§5. Аффинная алгебраическая геометрия

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто.

5.1. Аффинный алгебро-геометрический словарик. Аффинные алгебраические многообразия[1], определённые над полем $\Bbbk$, образуют категорию $\mathcal{A}ff_{\Bbbk}$, морфизмами в которой являются *регулярные*[2] отображения, т. е. теоретико-множественные отображение $\varphi : X \to Y$ из многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в многообразие $Y \subset \mathbb{A}^m$, переводящие точку $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ в точку $y = (y_1, \dots, y_m) \in Y$, все координаты которой $y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n) \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ являются многочленами от координат точки x. Функция $f : X \to \Bbbk$ на аффинном алгебраическом многообразии $X \subset \mathbb{A}^n$ называется *регулярной*, если она является ограничением на X какого-нибудь многочлена $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ на объемлющем аффинном пространстве или, что то же самое, задаёт регулярное отображение $f : X \to \mathbb{A}^1$. Регулярные функции на X образуют конечно порождённую *приведённую*[3] $\Bbbk$-алгебру, которая обозначается

$$\Bbbk[X] \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}ff_{\Bbbk}}(X, \Bbbk) \simeq \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X)\,, \tag{5-1}$$

где $I(X) = \{f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \mid f|_X \equiv 0\}$ обозначает идеал всех многочленов, тождественно зануляющихся на X.

Лемма 5.1

Всякая конечно порождённая приведённая алгебра A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ является координатной алгеброй $A = \Bbbk[X]$ некоторого аффинного алгебраического многообразия X.

Доказательство. Зададим алгебру A образующими и соотношениями[4], т. е. представим её как фактор $A = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I$. Приведённость алгебры A означает, что идеал соотношений I *радикален*[5], т. е. для всех $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ и $n \in \mathbb{N}$ равенство $f^n \in I$ возможно только при $f \in I$. Поэтому по сильной теореме о нулях $I = I(V(I))$ является идеалом аффинного алгебраического многообразия $X = V(I) \subset \mathbb{A}^n$. □

5.1.1. Гомоморфизм поднятия. Со каждым отображением множеств $\varphi : X \to Y$ связан *гомоморфизм поднятия*

$$\varphi^* : \Bbbk^Y \to \Bbbk^X\,, \quad f \mapsto f \circ \varphi\,, \tag{5-2}$$

действующий из алгебры $\Bbbk^Y$ *всех* функций $Y \to \Bbbk$ в алгебру $\Bbbk^X$ *всех* функций $X \to \Bbbk$ и переводящий функцию $f : Y \to \Bbbk$ в её композицию с отображением φ. Если множества $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$ являются алгебраическими многообразиями, а отображение $\varphi : X \to Y$ действует

[1] См. n° 1.4.1 на стр. 12.

[2] Или *полиномиальные*.

[3] Напомню, что ненулевой элемент a в кольце называется *нильпотентом*, если $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Кольцо называется *приведённым*, если в нём нет ненулевых нильпотентов. Поскольку любая степень ненулевой функции со значениями в поле также является ненулевой функцией, в алгебре регулярных функций на аффинном алгебраическом многообразии нет нильпотентов.

[4] См. n° 4.3 на стр. 61.

[5] Напомню, что *радикалом* идеала I в коммутативном кольце K называется идеал $\sqrt{I} = \{a \in K \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : a^n \in I\}$. Если $\sqrt{I} = I$, то идеал I называется *радикальным*.

на координаты точек по правилу $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n))$, то его гомоморфизм поднятия переводит каждую образующую $y_i \pmod{I(Y)}$ координатной алгебры $\Bbbk[Y]$ в функцию $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)|_X : X \to \Bbbk$. Таким образом регулярность теоретико множественного отображения $\varphi : X \to Y$ означает, что гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \Bbbk^Y \to \Bbbk^X$ переводит подалгебру $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk^Y$ регулярных функций на Y в алгебру $\Bbbk[X] \subset \Bbbk^X$ регулярных функций на X, т. е. корректно задаёт гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$. Аналогичная характеризация регулярных отображений имеется и для других геометрических теорий.

Упражнение 5.1. Проверьте, что теоретико множественное отображение топологических (соотв. гладких или аналитических) многообразий $X \to Y$ является непрерывным (соотв. гладким или аналитическим), если и только если его гомоморфизм поднятия переводит подалгебру $C^0(Y) \subset \mathbb{R}^Y$ непрерывных (соотв. гладких или аналитических) функций на Y в алгебру непрерывных (соотв. гладких или аналитических) функций на X.

Обратите внимание, что вложение $\varphi(X) \subset Y$ влечёт вложение идеалов $\varphi^*\big(I(Y)\big) \subset I(X)$. Поэтому гомоморфизм алгебр многочленов $\Bbbk[y_1, \dots, y_m] \to \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, $y_i \mapsto \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$, корректно факторизуется до гомоморфизма $\Bbbk[Y] = \Bbbk[y_1, \dots, y_m] / I(Y) \to \Bbbk[x_1, \dots, x_n] / I(X) = \Bbbk[X]$ координатных алгебр.

5.1.2. Максимальный спектр. С каждой точкой $p \in X$ аффинного алгебраического многообразия X связан *гомоморфизм вычисления*[1] $\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \to \Bbbk$, $f \mapsto f(p)$. Он эпиморфен, поскольку переводит единицу в единицу, и значит, является гомоморфизмом факторизации по модулю своего ядра

$$\mathfrak{m}_p \overset{\text{def}}{=} \ker \mathrm{ev}_p = I(\{p\}) = \{f \in \Bbbk[X] \mid f(p) = 0\}, \tag{5-3}$$

которое является максимальным идеалом в $\Bbbk[X]$, ибо фактор $\Bbbk[X] / \mathfrak{m}_p \simeq \Bbbk$ является полем. Идеал (5-3) называется *максимальным идеалом точки* $p \in X$. Таким образом, значение каждого многочлена $f \in \Bbbk[X]$ в точке $p \in X$ совпадает с классом $f \pmod{\mathfrak{m}_p} \in \Bbbk[X]/\mathfrak{m}_p \simeq \Bbbk$.

Множество всех максимальных идеалов произвольной $\Bbbk$-алгебры A называется её *максимальным спектром* и обозначается $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}(A)$. Каждой точке спектра $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ отвечает гомоморфизм факторизации $\pi_{\mathfrak{m}} : A \to A / \mathfrak{m}$, $a \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}}$, принимающий значения в поле $A / \mathfrak{m} \supset \Bbbk$, которое конечно порождено как алгебра над $\Bbbk$. По теор. 4.2 на стр. 62 такое поле является конечным алгебраическим расширением поля $\Bbbk$, а значит, совпадает с $\Bbbk$, когда поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Это позволяет интерпретировать элементы произвольной конечно порождённой алгебры A над таким полем как функции $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A \to \Bbbk$.

Лемма 5.2
На каждом аффинном алгебраическом многообразии X над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ соответствия $p \longleftrightarrow \mathrm{ev}_p \longleftrightarrow \mathfrak{m}_p = \ker(\mathrm{ev}_p)$ задают биекции между точками $p \in X$, гомоморфизмами $\Bbbk$-алгебр $f : \Bbbk[X] \to \Bbbk$, и максимальными идеалами $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[X]$.

Доказательство. Биективность второго соответствия мы уже проверили выше[2]. Сопоставление

[1] Это специальный случай гомоморфизма поднятия, отвечающий вложению $p \hookrightarrow X$ одноточечного множества p в многообразие X.

[2] Сопоставление гомоморфизму его ядра инъективно вкладывает алгебру гомоморфизмов $\Bbbk$-алгебр $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, \Bbbk)$ в множество $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ над любым, не обязательно алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$, но над незамкнутым полем не все максимальные идеалы являются ядрами гомоморфизмов вычисления со значениями в самом этом поле. Например, ядро гомоморфизма вычисления $\mathrm{ev}_i : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(i)$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, представляет собою главный максимальный идеал $(x^2 + 1) \subset \mathbb{R}[x]$, который не является

точке $p \in X \subset \mathbb{A}^n$ её максимального идеала $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p$ вкладывает[1] множество точек в множество максимальных идеалов, поскольку для $p \neq q$ всегда можно указать аффинно линейную функцию $f: \mathbb{A}^n \to \Bbbk$ зануляющуюся в p и отличную от нуля в q. Чтобы показать, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любой максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ имеет вид $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p$ для некоторой точки $p \in X$, обозначим через $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ полный прообраз идеала $\mathfrak{m}$ относительно отображения факторизации $\Bbbk[x_1, \dots, x_n] \twoheadrightarrow \Bbbk[X]$. Так как $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]/\widetilde{\mathfrak{m}} = \Bbbk[X]/\mathfrak{m} = \Bbbk$, идеал $\widetilde{\mathfrak{m}}$ является собственным, максимальным и по построению содержит $I(X)$. По слабой теореме о нулях все многочлены $f \in \widetilde{\mathfrak{m}}$ обращаются в нуль в некоторой точке $p \in \mathbb{A}^n$, которая лежит на X, так как $I(X) \subset \widetilde{\mathfrak{m}}$. Следовательно, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_p$, что в силу максимальности идеала $\mathfrak{m}$ означает равенство $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$. □

Соглашение 5.1. Всюду далее обозначение $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ используется как для множества гомоморфизмов $\Bbbk$-алгебр $A \to \Bbbk$, так и для множества максимальных идеалов в A, поскольку любой гомоморфизм факторизации $A \to \Bbbk$ однозначно задаётся своим ядром $\mathfrak{m} \subset A$.

Пример 5.1 ($\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \simeq \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\Bbbk^n)$)
Каждый гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\varphi: \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \to \Bbbk$ однозначно определяется образами свободных образующих полиномиальной алгебры, т. е. набором чисел $p_i = \varphi(x_i) \in \Bbbk$. Сопоставление $\varphi \mapsto (p_1, \dots, p_n)$ устанавливает биекцию между такими гомоморфизмами и точками аффинного координатного пространства $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\Bbbk^n)$. Ядро гомоморфизма

$$\mathrm{ev}_p: \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \to \Bbbk$$

порождается линейными двучленами $x_i - p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

5.1.3. Нильрадикал и радикал Джекобсона. Для произвольного коммутативного кольца A радикал $\mathfrak{n}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{0} = \{a \in A \mid a^n = 0 \text{ для некоторго } n \in \mathbb{N}\}$ нулевого идеала[2] в A называется *нильрадикалом* кольца A. Пересечение $\mathfrak{r}(A)$ всех максимальных идеалов кольца A называется *радикалом Джекобсона*.

Упражнение 5.2. Убедитесь, что $\mathfrak{n}(A)$ является идеалом в A.

Предложение 5.1
Для любой (не обязательно приведённой) конечно порождённой алгебры A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ ядро гомоморфизма $A \to \Bbbk^{\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A}$, сопоставляющего элементу $a \in A$ функцию $a: \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A \to \Bbbk$, $\mathfrak{m} \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}} \in A/\mathfrak{m} = \Bbbk$, совпадает с нильрадикалом алгебры A, т. е. $\mathfrak{n}(A) = \mathfrak{r}(A)$.

Доказательство. Поскольку для любого $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ фактор алгебра $A/\mathfrak{m}$ является полем и не содержит ненулевых нильпотентов, каждый нильпотентный элемент кольца задаёт нулевую функцию на спектре, ибо аннулируется всеми гомоморфизмами вычисления $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}$. Тем самым, $\mathfrak{n}(A) \subset \mathfrak{r}(A)$. Чтобы доказать обратное включение, рассмотрим приведённую конечно порождённую $\Bbbk$-алгебру $A_{\mathrm{red}} \stackrel{\text{def}}{=} A/\mathfrak{n}(A)$ и существующее по лем. 5.1 на стр. 69 алгебраическое многообразие $X \subset \mathbb{A}^n$ с координатной алгеброй $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X) \simeq A_{\mathrm{red}}$. Если $a \in \mathfrak{r}(A)$,

ядром никакого гомоморфизма $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, поскольку как векторное пространство над $\mathbb{R}$ имеет в $\mathbb{R}[x]$ коразмерность 2.

[1] Опять таки над любым, в том числе, не алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$.

[2] Т. е. множество всех нильпотентных элементов кольца.

то класс элемента a в A_{red} лежит в $\mathfrak{r}(A_{\mathrm{red}})$. Поэтому $a(p) = 0$ для всех точек $p \in X$, т. е. $a = 0$ в $\Bbbk[X] = A_{\mathrm{red}}$. Следовательно, $a \in \mathfrak{n}(A)$. □

Упражнение 5.3. Покажите, что для произвольного коммутативного кольца A с единицей нильрадикал $\mathfrak{n}(A)$ совпадает с пересечением всех простых[1] идеалов кольца A.

5.1.4. Эквивалентность категорий. Обозначим через $\mathcal{A}\ell g_{\Bbbk}$ категорию конечно порождённых приведённых алгебр с единицей над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$. Сопоставление аффинному алгебраическому многообразию X его координатной алгебры $\Bbbk[X]$, а регулярному морфизму аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$ гомоморфизма поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ задаёт контравариантный функтор[2]

$$h_{\mathbb{A}^1} : \mathcal{A}ff_{\Bbbk}^{\,\mathrm{op}} \to \mathcal{A}\ell g_{\Bbbk}\,, \quad X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}ff_{\Bbbk}}(X, \mathbb{A}^1) = \Bbbk[X]\,, \tag{5-4}$$

из категории аффинных алгебраических многообразий над полем $\Bbbk$ в категорию конечно порождённых приведённых $\Bbbk$-алгебр с единицей. Проверим, что этот функтор является оборачивающей стрелки эквивалентностью категорий, т. е. *по-сути сюрьективен* и *вполне строг*[3]. Первое означает, что каждая конечно порождённая приведённая $\Bbbk$-алгебра изоморфна координатной алгебре некоторого аффинного алгебраического многообразия, и было установлено нами в лем. 5.1 на стр. 69. Второе означает, что сопоставление регулярному морфизму многообразий его гомоморфизма подъёма задаёт биекцию

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}ff_{\Bbbk}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\ell g_{\Bbbk}}(\Bbbk[Y], \Bbbk[X])\,, \quad \varphi \mapsto \varphi^*\,. \tag{5-5}$$

Чтобы построить обратную биекцию, рассмотрим функтор из категории конечно порождённых приведённых $\Bbbk$-алгебр с единицей в категорию множеств, сопоставляющй алгебре её максимальный спектр

$$h_{\Bbbk} : \mathcal{A}\ell g_{\Bbbk} \to \mathcal{S}et\,, \quad A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\ell g_{\Bbbk}}(A\,,\, \Bbbk) = \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A\,, \tag{5-6}$$

а гомоморфизму $\Bbbk$-алгебр $\psi : A \to B$ — *отображение подъёма* $\psi^* : \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} B \to \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$, переводящее сюрьекцию $\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}} : B \to \Bbbk$ с ядром $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} B$ в сюрьекцию $\psi^*(\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}}) = \mathrm{ev}_{\mathfrak{m}} \circ \psi$ с ядром $\psi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[X]$. Сравнение определений показывает, что отображения множеств

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}ff_{\Bbbk}}(X, Y) \underset{\psi^* \leftarrow\!\shortmid\, \psi}{\overset{\varphi \mapsto \varphi^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\ell g_{\Bbbk}}(\Bbbk[Y], \Bbbk[X])$$

обратны друг другу. В самом деле, если регулярный морфизм из алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в алгебраическое многообразие $Y \subset \mathbb{A}^m$ действует по правилу

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))\,, \quad \text{где} \quad \varphi_i(x) \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]\,,$$

то его гомоморфизм подъёма $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ действует на образующие по правилу

$$y_i \mapsto \varphi_i \,(\mathrm{mod}\, I(X))\;,$$

[1] Напомню, что идеал $\mathfrak{p} \subset A$ называется *простым*, если в фактор кольце $A/\mathfrak{p}$ нет делителей нуля.

[2] Необходимые предварительные сведения о категориях и функторах можно почерпнуть из курса алгебры, см. например лекцию http://vyshka.math.ru/pspdf/1011/algebra-2/lec_10.pdf

[3] См. цитированную выше лекцию.

а подъём $\varphi^{**}:\ \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[X] \to \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[Y]$ этого гомоморфизма подъёма переводит вычисление

$$\mathrm{ev}_p:\ \Bbbk[X] \to \Bbbk\,, \quad f(x) \mapsto f(p)\,,$$

в заданной точке $p = (p_1, \dots, p_n) \in X$ в композицию $\mathrm{ev}_p \circ \varphi^*$, которая отправляет каждую образующую $y_i \in \Bbbk[Y]$ в число $\varphi_i(p) \in \Bbbk$ и является таким образом вычислением в точке $\varphi(p) \in Y$. Стало быть, $\varphi^{**} = \varphi$.

Упражнение 5.4. Установите для любого гомоморфизма $\Bbbk$-алгебр $\psi:\ \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ равенство $\psi^{**} = \psi$.

Тем самым, отображение (5-5) биективно, и значит, функтор (5-5) является оборачивающей стрелки эквивалентностью категорий. Функтор (5-6) не является квазиобратным[1] к функтору (5-4) лишь потому, что принимает значения не в категории аффинных алгебраических многообразий, а в категории множеств. Для любой конечно порождённой приведённой $\Bbbk$ алгебры A с единицей, множество $\mathrm{Spec_m}\,A$ допускает много различных, но изоморфных друг другу структур аффинного алгебраического многообразия, если понимать под таковой структурой вложение множеств $\varphi:\ \mathrm{Spec_m}\,A \hookrightarrow \mathbb{A}^n$, биективно отображающее $\mathrm{Spec_m}\,A$ на аффинное алгебраическое многообразие $V(\ker\varphi^*) \subset \mathbb{A}^n$, где $\varphi^*:\ \Bbbk[\mathbb{A}^n] \twoheadrightarrow A$ это гомоморфизм подъёма вложения φ. Задание такой структуры равносильно выбору представления алгебры A образующими и соотношениями, т. е. фиксации изоморфизма $A \simeq \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I$.

Пример 5.2 (прямая и гипербола)

В прим. 5.1 на стр. 71 мы видели, что точки спектра $\mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[t]$ биективно соответствуют точкам аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \Bbbk$: каждый гомоморфизм $\mathrm{ev}:\ \Bbbk[t] \to \Bbbk$ однозначно определяется своим значением $\mathrm{ev}(t) = \lambda \in \Bbbk$ на образующей алгебры $\Bbbk[t]$, и это значение может быть любым. Аналогично, спектр алгебры полиномов Лорана $\mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[t, t^{-1}]$ находится в естественной биекции с точками аффинной прямой с выколотым нулём, т. е. с открытым множеством $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\} = \Bbbk^*$, ибо значение $\lambda = \mathrm{ev}(t) = 1/\mathrm{ev}(t^{-1})$ может быть любым *обратимым* элементом поля $\Bbbk$. Если же представить алгебру полиномов Лорана образующими и соотношениями — например, посредством изоморфизма $\varphi^*:\ \Bbbk[t, t^{-1}] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[x, y]/(xy - 1)$, переводящего t в x, а t^{-1} — в y, то её спектр отождествится с множеством точек гиперболы $xy = 1$ в $\mathbb{A}^2$. При этом отображение поднятия $\varphi = \varphi^{**}:\ V(xy - 1) \to \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\}$ будет проекцией гиперболы на координатную ось.

5.1.5. Дизъюнктные объединения (копроизведения) многообразий. Для аффинных алгебраических многообразий X и Y прямое произведение алгебр $\Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]$ конечно порождено, приведено, содержит единицу и обладает следующим универсальным свойством: для любой пары гомоморфизмов $\varphi^*:\ B \to \Bbbk[X]$, $\psi^*:\ B \to \Bbbk[Y]$ из произвольной $\Bbbk$-алгебры B существует единственный гомоморфизм $\eta^*:\ B \to \Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \Bbbk[X] \times \Bbbk[Y] \arrow[dl, "i_X^*"'] \arrow[dr, "i_Y^*"] & \\
\Bbbk[X] & & \Bbbk[Y]\,, \\
 & B \arrow[ul, "\varphi^*"] \arrow[ur, "\psi^*"'] \arrow[uu, dotted, "\eta^*"] &
\end{tikzcd}$$

[1] В смысле цитированной выше лекции.

в которой $i_X^* : \Bbbk[X] \times \Bbbk[Y] \twoheadrightarrow \Bbbk[X]$ и $i_Y^* : \Bbbk[X] \times \Bbbk[Y] \twoheadrightarrow \Bbbk[Y]$ суть проекции произведения на сомножители, переводящие $(f, g) \in \Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]$ в $f \in \Bbbk[X]$ и $g \in \Bbbk[Y]$ соответственно.

Упражнение 5.5. Проверьте это, и покажите любая алгебра A с парой гомоморфизмов

$$i_X^* : A \to \Bbbk[X] \quad \text{и} \quad i_Y^* : A \to \Bbbk[Y] ,$$

удовлетворяющих предыдущему универсальному свойству, канонически изоморфна алгебре $\Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]$ посредством единственного изоморфизма, перестановочного с гомоморфизмами i_X^* и i_Y^*.

Из установленной в n° 5.1.4 эквивалентности категорий вытекает, что аффинное алгебраическое многообразие $X \sqcup Y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Spec}_m\big(\Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]\big)$ обладает двойственным универсальным свойством: для любой пары регулярных морфизмов $\varphi : X \to Z$, $\psi : Y \to Z$ в любое аффинное алгебраическое многообразие Z существует единственный регулярный морфизм $\eta : X \sqcup Y \to Z$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& X \sqcup Y \arrow[dd, dotted, "\eta^*"] & \\
X \arrow[ur, "i_X"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[ul, "i_Y^*"'] \arrow[dl, "\psi^*"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Упражнение 5.6. Проверьте, что для любых объектов X, Y произвольной категории объект $X \sqcup Y$ и обладающие предыдущим универсальным свойством морфизмы

$$i_X : X \to X \sqcup Y , \quad i_Y : Y \to X \sqcup Y ,$$

если существуют, то единственны точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с i_X и i_Y. Убедитесь также, что в категории множеств таким объектом является дизъюнктное объединение множеств X и Y.

Таким образом дизъюнетное объединение аффинных алгебраических многообразий тоже является аффинным алгебраическим многообразием.

Упражнение 5.7. Пусть аффинное алгебраическое многообразие X является теоретико-множественным объединением двух непустых непересекающихся аффинных алгебраических многообразий Y и Z. Покажите, что $\Bbbk[X] = \Bbbk[Y] \times \Bbbk[Z]$.

5.1.6. Прямые произведения многообразий. Для коммутативных $\Bbbk$-алгебр A и B и единицами тензорное произведение векторных пространств $A \otimes B$ имеет естественную структуру коммутативной $\Bbbk$-алгебры с единицей $1 \otimes 1$ и умножением, которое на разложимых тензорах задаётся формулой $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \overset{\text{def}}{=} (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$.

Упражнение 5.8. Убедитесь в этом.

Из универсального свойства тензорного произведения вытекает, что гомоморфизмы $\Bbbk$-алгебр

$$\begin{aligned} \alpha &: A \to A \otimes B \quad a \mapsto a \otimes 1 , \\ \beta &: B \to A \otimes B \quad b \mapsto 1 \otimes b , \end{aligned} \tag{5-7}$$

обладают универсальными свойствами *копроизведения*, т. е. для любой пары гомоморфизмов $\varphi: A \to C, \psi: B \to C$ существует единственный гомоморфизм $\varphi \otimes \psi: A \otimes B \to C$ со свойствами $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ \alpha$ и $\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \beta$, и этот гомоморфизм действует на разложимые тензоры по правилу $\varphi \otimes \psi: a \otimes b \mapsto \varphi(a)\psi(b)$.

Упражнение 5.9. Убедитесь в этом.

Например, тензорное произведение алгебр $\Bbbk[x_1, \dots, x_n] \otimes \Bbbk[y_1, \dots, y_m]$ изоморфно алгебре многочленов $\Bbbk[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ посредством отображения

$$x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n} \otimes y_1^{r_1} \dots y_m^{r_m} \mapsto x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n} y_1^{r_1} \dots y_m^{r_m} .$$

Эквивалентность категорий из n° 5.1.4 превращает этот изоморфизм в изоморфизм аффинных алгебраических многообразий $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \simeq \mathbb{A}^{n+m}$.

Предложение 5.2

Тензорное произведение конечно порождённых приведённых $\Bbbk$-алгебр $A \otimes B$ тоже является конечно порождённой приведённой $\Bbbk$-алгеброй с максимальным спектром

$$\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A \otimes B) = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A) \times \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(B) .$$

В частности, теоретико множественное произведение аффинных алгебраических многообразий тоже является аффинным алгебраическим многообразием.

Доказательство. Биекция $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A) \times \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A \otimes B)$ переводит точку (p, q), представленную парой эпиморфизмов вычисления $\mathrm{ev}_p: A \to \Bbbk$, $\mathrm{ev}_q: B \to \Bbbk$ в эпиморфизм вычисления

$$A \otimes B \to \Bbbk , \quad a \otimes b \mapsto \mathrm{ev}_p(a)\, \mathrm{ev}_p(b) ,$$

существующий в силу универсального свойства тензорного произведения. Алгебра $A \otimes B$ порождается над $\Bbbk$ всевозможными попарными тензорными произведениями образующих алгебр A и B, коих имеется конечное число. Чтобы показать, что $A \otimes B$ приведена, достаточно согласно предл. 5.1 на стр. 71 убедиться в том, что всякий элемент $h \in A \otimes B$, задающий нулевую функцию на $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A \otimes B)$, равен нулю. Для этого запишем такой элемент h в виде $\sum f_\nu \otimes g_\nu$ с линейно независимыми над $\Bbbk$ элементами $g_\nu \in B$. Из равенства $(\mathrm{ev}_p \otimes \mathrm{ev}_q)h = 0$, справедливого для всех $(p, q) \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A \otimes B)$, вытекает, что при произвольно зафиксированном $p \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ линейная комбинация $\sum f_\nu(p) \cdot g_\nu \in B$ является тождественно нулевой функцией на $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} B$ и тем самым равна нулю в B, ибо алгебра B приведена. Это означает, что все константы $f_\nu(p)$ нулевые для любого $p \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$, т. е. элементы $f_\nu \in A$ задают тождественно нулевые функции $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A \to \Bbbk$. Поскольку алгебра A приведена, все $f_\nu = 0$, а значит и $h = 0$. □

5.2. Топология Зарисского. На множестве $X = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ имеется каноническая топология, отражающая алгебраические свойства алгебры A. Эта топология называется *топологией Зарисского* и имеет в качестве *замкнутых* подмножеств алгебраические подмногообразия в X, т. е. множества вида $V(I) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \ \forall f \in I\} = \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A \mid I \subset \mathfrak{m}\}$ для всевозможных идеалов $I \subset A$.

Упражнение 5.10. Убедитесь, что а) $\varnothing = V(1)$ б) $X = V(0)$ в) $\bigcap_\nu V(I_\nu) = V\left(\sum_\nu I_\nu\right)$, где $\sum_\nu I_\nu$ означает идеал, образованный всевозможными конечными суммами $\sum_\nu f_\nu$ с $f_\nu \in I_\nu$

г) $V(I)\cup V(J) = V(I\cap J) = V(IJ)$, где IJ означает идеал, представляющий собою $\Bbbk$-линейную оболочку всевозможных произведений[1] ab с $a\in I$, $b\in J$.

Топология Зарисского имеет чисто алгебраическую природу: окрестности Зарисского отражают скорее отношения делимости, нежели «близости», и многие её свойства довольно далеки от интуитивно привычных свойств метрической топологии. Скажем, топология Зарисского на произведении $X\times Y$ обычно тоньше произведения топологий Зарисского на X и Y, поскольку замкнутые подмножества $Z\subset X\times Y$ не исчерпываются произведениями замкнутых подмножеств в X, Y. Например, при $X = Y = \mathbb{A}^1$ гипербола $V(xy-1)$ замкнута в топологии Зарисского на $\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2$, а отличные от всей плоскости произведения замкнутых подмножеств в $\mathbb{A}^1$ исчерпываются конечными объединениями изолированных точек и прямых, параллельных координатным осям.

Предложение 5.3 (база открытых множеств и компактность)
Каждое открытое подмножество аффинного алгебраического многообразия X является объединением конечного числа *главных* открытых множеств $\mathcal{D}(f)\overset{\text{def}}{=} X\smallsetminus V(f) = \{x\in X \mid f(x)\neq 0\}$, где $f\in\Bbbk[X]$, и *компактно* в том смысле, что в каждое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Доказательство. Пусть $U = X\smallsetminus V(I)$. Так как алгебра $\Bbbk[X]$ нётерова, идеал $I = (f_1,\dots,f_m)$ конечно порождён. Поэтому $V(I) = \bigcap V(f_i)$ и $U = \bigcup\big(X\smallsetminus V(f_i)\big) = \bigcup_\nu \mathcal{D}(f_i)$. Это доказывает первое утверждение. Для доказательства второго заметим, что семейство главных открытых множеств $\mathcal{D}(f_\nu)$ покрывает открытое множество U если и только если общие нули всех функций f_ν лежат вне U, т. е. $V(I)\subset X\smallsetminus U$, где I — идеал, порождённый функциями f_ν. Поскольку $I = (f_1,\dots,f_m)$ для некоего конечного набора функций $f_1,\dots,f_m$, множество U покрывается множествами $\mathcal{D}(f_i)$, на которых отличны от нуля функции из этого набора. □

Предложение 5.4 (непрерывность регулярных морфизмов)
Всякий регулярный морфизм алгебраических многообразий $\varphi : X\to Y$ непрерывен в топологии Зарисского.

Доказательство. Прообраз $\varphi^{-1}\big(V(I)\big)$ замкнутого подмножества $V(I)\subset Y$ состоит из всех таких точек $x\in X$, что $f(\varphi(x)) = 0$ для всех $f\in I$. Тем самым, он является множеством нулей идеала, порождённого в $\Bbbk[X]$ образом $\varphi^*(I)$ идеала I при гомоморфизме поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y]\to\Bbbk[X]$. □

5.2.1. Неприводимые компоненты. Топологическое пространство X, представимое в виде объединения $X = X_1\cup X_2$ своих собственных замкнутых подмножеств $X_1, X_2 \subsetneq X$, называется *приводимым*. В обычной метрической топологии практически все пространства приводимы. В топологии Зарисского приводимость многообразия X равносильна наличию делителей нуля в алгебре $\Bbbk[X]$, и неприводимые алгебраические многообразия являются грубыми аналогами степеней простых чисел в арифметике.

Предложение 5.5
Аффинное алгебраическое многообразие неприводимо если и только если в его координатной алгебре $\Bbbk[X]$ нет ненулевых делителей нуля.

[1] Обратите внимание, что последнее равенство равносильно равенству $\sqrt{I\cap J} = \sqrt{IJ}$.

Доказательство. Разложение $X = X_1 \cup X_2$, где каждое X_i замкнуто, непусто и отлично от X, означает наличие таких ненулевых функций $f_1 \in I(X_1)$, $f_2 \in I(X_2)$, что произведение $f_1 f_2$ тождественно зануляется на всём X. Последнее означает, что $f_1 f_2 = 0$ в $\Bbbk[X]$. Наоборот, если $f_1 f_2 = 0$ в $\Bbbk[X]$ для ненулевых $f_1, f_2 \in \Bbbk[X]$, то f_1 и f_2 необратимы в $\Bbbk[X]$, а значит, замкнутые подмножества $V(f_1)$ и $V(f_2)$ непусты и отличны от X. При этом $X = V(f_1) \cup V(f_2)$. □

Упражнение 5.11. Убедитесь, что $V(f)$ непусто и отлично от X для всякого ненулевого необратимого многочлена $f \in \Bbbk[X]$.

Следствие 5.1
Аффинная гиперповерхность $V(g) \subset \mathbb{A}^n$, где $g \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, неприводима тогда и только тогда, когда g является степенью неприводимого многочлена.

Доказательство. Поскольку алгебра $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ факториальна, радикал $\sqrt{(f)}$ любого главного идеала (f) тоже является главным идеалом, порождённым произведением всех попарно неассоциированных неприводимых делителей многочлена f. Алгебра $\Bbbk[V(f)] = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/\sqrt{(f)}$ не имеет делителей нуля если и только если f имеет ровно один неприводимый делитель с точностью до умножения на константы. □

Теорема 5.1
Каждое аффинное алгебраическое многообразие X является конечным объединением

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_k$$

таких неприводимых замкнутых подмножеств $X_i \subset X$, что $X_i \not\subset X_j$ при $i \neq j$, и это разложение единственно с точностью до перестановки его элементов.

Доказательство. Сначала докажем существование разложения. Если X неприводимо, доказывать нечего. Если X приводимо, представим его в виде $X = Z_1 \cup Z_2$, где $Z_{1,2}$ — собственные замкнутые подмножества. Каждую приводимую компоненту этого разложения снова разложим в объединение двух собственных замкнутых подмножеств, и так далее. Если на каком-то шаге получится разложение $X = \bigcup Z_\nu$ в котором все Z_ν неприводимы, мы выкинем из этого объединения все неприводимые компоненты, которые содержатся в других неприводимых компонентах, и получим требуемое разложение. Если процесс не остановится через конечное число шагов, мы сможем построить бесконечную цепочку строго вложенных замкнутых подмножеств $X \supsetneq Y_1 \supsetneq Y_2 \supsetneq \ldots$, идеалы которых $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \ldots$ образуют бесконечную возрастающую цепочку, противоречащую нётеровости алгебры $\Bbbk[X]$.

Единственность доказывается индукцией по k. При $k = 1$ многообразие X неприводимо и является единственной своей неприводимой компонентой. Пусть X раскладывается в объединение $k \geqslant 2$ неприводимых компонент и для всех многообразий, раскладывающихся на меньшее число компонент, разложение в объединение неприводимых компонент единственно. Если неприводимое замкнутое подмножество $Y \subset X$ лежит в объединении замкнутых подмножеств $Z_1 \cup Z_2$, то $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$, а значит, $Y \subset Z_1$ или $Y \subset Z_2$. Поэтому равенство двух разложений на неприводимые компоненты $X_1 \cup \ldots \cup X_k = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$ влечёт включение $X_1 \subset Y_\alpha \subset X_\beta$ для некоторых α, β, что означает равенство $X_1 = Y_\alpha = X_\beta$. Выкинем из обоих разложений компоненты X_1 и Y_α и применим предположение индукции к объединению замыканий оставшихся компонент. □

Упражнение 5.12. Пусть $Z \subsetneq Y \subset X$ замкнуты и Y неприводимо. Убедитесь, что $Y = \overline{Y \smallsetminus Z}$, где замыкание берётся в X, и что неприводимость Y для этого существенна.

Определение 5.1

Неприводимые замкнутые подмножества $X_i \subset X$ из теор. 5.1, называются *неприводимыми компонентами* многообразия X.

Следствие 5.2

Элемент $f \in \Bbbk[X]$ является делителем нуля если и только если он обращается в нуль на некоторой неприводимой компоненте многообразия X.

Пример 5.3 («большие» открытые множества)

Топология Зарисского нехаусдорфова. Если X неприводимо, любые два непустых открытых подмножества $U_1, U_2 \subset X$ имеют непустое пересечение, поскольку в противном случае возникает разложение $X = (X \smallsetminus U_1) \cup (X \smallsetminus U_2)$. Иначе говоря, каждое непустое открытое подмножество неприводимого многообразия всюду плотно в нём.

Упражнение 5.13. Пусть X неприводимо и $f, g \in \Bbbk[X]$. Докажите, что если $f|_U = g|_U$ для некоторого непустого открытого $U \subset X$, то $f = g$ в $\Bbbk[X]$.

5.3. Рациональные функции. Не являющиеся делителями нуля элементы алгебры $\Bbbk[X]$ образуют мультипликативную систему[1] $S_X \subset \Bbbk[X]$. Кольцо частных $S_X^{-1}\Bbbk[X]$ называется *кольцом рациональных функций* на X и обозначается $\Bbbk(X)$. Если X неприводимо, то $\Bbbk(X) = Q_{\Bbbk[X]}$ — это поле частных целостного кольца $\Bbbk[X]$. Скажем, что рациональная функция $f \in \Bbbk(X)$ *определена* в точке $x \in X$, если существует такое её представление дробью $f = p/q$, где $p, q \in \Bbbk[X]$ и q не делит нуль, что $q(x) \neq 0$. Число $f(x) = p(x)/q(x) \in \Bbbk$ называется *значением* f в точке x.

Упражнение 5.14. Убедитесь, что $f(x)$ не зависит от способа записи f в виде дроби $f = p/q$, где $p, q \in \Bbbk[X]$, q не делит нуль, и $q(x) \neq 0$.

Множество точек x, в которых определена рациональная функция f, называется *областью определения* функции f и обозначается $\mathrm{Dom}(f)$. Из сл. 5.2 и прим. 5.3 вытекает, что $\mathrm{Dom}(f)$ является плотным открытым подмножеством в X.

Упражнение 5.15. Убедитесь, что для совпадения двух рациональных функций как элементов кольца $\Bbbk(X)$ достаточно поточечного совпадения их значений на каком-нибудь плотном открытом подмножестве в X.

Для открытого $U \subset X$ положим $\Bbbk[U] \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \Bbbk(X) \mid \mathrm{Dom}(f) \supset U\}$ и будем называть его кольцом *рациональных функций, регулярных в* U.

Предложение 5.6

Если $h \in \Bbbk[X]$ не делит нуль, то $\Bbbk[\mathcal{D}(h)] = \Bbbk[X][h^{-1}]$ является кольцом частных $\Bbbk[X]$ со знаменателями из мультипликативной системы $\{h^k\}_{k \geqslant 0}$.

Доказательство. Для рациональной функции $f \in \Bbbk(X)$ положим

$$\left(f^{-1}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in \Bbbk[X] \mid gf \in \Bbbk[X]\}\,. \tag{5-8}$$

[1] Подробнее про мультипликативные системы и кольца дробей со знаменателями в таких системах см. в разделе 3.1 на стр. 53 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2526/lec_03.pdf.

Это идеал в $\Bbbk[X]$, и лежащие в нём неделители нуля суть все возможные знаменатели, встречающиеся в разнообразных представлениях f в виде дроби. Множество делителей нуля в (f^{-1}) представляет собою пересечение этого идеала с объединением идеалов $I(X_i)$ неприводимых компонент X_i многообразия X. Так как неделители нуля в (f^{-1}) по определению имеются, каждое пересечение $(f^{-1}) \cap I(X_i) \subsetneq (f^{-1})$ является собственным векторным подпространством в (f^{-1}), и весь идеал (f^{-1}) является объединением этих подпространств и подпространства, порождённого неделителями нуля. Если последнее подпространство тоже собственное, пространство (f^{-1}) оказалось бы объединением конечного набора собственных подпространств, что невозможно над бесконечным полем[1].

Упражнение 5.16. Убедитесь в этом.

Мы заключаем, что неделители нуля линейно порождают (f^{-1}) как векторное пространство над $\Bbbk$, и $X \smallsetminus \mathrm{Dom}(f) = V((f^{-1}))$. Включение $\mathcal{D}(h) \subset \mathrm{Dom}(f)$ означает, что $V(h) \supset V((f^{-1}))$, т. е. функция h зануляется на $V((f^{-1}))$. По теореме Гильберта о нулях $h^d \in (f^{-1})$ для некоторого $d \in \mathbb{N}$. Тем самым, $f = p/h^d$, где $p \in \Bbbk[X]$. □

5.3.1. Аффинность главных открытых множеств. Если $h \in \Bbbk[X]$ не делит нуль, то главное открытое подмножество $\mathcal{D}(h) = \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[X][h^{-1}] = \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[X][t]/(1-ht)$ всюду плотно в X и является аффинным алгебраическим многообразием: например, его можно реализовать замкнутой гиперповерхностью $V(1-ht) \subset X \times \mathbb{A}^1$. Вложение $i : \mathcal{D} \hookrightarrow X$ является регулярным морфизмом аффинных многообразий: его гомоморфизм подъёма задаёт каноническое вложение $i^* : \Bbbk[X] \hookrightarrow \Bbbk[X][h^{-1}] \simeq \Bbbk[\mathcal{D}(h)]$ и продолжается до изоморфизма колец частных $i^* : \Bbbk(X) \xrightarrow{\sim} \Bbbk\big(\mathcal{D}(h)\big)$.

Замечание 5.1. Два *разных* толкования обозначения $\Bbbk[\mathcal{D}(h)]$ — как координатной алгебры аффинного алгебраического многообразия $\mathcal{D}(h)$ и как алгебры рациональных функций, регулярных на открытом множестве $\mathcal{D}(h) \subset X$, — *согласованы* друг с другом. В частности, согласованы друг с другом и два разных толкования обозначения $\Bbbk[X]$ — как координатной алгебры аффинного многообразия X и как алгебры рациональных функций, регулярных всюду на X, т. е. $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X) = \{f \in \Bbbk(X) \mid \mathrm{Dom}(f) = X\}$. Это вытекает из предл. 5.6 при $h = 1$, что отвечает несобственному главному открытому множеству $\mathcal{D}(h) = X$.

Предостережение 5.1. Неглавное открытое подмножество $U \subset X$, вообще говоря, *не является* аффинным подмногообразием: каноническое вложение $U \hookrightarrow \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[U]$, сопоставляющее точке $u \in U$ её максимальный идеал $\mathfrak{m}_u = \ker \mathrm{ev}_u \subset \Bbbk[U]$, может быть не биективно.

Упражнение 5.17. Пусть $n \geqslant 2$ и $U = \mathbb{A}^n \smallsetminus O$ — дополнение к началу координат в аффинном пространстве. Покажите, что $\Bbbk[U] = \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ и, тем самым, $\mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[U] = \mathbb{A}^n \neq U$.

Предложение 5.7

Пусть разложение аффинного алгебраического многообразия X на неприводимые компоненты имеет вид $X = X_1 \cup \ldots \cup X_k$. Тогда $\Bbbk(X) = \Bbbk(X_1) \times \ldots \times \Bbbk(X_k)$.

Доказательство. Объединение $Z = \bigcup_{i \neq j}(X_i \cap X_j)$ попарных пересечений неприводимых компонент замкнуто в X. Выберем в его идеале $I(Z) \subset \Bbbk[X]$ какую-нибудь ненулевую функцию $f \in I(Z)$, не делящую нуль в $\Bbbk[X]$.

[1] А алгебраически замкнутое поле бесконечно.

Упражнение 5.18. Убедитесь, что $I(Z)$ линейно порождается такими функциями как векторное пространство над $\Bbbk$.

Главное открытое подмножество $W = \mathcal{D}(f) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][f^{-1}] \subset X$ аффинно и является дизъюнктным объединением подмножеств $W_i = W \cap X_i \subset X_i$. Каждое W_i является главным открытым подмножеством многообразия X_i и тоже аффинно: $W_i = \mathcal{D}(f_i) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X_i][f_i^{-1}] \subset X_i$, где $f_i = f \pmod{I(X_i)} \in \Bbbk[X_i]$. Тем самым, $\Bbbk[W] \simeq \Bbbk[W_1] \times \dots \times \Bbbk[W_k]$, как мы видели в n° 5.1.5.

Упражнение 5.19. Проверьте, что кольцо частных прямого произведения коммутативных колец с единицами изоморфно прямому произведению колец частных сомножителей:

$$(K_1 \times \ldots \times K_k)S^{-1}_{K_1\times\ldots\times K_k} \simeq K_1 S^{-1}_{K_1} \times \ldots \times K_k S^{-1}_{K_k}\,.$$

Таким образом, $\Bbbk(X) \simeq \Bbbk(W) \simeq \prod \Bbbk(W_i) \simeq \prod \Bbbk(X_i)$. □

5.4. Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр. Всякий гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$$

канонически разлагается в композицию эпиморфизма и вложения:

$$\Bbbk[Y] \xrightarrow{\varphi_1^*} \Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi^*) \xhookrightarrow{\varphi_2^*} \Bbbk[X]\,. \tag{5-9}$$

Поскольку алгебра $\Bbbk[Y]$ конечно порождена, а алгебра $\Bbbk[X]$ приведена, алгебра

$$\Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi^*) \subset \Bbbk[X]$$

тоже конечно порождена и приведена. Она является координатной алгеброй аффинного алгебраического многообразия $Z = \operatorname{Spec_m}\left(\operatorname{im}(\varphi^*)\right) \simeq V\left(\ker(\varphi^*)\right) \subset Y$. Инъективность гомоморфизма $\varphi_1^* : \Bbbk[Z] \to \Bbbk[X]$ означает отсутствие ненулевых функций $f \in \Bbbk[Z]$, зануляющихся на $\varphi_1(X) \subset Z$, т. е. *всюду плотность* образа $\varphi_1(X)$ в многообразии Z. Тем самым, $Z = \overline{\varphi(X)} \subset Y$ есть замыкание образа $\varphi(X)$ в многообразии Y, вложенное в Y как замкнутое подмножество $V(\ker\varphi^*)$ нулей идеала $\ker\varphi^*$. Иначе говоря, алгебраическое разложение (5-9) на геометрическом языке означает разложение регулярного морфизма многообразий $\varphi : X \to Y$ в композицию регулярного морфизма $\varphi_1 : X \to Z$ с плотным образом и регулярного вложения $\varphi_2 : Z \hookrightarrow Y$ в качестве замкнутого подмногообразия.

5.4.1. Замкнутые вложения. Морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *замкнутым вложением*, если его гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ сюрьективен. Это означает, что φ является изоморфизмом между X и замкнутым подмногообразием $V(\ker\varphi^*) \subset Y$. Если замкнутое подмножество $Z \subset X$ неприводимо, гомоморфизм поднятия $i^* : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow \Bbbk[Z]$, отвечающий замкнутому вложению $i : Z \hookrightarrow X$, принимает значения в целостном кольце $\Bbbk[Z]$, которое канонически вложено в своё поле частных $\Bbbk(Z)$. По универсальному свойству кольца частных эпиморфизм i^* однозначно продолжается до эпиморфизма $\operatorname{ev}_Z : \Bbbk(X) \twoheadrightarrow \Bbbk(Z)$, который ограничивает рациональные функции с X на Z и может интуитивно восприниматься как гомоморфизм вычисления рациональных функций на X в «в общей точке» неприводимого подмногообразия $Z \subset X$, где вычисляемая функция всегда определена, а результат такого вычисления лежит в поле $\Bbbk(Z)$.

В частности, когда $Z \subset X$ является неприводимой компонентой приводимого аффинного многообразия X, из сюрьективности гомоморфизма $\operatorname{ev}_Z : \Bbbk(X) \twoheadrightarrow \Bbbk(Z)$ вытекает, что всякая рациональная функция на Z является ограничением некоторой рациональной функции на X, т. е. записывается дробью вида p/q, знаменатель которой $q \pmod{I(X_i)} \in \Bbbk[X_i] = \Bbbk[X]/I(X_i)$ представляется не делящим нуль в $\Bbbk[X]$ элементом $q \in \Bbbk[X]$.

Упражнение 5.20. Укажите такого представителя для функции $1/x \in \Bbbk(\operatorname{Spec_m} \Bbbk[x])$ на прямой $Z = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[x] = V(y)$ координатного креста $X = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[x,y]/(xy)$ на плоскости $\mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[x,y]$.

5.4.2. Доминантные морфизмы. Регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ неприводимого многообразия X называется *доминантным*, если гомоморфизм алгебр $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ инъективен. Как мы уже видели выше, инъективность гомоморфизма поднятия означает, что $\overline{\varphi(X)} = Y$. Если X приводимо, то морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *доминантным*, если доминантно его ограничение на *каждую* неприводимую компоненту многообразия X. В этом случае каждое из ограничений $\varphi_i = \varphi|_{X_i}$ задаёт вложение $\varphi_i^* : \Bbbk[Y] \hookrightarrow \Bbbk[X_i] \subset \Bbbk(X_i)$ координатной алгебры многообразия Y в *поле* рациональных функций на X_i. По универсальному свойству кольца частных такое вложение однозначно продолжается до вложения $\Bbbk(Y) \hookrightarrow \Bbbk(X_i)$ кольца рациональных функций на Y. Поэтому каждый доминантный морфизм $X \to Y$ задаёт вложение $\Bbbk(Y) \hookrightarrow \prod \Bbbk(X_i) = \Bbbk(X)$.

Упражнение 5.21. Покажите, что любой доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$ является композицией некоторого (не единственного) замкнутого вложения $\psi : X \hookrightarrow Y \times \mathbb{A}^m$ и проекции $\pi : Y \times \mathbb{A}^m \twoheadrightarrow Y$ вдоль $\mathbb{A}^m$.

5.4.3. Конечные морфизмы. Морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *конечным*, если алгебра $\Bbbk[X]$ цела над подалгеброй $\varphi^*(k[Y]) \subset \Bbbk[X]$. Это означает, что $\Bbbk[X]$ линейно порождается над $\varphi^*(k[Y])$ конечным набором функций $f_1, \dots, f_m$, т. е. любая функция $h \in \Bbbk[X]$ может быть записана как $h = \sum \varphi^*(g_i) f_i$ с подходящими $g_i \in \Bbbk[Y]$.

Лемма 5.3

Любой конечный морфизм $\varphi : X \to Y$ аффинных алгебраических многообразий переводит каждое замкнутое подмножество $Z \subset X$ в замкнутое подмножество $\varphi(Z) \subset Y$, причём индуцированный морфизм $\varphi|_Z : Z \to \varphi(Z)$ тоже конечен. Если X неприводимо и $Z \neq X$, то $\varphi(Z) \neq Y$.

Доказательство. обозначим через $I = I(Z) \subset \Bbbk[X]$ идеал замкнутого подмножества $Z \subset X$. Ограничение $\varphi|_Z : Z \to Y$ отвечает сквозному гомоморфизму алгебр $f_Z^* : \Bbbk[Y] \xrightarrow{\varphi^*} \Bbbk[X] \to \Bbbk[X]/I$. Поскольку алгебра $\Bbbk[X]$ конечно порождена как $\varphi^*(\Bbbk[Y])$-модуль, алгебра $\Bbbk[Z] = \Bbbk[X]/I$ тоже конечно порождена как модуль над $\varphi|_Z^*(\Bbbk[Y]) = \varphi^*(\Bbbk[Y])/(I \cap \varphi^*(\Bbbk[Y]))$. Тем самым, морфизм $f|_Z : Z \to Y$ конечен. Индуцированный морфизм $f|_Z : Z \to \overline{\varphi(Z)}$ тоже конечен, поскольку $\Bbbk[\overline{\varphi(Z)}] = \varphi^*(\Bbbk[Y])$. Поэтому при доказательстве первого утверждения можно считать, что $Z = X$ и $Y = \overline{\varphi(X)}$. Так как равенство $\varphi(X) = \overline{\varphi(X)}$ достаточно проверить отдельно для каждой неприводимой компоненты многообразия X, мы можем считать X неприводимым. Таким образом, достаточно доказать, что каждый конечный доминантный морфизм $\varphi : X \to Y$ из неприводимого аффинного многообразия X сюрьективен. На алгебраическом языке это означает, что если в расширении алгебр $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk[X]$ большая алгебра не имеет делителей нуля и линейно порождается над меньшей конечным набором элементов $f_1, \dots, f_m$, то каждый максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$ имеет вид $\widetilde{\mathfrak{m}} \cap \Bbbk[Y]$ для некоторого максимального идеала $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[X]$. Если идеал $\mathfrak{m}\,\Bbbk[X]$, порождённый $\mathfrak{m}$ в $\Bbbk[X]$, является собственным в $\Bbbk[X]$, то в качестве $\widetilde{\mathfrak{m}}$ можно взять любой максимальный идеал, содержащий $\mathfrak{m}\,\Bbbk[X]$. Таким образом, достаточно показать, что $\mathfrak{m}\,\Bbbk[X] \neq \Bbbk[X]$ ни для какого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$. Предположим противное:

пусть $\mathfrak{m}\,\Bbbk[X] = \Bbbk[X]$. Тогда каждая из образующих f_i, линейно порождающих $\Bbbk[X]$ над $\Bbbk[Y]$, запишется в виде $f_i = \sum_\nu f_\nu \beta_{\nu i}$ с $\beta_{\nu i} \in \mathfrak{m}$. Мы получаем матричное равенство

$$(f_1, \dots , f_m)\,(E - B) = 0\,,$$

где $B = \big(\beta_{\nu i}\big) \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathfrak{m})$, а E — единичная матрица. Следовательно[1]

$$(f_1, \dots , f_m) \cdot \det(E - B) = (f_1, \dots , f_m)\,(E - B)(E - B)^\vee = 0\,.$$

Так как в $\Bbbk[Z]$ нет делителей нуля, $\det(E - B) = 0$. Раскрывая этот определитель, заключаем, что $1 \in \mathfrak{m}$, т. е. идеал $\mathfrak{m} = \Bbbk[Y]$ не является собственным.

Чтобы доказать, что $\varphi(Z) \neq Y$ при $Z \subsetneq X$ рассмотрим какую-нибудь ненулевую функцию $f \in \Bbbk[X]$, тождественно зануляющуюся на Z. Поскольку она цела над $\varphi^*(\Bbbk[Y])$

$$f^m + \varphi^*(g_1)\,f^{m-1} + \ldots + \varphi^*(g_{m-1})\,f + \varphi^*(g_m) = 0$$

для некоторых $g_1, \dots , g_m \in \Bbbk[Y]$. Рассмотрим такое соотношение с наименьшим возможным m. В нём $g_m \neq 0$, иначе его можно было бы сократить на f, ибо в $\Bbbk[X]$ нет делителей нуля. Вычисляя левую часть в точках $z \in Z$, видим, что $\varphi^*(g_m)|_Z = g_m|_{\varphi(Z)} \equiv 0$. Поэтому $\varphi(Z) \subset V(g_m) \subsetneq Y$ является собственным замкнутым подмножеством. □

5.4.4. Нормальные многообразия. Аффинное алгебраическое многообразие Y называется *нормальным*, если оно неприводимо и его координатная алгебра $\Bbbk[Y]$ целозамкнута в поле рациональных функций $\Bbbk(Y) = Q_{\Bbbk[Y]}$, т. е. является *нормальным кольцом* в смысле опр. 4.2 на стр. 61. Например, все аффинные многообразия с факториальными координатными алгебрами, в частности, все аффинные пространства[2] $\mathbb{A}^n$ нормальны.

Лемма 5.4
Всякий сюрьективный конечный морфизм $\varphi : X \to Y$ в нормальное многообразие Y открыт[3] и сюрьективно отображает каждую неприводимую компоненту X на Y.

Доказательство. Вложение $\varphi^* : \Bbbk[Y] \hookrightarrow \Bbbk[X]$ позволяет рассматривать $\Bbbk[Y]$ как подалгебру в $\Bbbk[X]$. Открытость морфизма φ означает, что образ каждого главного открытого множества из X содержит вместе с каждой точкой какую-нибудь её главную открытую окрестность в Y, т. е. для любой функции $f \in \Bbbk[X]$ и каждой точки $p \in X$, в которой $f(p) \neq 0$, мы должны указать такую функцию $a \in \Bbbk[Y]$, что $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$. Для этого рассмотрим отображение

$$\psi = \varphi \times f : X \to Y \times \mathbb{A}^1\,, \quad p \mapsto \big(\varphi(p), f(p)\big)\,.$$

Его гомоморфизм поднятия $\psi^* : \Bbbk[Y \times \mathbb{A}^1] = \Bbbk[Y][t] \to k[X]$ вычисляет полиномы от t с коэффициентами в $\Bbbk[Y]$ на элементе $f \in \Bbbk[X]$. По сл. 4.3 на стр. 61 минимальный многочлен μ_f элемента f над полем $\Bbbk(Y)$ лежит в $\Bbbk[Y]$. Поэтому гомоморфизм ψ^* представляет собою факторизацию по главному идеалу $(\mu_f) = \ker\psi^*$. Мы заключаем, что морфизм ψ конечен и сюрьективно отображает X на гиперповерхность, заданную в $Y \times \mathbb{A}^1$ уравнением

$$\mu_f(y;t) = t^m + a_1(y)\,t^{m-1} + \cdots + a_m(y) = 0\,,$$

[1] Ср. с доказательством лем. 4.2 на стр. 58.
[2] Включая точку $\mathbb{A}^0 = \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk$.
[3] Т. е. $\varphi(U)$ открыто в Y для любого открытого $U \subset X$.

а морфизм φ является композицией ψ и проекции $Y \times \mathbb{A}^1 \twoheadrightarrow Y$. Образ $\varphi(\mathcal{D}(f)) \subset Y$ состоит из всех таких точек $y \in Y$, что у многочлена $\mu_f(y;t) \in \Bbbk[t]$ есть ненулевой корень. Поскольку над точкой $\varphi(p) \in Y$ многочлен $\mu_f(\varphi(p);t) \in \Bbbk[t]$ имеет ненулевой корень $t = f(p)$, хоть один из коэффициентов, пусть это будет a_i, отличен от нуля в точке $\varphi(p)$. Тогда над всеми точками $q \in \mathcal{D}(a_i) \subset Y$ коэффициент $a_i(q)$ тоже отличен от нуля, и у многочлена $\mu_f(q;t) \in \Bbbk[t]$ также есть ненулевой корень. Поэтому все такие точки q лежат в образе множества $\mathcal{D}(f)$, а значит, $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a_i) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$, как и требовалось.

Что касается ограничения φ на неприводимые компоненты $X_i \subset X$, то для каждого i множество $U_i = X \smallsetminus \bigcup_{\nu \neq i} X_\nu = X_i \smallsetminus \bigcup_{\nu \neq i}(X_i \cap X_\nu)$ открыто в X и плотно в X_i. Поскольку $\varphi(U_i)$ открыто, а Y неприводимо, $\varphi(U_i)$ плотно в Y, откуда $\varphi(X_i) = \overline{\varphi(U_i)} = Y$. $\square$

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 5.2. Если $a^n = 0$ и $b^m = 0$, то $(a+b)^{m+n-1} = 0$ и $(ca)^n = 0$ для любого $c \in A$.

Упр. 5.3. Так как для простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ фактор кольцо $A/\mathfrak{p}$ не имеет делителей нуля, гомоморфизм факторизации $A \twoheadrightarrow A\mathfrak{p}$ аннулирует все нильпотенты. Поэтому $\mathfrak{n}(A) \subset \bigcap \mathfrak{p}$. Если элемент $a \in A$ не является нильпотентом, его неотрицательные целые степени a^m образуют содержащее единицу и не содержащее нуля мультипликативно замкнутое подмножество в A. Локализация $A[a^{-1}]$ кольца A по этому мультипликативно замкнутому подмножеству[1] является ненулевым коммутативным кольцом с единицей. Полный прообраз любого простого идеала $\mathfrak{m} \subset A[a^{-1}]$ относительно канонического гомоморфизма $A \to A[a^{-1}]$ является не содержащим элемента a простым идеалом в кольце A.

Упр. 5.7. Это геометрическая версия китайской теоремы об остатках. Отображение $\varphi : \Bbbk[X] \hookrightarrow \Bbbk[Y] \times \Bbbk[Z]$, переводящее $f \in \Bbbk[X]$ в пару $(f|_Y, f|_Z)$, инъективно, т. к. $Y \cup Z = X$. По теореме Гильберта нулях идеал $I(Y) + I(Z) \subset \Bbbk[X]$, задающий в X пересечение $Y \cap Z = \varnothing$, содержит единицу, т. е. существуют такие $s \in I(Y)$ и $t \in I(Z)$, что $1 = s + t$. Тогда $\varphi(s) = \varphi(1-t) = (0,1)$ и $\varphi(t) = \varphi(1-s) = (1,0)$, а произвольная пара классов $(f \pmod{I(Y)}, g \pmod{I(Z)}) \in \Bbbk[Y] \times \Bbbk[Z]$ равна $\varphi(ft + gs)$, что означает сюрьективность φ.

Упр. 5.10. Первые три равенства и включения $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J) \subset V(IJ) \subset V(I) \cup V(J)$ очевидны из определений.

Упр. 5.11. Если $V(f) = X$, то $f \in I(X)$, и значит, $f = 0$ в $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X)$. Если $V(f) = \varnothing$, то множество нулей идеала $J \subset \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, порождённого идеалом $I(X)$ и многочленом f пусто, и из слабой теоремы о нулях вытекает, что $1 \equiv sf \pmod{I(X)}$ для некоторого $s \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, т. е. f обратим в $\Bbbk[X]$.

Упр. 5.12. $Y = (Y \cap Z) \cup \overline{Y \smallsetminus Z}$, где по условию $Y \cap Z \neq Y$.

Упр. 5.13. Иначе $X = (X \smallsetminus U) \cup V(f-g)$.

Упр. 5.16. Если $V = \cup W_i$ и $\xi_i \in V^*$ — такие ненулевые линейные формы, что $W_i \subsetneq \operatorname{Ann} \xi_i$, то ненулевой многочлен $f = \prod \xi_i$ тождественно зануляется на $\mathbb{A}(V)$.

Упр. 5.17. Используйте покрытие $U = \bigcup \mathcal{D}(x_i)$ и предл. 5.6.

Упр. 5.18. Каждое пересечение $I \cap I(X_i)$ является собственным векторным подпространством в I, поскольку включение $I \subset I(X_\nu)$ означало бы, что $X_\nu \subset \bigcup_{i \neq j}(X_i \cap X_j)$, а это в силу непроводимости X_ν влечёт включение $X_\nu \subset X_i \cap X_j$ для некоторых $i \neq j$, что невозможно, т. к. ни одна из неприводимых компонент не содержится в другой. Если все неделители нуля в I лежат в собственном подпространстве, то I оказывается объединением конечного числа собственных подпространств.

Упр. 5.19. Элемент прямого произведения не делит нуль если и только если каждая из его компонент не делит нуль: $S^{-1}_{K_1 \times \ldots \times K_k} = S^{-1}_{K_1} \times S^{-1}_{K_2} \times \dots \times S^{-1}_{K_k}$.

Упр. 5.21. Пусть $A = \Bbbk[X]$, $B = \Bbbk[Y]$. Вложение $\varphi^* : B \hookrightarrow A$ задаёт на A структуру конечно порождённой B-алгебры, т. е. представляет A в виде $A \simeq B[x_1, \dots, x_m]/J$, что и утверждается.

[1] Т. е. кольцо дробей вида b/a^m с $b \in A$, $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.