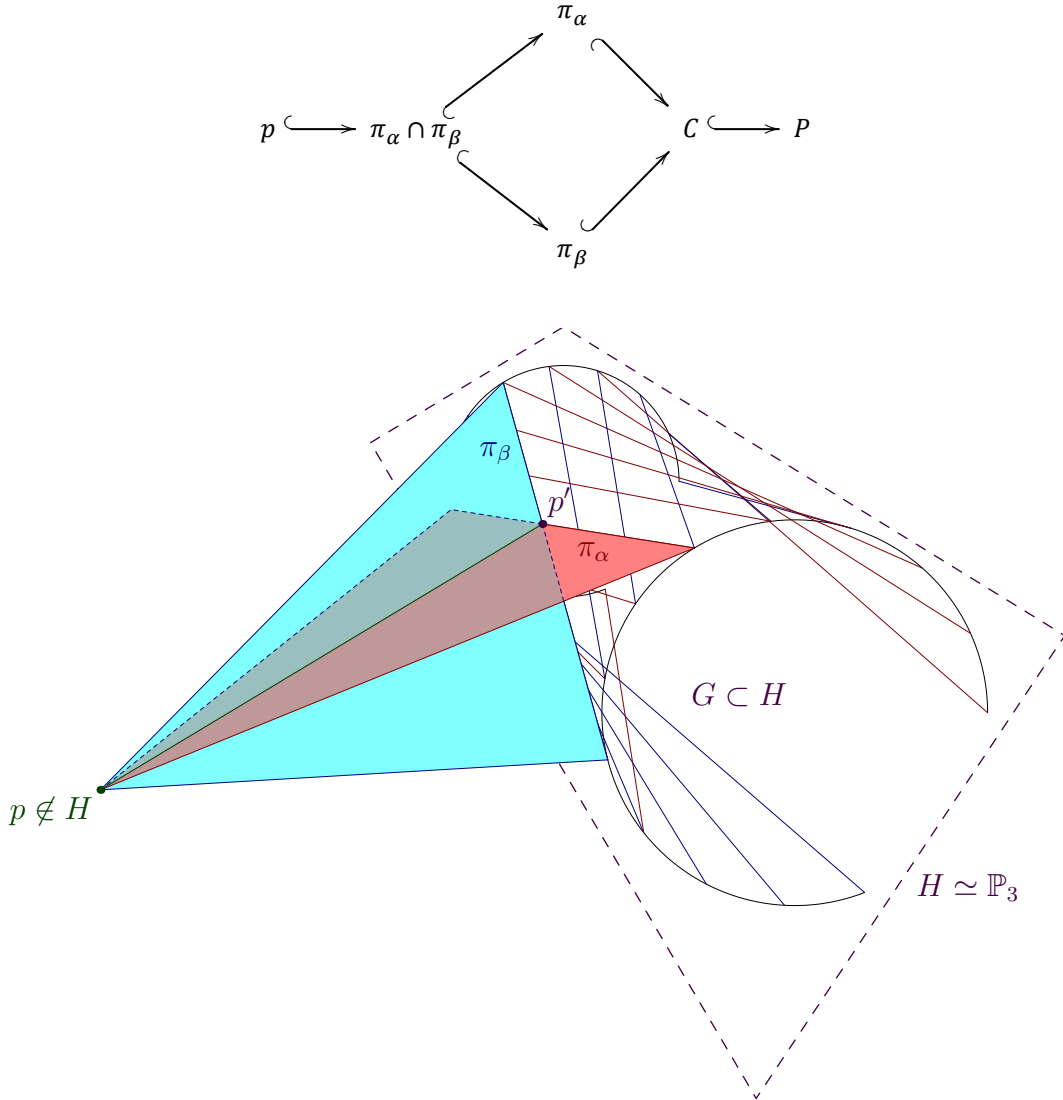


Рис. 3◊1. Конус $C = P \cap T_p P$.

Открытые подмножества этих стратов, дополнительные к объединению стратов меньшей размерности, задают дизъюнктное разбиение плюккеровой квадрики P на открытые клетки, естественно изоморфные аффинным пространствам:

$$\mathrm{Gr}(2, 4) = \mathbb{A}^0 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \left(\begin{array}{c} \mathbb{A}^2 \\ \sqcup \\ \mathbb{A}^2 \end{array} \right) \sqcup \mathbb{A}^3 \sqcup \mathbb{A}^4.$$

В самом деле, сначала мы имеем проективную прямую без точки: $(\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \setminus p \simeq \mathbb{A}^1$. Затем возникает пара проективных плоскостей без проективной прямой:

$$\pi_\alpha \setminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \simeq \pi_\beta \setminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \simeq \mathbb{A}^2.$$

Далее идут аффинный конус над дополнением квадраки Сегре до пары прямых, отсекаемых из неё касательной плоскостью

$$C \setminus (\pi_\alpha \cup \pi_\beta) \simeq \mathbb{A}^1 \times \left(G \setminus (G \cap T_p, G) \right),$$

и открытое плотное подмножество $P \setminus T_p P \simeq \mathbb{A}^4$ квадраки P , дополнительное к её пересечению с касательной гиперплоскостью в точке p .

УПРАЖНЕНИЕ 3.10. Покажите, что проекция гладкой квадраки $Q \subset \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \in Q$ на произвольную гиперплоскость $H \not\ni p$ задаёт бирациональную биекцию между дополнением $Q \setminus T_p Q$ и аффинным пространством $H \setminus T_p Q \simeq \mathbb{A}^{n-1}$.

3.3.3. Исчисление Шуберта на грассманиане $\text{Gr}(2, 4)$. Аффинные пространства из построенного в п° 3.3.2 разбиения плюккеровой квадраки, являются плюккеровыми образами шести аффинных клеток Шуберта $\sigma_\lambda \subset \text{Gr}(2, 4)$. Их замыкания называются (замкнутыми) *циклами Шуберта* и обозначаются σ_λ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.11. Убедитесь, что в терминах плюккеровой квадраки $P \subset \mathbb{P}_5$ циклы Шуберта грассманиана $\text{Gr}(2, 4)$ суть

$$\begin{aligned} \sigma_{00} &= P \\ \sigma_{22} &= \text{точка } p = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \text{ в } \mathbb{P}_5 \\ \sigma_{10} &= P \cap T_p P \\ \sigma_{11} &= \pi_\alpha(O), \text{ где } O = (0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}_3 \\ \sigma_{20} &= \pi_\beta(\Pi), \text{ где } \Pi = \text{Ann}(x_0) \subset \mathbb{P}_3 \\ \sigma_{21} &= \pi_\alpha(O) \cap \pi_\beta(\Pi). \end{aligned}$$

Над полем $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ циклы Шуберта σ_λ образуют свободный базис $\mathbb{Z}$ -модуля целочисленных гомологий $H_*(\text{Gr}(m, \mathbb{C}^d), \mathbb{Z})$, поскольку построенный по разбиению на клетки Шуберта клеточный цепной комплекс для вычисления гомологий не содержит клеток нечётной (вещественной) размерности и, стало быть, имеет нулевые дифференциалы.

УПРАЖНЕНИЕ 3.12*. Опишите из каких клеток σ_μ состоит замыкание каждой клетки σ_λ и вычислите граничный оператор клеточного цепного комплекса на вещественном грассманиане $\text{Gr}(m, \mathbb{R}^d)$.

Топологическое пересечение циклов задаёт на $\mathbb{Z}$ -модуле $H_*(\text{Gr}(m, \mathbb{C}^d), \mathbb{Z})$ структуру коммутативного кольца, и гомологические классы пересечений циклов Шуберта могут выражаться в виде целочисленных линейных комбинаций таких же циклов. Рецепты для получения таких выражений известны как *исчисление Шуберта* и тесно связаны с комбинаторикой разбиений¹. На простейшем грассманиане $\text{Gr}(2, 4)$ исчисление Шуберта описывается вполне наглядно.

¹См. книги: У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к...* (МЦНМО, 2006), *Теория пересечений* (Мир, 1989); Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии, I* (Мир, 1982); И. Макдоналд, *Симметрические функции и многочлены Холла* (Мир, 1985)

Очевидно, что циклы, суммарная коразмерность которых меньше четырёх, имеют нулевые пересечения. Пересечения циклов дополнительной размерности уже были вычислены нами в н° 3.3.1:

$$\sigma_{10}\sigma_{21} = \sigma_{20}^2 = \sigma_{11}^2 = \sigma_{22} \quad \text{и} \quad \sigma_{20}\sigma_{11} = 0.$$

По тем же причинам $\sigma_{10}\sigma_{20} = \sigma_{10}\sigma_{11} = \sigma_{21}$. Для вычисления σ_{10}^2 реализуем цикл σ_{10} в виде

$$\sigma_{10}(\ell) = P \cap T_{u(\ell)}P = \{\ell'' \subset \mathbb{P}_3 \mid \ell \cap \ell'' \neq \emptyset\}.$$

Тогда σ_{10}^2 гомологичен пересечению $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell')$, которое при общем положении пары прямых ℓ, ℓ' представляет собой неособую квадрику Сегре с рис. 3♦1. Если продеформировать прямую ℓ' так, чтобы она стала пересекаться с прямой ℓ , эта квадрика продеформируется в своём классе гомологий в пару пересекающихся плоскостей: α -связку с центром $O = \ell \cap \ell'$ и β -связку в плоскости Π , натянутой на ℓ и ℓ' : $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell') = \pi_\alpha(O) \cup \pi_\beta(\Pi)$. Таким образом,

$$\sigma_{10}^2 = \sigma_{20} + \sigma_{11}.$$

В качестве приложения мы получаем грубое (топологическое) решение такой задачи:

УПРАЖНЕНИЕ 3.13. Сколько прямых пересекает все четыре заданные попарно непересекающихся прямые в $\mathbb{P}_3$ над полем $\mathbb{C}$? Перечислите все возможные ответы в зависимости от расположения данных четырёх прямых и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям данных прямых.

Если заданные прямые находятся в достаточно общем положении, то ответ даётся коэффициентом при σ_{22} в четырёхкратном самопересечении σ_{10}^4 . Согласно предыдущему,

$$\sigma_{10}^4 = (\sigma_{20} + \sigma_{11})^2 = \sigma_{20}^2 + \sigma_{11}^2 = 2\sigma_{22},$$

т. е. в общем случае есть ровно две такие прямые.

3.4. Многообразия Веронезе и Сегре. Многообразие Веронезе $V(n, k)$ является образом проективного пространства $\mathbb{P}_k = \mathbb{P}(V^*)$ при отображении Веронезе n -той степени

$$v_n : \mathbb{P}(V^*) \rightarrow \mathbb{P}(S^n V^*), \quad \varphi \mapsto \varphi^n, \quad (3-34)$$

и состоит из рассматриваемых с точностью до пропорциональности однородных многочленов степени n от $k + 1$ переменных, пропорциональных чистым n -м степеням линейных форм. Согласно предл. 3.2 на стр. 44 многообразие Веронезе задаётся системой квадратных уравнений, констатирующей обращение в нуль всех 2×2 миноров $(k + 1) \times \binom{n+k-1}{k}$ матрицы, составленной из коэффициентов линейных форм из форм. (3-24) на стр. 44. Согласно принципу Аронгольда¹ многообразие Веронезе не содержится ни в какой гиперплоскости, хотя его размерность обычно много меньше размерности объемлющего пространства.

Многообразие Сегре $S(m_1, \dots, m_n)$ представляет собой образ вложения Сегре

$$s : \mathbb{P}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{m_n} \rightarrow \mathbb{P}_m,$$

переводящего произведение проективных пространств $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$ в пространство $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n)$, отправляя набор одномерных подпространств, порождённых ненулевыми векторами $v_i \in V_i$, в их тензорное произведение, порождённое вектором

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n.$$

¹См. предл. 3.1 на стр. 43.

УПРАЖНЕНИЕ 3.14. Проверьте, что это отображение корректно определено¹ и является вложением.

Так как разложимые тензоры линейно порождают всё пространство $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$, многообразие Сегре не лежит ни в какой гиперплоскости, хотя его размерность обычно тоже сильно меньше размерности объемлющего пространства. По построению, многообразие Сегре заматывается n семействами проективных подпространств размерностей $m_1, \dots, m_n$, где $m_i = d_i - 1$. Квадрика Сегре из п° 2.3 на стр. 28 является простейшим примером такого многообразия.

ПРИМЕР 3.5 (ОПЕРАТОРЫ РАНГА 1)

Для конечномерных векторных пространств U, W каноническое отображение

$$U^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(U, W),$$

сопоставляющее разложимому тензору $\xi \otimes u$ линейное отображение ранга 1

$$\xi \otimes u : U \rightarrow W, \quad u \mapsto \xi(u) \cdot w, \quad (3-35)$$

является изоморфизмом. Таким образом, проективизация множества операторов ранга 1 представляет собою многообразие Сегре $S(m, n) \subset \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\text{Hom}(U, W))$. Если зафиксировать в пространствах U, W какие-нибудь базисы, записать все линейные отображения $U \rightarrow W$ матрицами в этих базисах и использовать матричные элементы a_{ij} в качестве однородных координат на $\mathbb{P}(\text{Hom}(U, W))$, многообразие Сегре будет задаваться в этих координатах системой квадратичных уравнений

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij}a_{\ell k} - a_{ik}a_{\ell j} = 0,$$

констатирующих зануление всех миноров второго порядка. В этих координатах отображение Сегре переводит пару точек с однородными координатами

$$(x_1 : x_2 : \dots : x_n) \quad \text{и} \quad (y_1 : y_2 : \dots : y_n)$$

в точку, однородными координатами которой являются mn всевозможных произведений $x_j y_i$ — матричные элементы произведения $y^t \cdot x$ столбца y на строку x . Два семейства «координатных плоскостей» $\xi \times \mathbb{P}_{m-1}$ и $\mathbb{P}_{n-1} \times w$ при этом перейдут в два семейства проективных пространств, заматающих многообразие Сегре. При $\dim U = \dim W = 2$ мы получаем в точности обсуждавшуюся в п° 2.3 на стр. 28 биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и детерминантной квадрикой Сегре в $\mathbb{P}_3$.

3.4.1. Многообразие Сегре как линейное сечение грассманиана. Рассмотрим сумму

$$W = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$$

конечномерных векторных пространств V_i и для каждого $k \in \mathbb{N}$ и таких целых неотрицательных $m_1, \dots, m_n$, что $0 \leq m_i \leq \dim V_i$ и $\sum_v m_v = k$, обозначим через $W_{m_1, \dots, m_n} \subset \Lambda^k W$ линейную оболочку всевозможных произведений $w_1 \wedge \dots \wedge w_k$ содержащих m_1 сомножителей из пространства V_1 , m_2 сомножителей из пространства V_2 , и т. д.

¹Т. е. тензор $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ отличен от нуля и заменяется на пропорциональный при замене векторов v_i на пропорциональные.

УПРАЖНЕНИЕ 3.15. Убедитесь, что правило $\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_n \mapsto \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$ корректно задаёт изоморфизм векторных пространств $\Lambda^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_n} V_n \simeq W_{m_1, \dots, m_n}$, и докажите, что

$$\Lambda^k W = \bigoplus_{m_1, \dots, m_n} W_{m_1, \dots, m_n} \simeq \bigoplus_{m_1, \dots, m_n} \Lambda^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_n} V_n.$$

Таким образом тензорное произведение $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ канонически отождествляется с векторным подпространством $W_{1, \dots, 1} \subset \Lambda^n W$. Разложимые тензоры $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ переходят при этом отождествлении в разложимые поливекторы $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$, что позволяет отождествить многообразие Сегре $S(m_1, \dots, m_n)$ с сечением грассманиана $\text{Gr}(n, W) \subset \mathbb{P}(\Lambda^n W)$ проективным подпространством $\mathbb{P}(W_{1, \dots, 1}) \subset \mathbb{P}(\Lambda^n W)$. Таким образом, многообразие Сегре задаётся в проективном пространстве $\mathbb{P}(W_{1, \dots, 1})$ системой однородных квадратных уравнений — ограничениями соотношений Плюккера [предл. 3.3](#) на стр. 45 для пространства $\Lambda^n W$ на подпространство $W_{1, \dots, 1} \subset \Lambda^n W$.

3.4.2. Многообразие Сегре как линейное сечение Веронезе. Аналогичную предыдущей конструкцию можно осуществить заменяя внешние степени симметрическими. Пусть, как и выше, $W = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$. Обозначим через $U_{m_1, \dots, m_n} \subset S^k W$ линейную оболочку всевозможных произведений $w_1 \dots w_k$ содержащих m_1 сомножителей из пространства V_1 , m_2 сомножителей из пространства V_2 , и т. д.

УПРАЖНЕНИЕ 3.16. Убедитесь, что правило $v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto v_1 \dots v_n$ корректно задаёт изоморфизм векторных пространств $S^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes S^{m_n} V_n \simeq U_{m_1, \dots, m_n}$, и докажите, что

$$S^k W = \bigoplus_{m_1, \dots, m_n} U_{m_1, \dots, m_n} \simeq \bigoplus_{m_1, \dots, m_n} S^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes S^{m_n} V_n.$$

Тем самым, тензорное произведение $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ канонически отождествляется с векторным подпространством $U_{1, \dots, 1} \subset S^n W$. Разложимые тензоры $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ переходят при этом отождествлении в разложимые на линейные множители многочлены $v_1 \dots v_n$, что позволяет отождествить многообразие Сегре $S(m_1, \dots, m_n)$ с сечением многообразия $V(n, W) \subset \mathbb{P}(S^n W)$ подпространством $\mathbb{P}(U_{1, \dots, 1}) \subset \mathbb{P}(S^n W)$. В частности, многообразие Сегре задаётся в проективном пространстве $\mathbb{P}(U_{1, \dots, 1})$ системой однородных квадратных уравнений — ограничений описанных в [н° 3.1.5](#) на стр. 44 условий на ранг матрицы линейных форм (3-24) со стр. 44.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 3.1. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают $V^{*\otimes n}$ и формула

$$v_{\mathbb{L}}\varphi(w_1, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, \dots, w_{n-1})$$

линейна по v и φ , достаточно проверять её для форм φ , переводимых изоморфизмом (??) в разложимые тензоры вида $\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n$, а для таких форм она очевидна из построения.

Упр. 3.2. Выберем в V такой базис $e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q, w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s$, что векторы e_i образуют базис в $U \cap W$, векторы u_j и w_k дополняют его до базисов в U и W соответственно, а векторы v_m дополняют всё предыдущее до базиса в V . Разложим t по базисным тензорным мономам. Условие $t \in U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$ означает, что в t входят только мономы, не содержащие никаких иных векторов, кроме e_i .

Упр. 3.3. Стабилизатор каждого слагаемого состоит из $\prod_{e \in E} m(e)!$ перестановок одинаковых базисных векторов между собою.

Упр. 3.4. Пусть все тензоры вида $v^{\otimes n}$ с $f(v) \neq 0$ лежат в гиперплоскости $\text{Ann } \psi$, где ψ — линейная форма на $\text{Sym}^n(V)$. Функция $g(v) = \psi(v^{\otimes n})$ является однородным многочленом степени n на V . По условию, многочлен fg тождественно зануляется на V . Тем самым, он нулевой, откуда $g = 0$, так как $f \neq 0$. Тем самым $\psi(v^{\otimes n}) = 0$ для всех $v \in V$, что противоречит [предл. 3.1](#).

Упр. 3.6. Первое очевидно, для доказательства второго выберем в V базис $e_1, \dots, e_m$. Если в разложении ω по базисным мономам есть моном, не содержащий вектора e_i , то $e_i \omega \neq 0$.

Упр. 3.8. Возрастающий набор номеров $I = (i_1, \dots, i_m)$ тех столбцов, в которых располагаются углы ступенек, однозначно восстанавливается по U как лексикографически минимальный набор набор I , такой что U изоморфно проектируется на координатное подпространство E_I вдоль дополнительного координатного подпространства, а строки матрицы — как координаты образов стандартных базисных векторов $e_i \in E_I$ при этой проекции.

Упр. 3.9. Билинейность и невырожденность очевидны, симметричность вытекает из того, что однородные грассмановы многочлены степени два коммутируют друг с другом. Ненулевые элементы матрицы Грама исчерпываются $q_{12,34} = q_{14,23} = 1, q_{13,24} = -1$ и симметричными им.

Упр. 3.10. Каждая прямая, которая проходит через p и не касается Q , пересекает квадрику ещё ровно в одной отличной от p точке, координаты которой, по теореме Виета, рационально зависят от прямой.

Упр. 3.13. Обозначим данные прямые через $\ell_1, \dots, \ell_4$. Множество всех прямых, пересекающих первые три из них, замечает семейство прямолинейных образующих гладкой 1-планарной квадрики Сегре¹ S , проходящей через ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 , причём прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 тоже являются прямолинейными образующими квадрики S , но лежащими в другом, втором семействе. Если прямая ℓ_4 тоже лежит на S , то она также принадлежит второму семейству, и ответом к задаче будет всё первое семейство прямолинейных образующих квадрики S . Если ℓ_4 не лежит на S , но касается S , то ответом к задаче является единственная проходящая через точку касания прямая из первого семейства образующих. Если ℓ_4 трансверсально пересекает S в двух разных точках, то ответом к задаче являются ровно две прямые из первого семейства образующих, проходящие через точки пересечения $\ell_4 \cap S$, и только этот ответ устойчив к малым шевелениям данных прямых $\ell_1, \dots, \ell_4$.

¹См. [н° 2.3](#) на стр. 28.