

А. Л. Городенцев\*

# Геометрическое введение в алгебраическую геометрию

Цель этого курса — знакомство с классическими примерами проективных многообразий, геометрическими свойствами абстрактных алгебраических многообразий и морфизмов между ними, а также с современным языком схем. Курс задумывался одновременно и как трамплин для тех, кто собирается в дальнейшем посещать более продвинутые курсы и семинары по алгебраической геометрии, и как дайджест алгебраической геометрии, адресованный тем, кто специализируется в других областях, но хотел бы освоиться с языком алгебраической геометрии и её простейшими инструментами.

Факультет математики НИУ ВШЭ  
осень 2025 г

---

\* ВШЭ, ИТЭФ, НМУ, [e-mail:gorod@itep.ru](mailto:gorod@itep.ru), <http://gorod.bogomolov-lab.ru/>

## Оглавление

Оглавление . . . . .	2
§1 Напоминания из проективной геометрии . . . . .	3
1.1 Соглашения об обозначениях . . . . .	3
1.2 Проективное пространство . . . . .	3
1.3 Проективные преобразования . . . . .	8
1.4 Задание фигур полиномиальными уравнениями . . . . .	12
1.5 Касательные и поляры к проективным гиперповерхностям . . . . .	16
§2 Проективные квадрики . . . . .	20
2.1 Напоминания из линейной алгебры и геометрии . . . . .	20
2.2 Коники . . . . .	26
2.3 Квадратичные поверхности . . . . .	28
2.4 Пучки квадрик . . . . .	29
2.5 Гиперповерхность особых квадрик . . . . .	33
2.6 Рабочий пример: регулярные пучки квадрик . . . . .	35
§3 Многообразия Веронезе, Грассмана и Сегре . . . . .	38
3.1 Напоминания из полилинейной алгебры . . . . .	38
3.2 Грассманианы . . . . .	46
3.3 Рабочий пример: квадрика Плюккера . . . . .	50
3.4 Многообразия Веронезе и Сегре . . . . .	54
§4 Порция коммутативной алгебры . . . . .	57
4.1 Нётеровы кольца . . . . .	57
4.2 Целые элементы . . . . .	58
4.3 Конечно порождённые алгебры над полем . . . . .	61
4.4 Нули многочленов . . . . .	64
4.5 Системы результатов . . . . .	66
§5 Аффинная алгебраическая геометрия . . . . .	69
5.1 Аффинный алгебро-геометрический словарь . . . . .	69
5.2 Топология Зарисского . . . . .	75
5.3 Рациональные функции . . . . .	78
5.4 Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр . . . . .	80
§6 Алгебраические многообразия . . . . .	84
6.1 Определения и примеры . . . . .	84
6.2 Проективные многообразия . . . . .	88
6.3 Размерность . . . . .	93
6.4 Размерности проективных многообразий . . . . .	98
6.5 Отступление: 27 прямых на гладкой кубической поверхности . . . . .	100
Ответы и указания к некоторым упражнениям . . . . .	104

## §1. Напоминания из проективной геометрии

**1.1. Соглашения об обозначениях.** Всюду далее мы обозначаем через  $V$  векторное пространство над произвольным полем  $\mathbb{k}$ , а через  $V^*$  — двойственное пространство однородных линейных функций  $V \rightarrow \mathbb{k}$ . Значение ковектора  $\varphi \in V^*$  на векторе  $v \in V$  обозначается одним из трёх способов:  $\varphi(v) = \langle \varphi, v \rangle = \text{ev}_v(\xi)$ . Через  $e_0, e_1, \dots, e_n$  и  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , где  $n + 1 = \dim V$ , по умолчанию обозначаются двойственные базисы пространств  $V$  и  $V^*$ , так что

$$\langle x_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Через  $\mathbb{A}(V)$  мы обозначаем ассоциированное с  $V$  *аффинное пространство*<sup>1</sup>. Через

$$SV^* = \bigoplus_{d \geq 0} S^d V^* \simeq \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

обозначается *симметрическая алгебра* пространства  $V^*$ , изоморфная алгебре *многочленов* от переменных  $x_i$ . Она градуирована подпространствами  $S^m V^* \subset SV^*$  *однородных многочленов* степени  $m$ . Пространство  $S^m V^*$  называется  *$m$ -той симметрической степенью* пространства  $V^*$  и представляет собою  $\mathbb{k}$ -линейную оболочку всевозможных произведений  $\varphi_1 \dots \varphi_m$ , составленных из  $m$  ковекторов  $\varphi_i \in V^*$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.1. Найдите  $\dim S^m V$ , если  $\dim V = n$ .

**1.2. Проективное пространство.** Со всяким  $(n + 1)$ -мерным векторным пространством  $V$  помимо  $(n + 1)$ -мерного аффинного пространства  $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$  связано  $n$ -мерное *проективное пространство*  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ , точками которого по определению являются одномерные векторные подпространства в  $V$  или, что то же самое, проходящие через начало координат аффинные прямые в  $\mathbb{A}(V)$ . Чтобы видеть их как «обычные» точки, внутрь  $\mathbb{A}(V)$  следует поместить экран — не содержащую начала координат аффинную гиперплоскость  $U_\xi \subset \mathbb{A}(V)$ , задаваемую неоднородным линейным уравнением  $\xi(x) = 1$ , где  $\xi \in V^*$  — любая ненулевая линейная форма на  $V$  (см. рис. 1◊1).

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Убедитесь, что соответствие  $\xi \mapsto U_\xi$  задаёт биекцию между ненулевыми ковекторами  $\xi \in V^*$  и не проходящими через начало координат аффинными гиперплоскостями в  $\mathbb{A}(V)$ .

Всякий такого рода экран  $U_\xi$  называется *аффинной картой* на  $\mathbb{P}(V)$ . В карте  $U_\xi$  видны все одномерные подпространства, порождённые векторами  $v \in V$  с  $\xi(v) \neq 0$ . Дополнение  $\mathbb{P}_n \setminus U_\xi$  состоит из одномерных подпространств  $n$ -мерного векторного подпространства  $\text{Ann}(\xi) = \{v \in V \mid \langle \xi, v \rangle = 0\}$  — проходящей через начало координат параллельной копии гиперплоскости  $U_\xi$ . Эти одномерные подпространства составляют  $(n - 1)$ -мерное проективное пространство  $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}(\text{Ann}(\xi))$ , которое называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью* карты  $U_\xi$ . Точки  $\mathbb{P}(\text{Ann} \xi)$  можно воспринимать

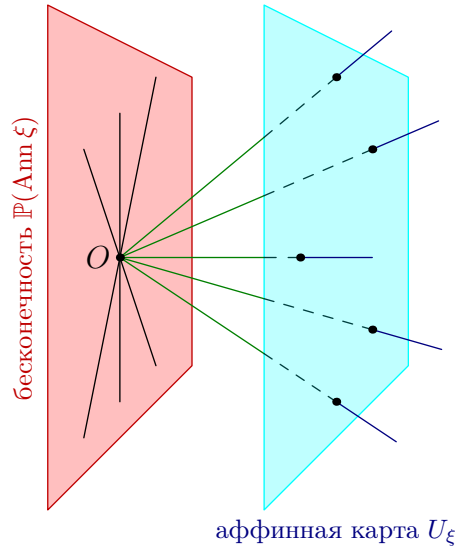


Рис. 1◊1. Проективный мир.

<sup>1</sup>Его точки, по определению, взаимно однозначно соответствуют векторам из  $V$ , и их можно представлять себе как «концы» этих векторов, отложенных от отвечающей нулевому вектору точки  $O \in \mathbb{A}(V)$ .

как *направления* в аффинной карте  $U_\xi$ . Итак,  $n$ -мерное проективное пространство  $\mathbb{P}_n$  разбивается в дизъюнктное объединение аффинных пространств всех промежуточных размерностей:  $\mathbb{P}_n = U_\xi \sqcup \mathbb{P}(\text{Ann } \xi) = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \dots = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}^0$ , где  $\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}_0$  — это одна точка.

**УПРАЖНЕНИЕ 1.3.** Какое соотношение на  $q$  получится, если независимо подсчитать количества точек, из которых состоят левая и правая части этого разбиения над конечным полем из  $q$  элементов?

### 1.2.1. Глобальные однородные координаты. Ненулевые векторы

$$v = (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad w = (y_0, y_1, \dots, y_n),$$

заданные строками своих координат в каком-нибудь базисе  $e_0, e_1, \dots, e_n$  пространства  $V$ , изображаются одной и той же точкой  $p \in \mathbb{P}_n$ , если и только если их координаты пропорциональны, что означает равенство отношений<sup>1</sup>  $x_\mu : x_\nu = y_\mu : y_\nu$  для всех  $0 \leq \mu \neq \nu \leq n$ . Таким образом, точке  $p \in \mathbb{P}_n$  корректно соответствует не набор из  $n + 1$  координат, а набор из  $n$  отношений  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  между ними. Эти отношения называется *однородными координатами* точки  $p$  в базисе  $e_0, e_1, \dots, e_n$ .

### 1.2.2. Локальные аффинные координаты. Рассмотрим на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинную карту

$$U_\xi = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}(V) \mid \xi(x) = 1\},$$

отвечающую какому-нибудь ненулевому ковектору  $\xi \in V^*$ . Любые  $n$  ковекторов  $\xi_1, \dots, \xi_n \in V^*$ , таких что  $\xi, \xi_1, \dots, \xi_n$  образуют базис в  $V^*$ , задают внутри карты  $U_\xi$  *локальные аффинные координаты*. А именно, если векторы  $e_0, e_1, \dots, e_n \in V$  составляют двойственный к  $\xi, \xi_1, \dots, \xi_n$  базис, то точка  $e_0 \in U_\xi$  будет началом отсчёта аффинной координатной системы, а векторы  $e_1, \dots, e_n$  будут базисными векторами в векторном пространстве  $\text{Ann } \xi$ , с которым ассоциировано аффинное пространство  $U_\xi$ . Чтобы вычислить локальные аффинные координаты точки  $p \in \mathbb{P}_n$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ , следует выбрать в одномерном подпространстве  $p$  единственный вектор  $v = p / \xi(p) \in U_\xi$  с  $\xi(v) = 1$  и вычислить значения  $n$  линейных форм  $\xi_\nu$  на этом векторе. Отметим, что получающиеся таким образом значения локальных аффинных координат  $x_i(p) = \xi_i(v) = \xi_i(p) / \xi(p)$  зависят от однородных координат точки  $p$  *нелинейно*.

**ПРИМЕР 1.1 (ПРОЕКТИВНАЯ ПРЯМАЯ)**

Прямая  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$  покрывается двумя аффинными картами  $U_0 = U_{x_0}$  и  $U_1 = U_{x_1}$ , представляющими собою аффинные прямые с уравнениями  $x_0 = 1$  и  $x_1 = 1$  (см. [рис. 1♦2](#)). Карта  $U_0$  покрывает все точки  $\mathbb{P}_1$  кроме вертикальной координатной оси  $(0 : 1)$ , которая является единственной бесконечно удалённой точкой для карты  $U_0$ . Точка  $(x_0 : x_1)$  с  $x_0 \neq 0$  видна в карте  $U_1$  как  $\left(1 : \frac{x_1}{x_0}\right)$  и функция  $t = x_1|_{U_0} = x_1/x_0$  может использоваться в качестве локальной аффинной координаты в этой карте. Карта  $U_1$  покрывает все точки  $(x_0 : x_1) = (x_0/x_1 : 1)$  с  $x_1 \neq 0$ , и функция  $s = x_0|_{U_1} = x_0/x_1$  годится в качестве локальной координаты в  $U_1$ . Единственной бесконечно удалённой точкой для карты  $U_1$  является горизонтальная координатная ось  $(1 : 0)$ . Координаты  $s$  и  $t$  одной и той же точки  $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$ , видимой сразу в обеих картах, связаны соотношением  $s = 1/t$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 1.4.** Убедитесь в этом.

<sup>1</sup>Где равенства вида  $0 : x = 0 : y$  и  $x : 0 = y : 0$  также допускаются.

Поэтому  $\mathbb{P}_1$  можно воспринимать как результат склейки двух аффинных координатных прямых  $\mathbb{A}^1$  (одна — с координатой  $s$ , другая — с координатой  $t$ ) вдоль дополнения до начала координат по следующему правилу: точка с координатой  $s$  на одной прямой приклеивается к точке с координатой  $t = 1/s$  на другой.

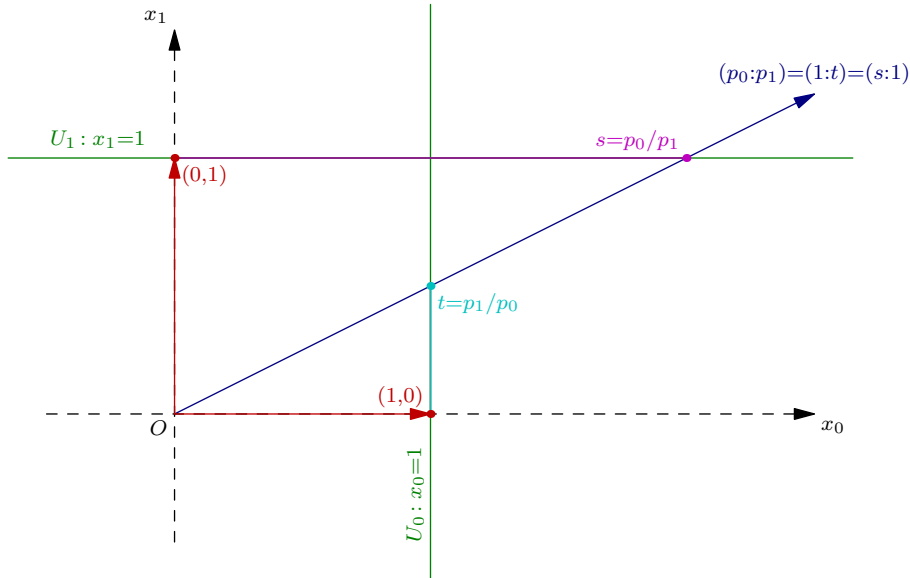


Рис. 1◊2. Стандартные карты на  $\mathbb{P}_1$ .

Если основное поле  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ , то в результате такой склейки мы получим окружность диаметра 1, картами на которой служат две диаметрально противоположные касательные прямые<sup>1</sup>, а отображения окружности на карты суть центральные проекции из точек, диаметрально противоположных к точке касания этой карты с окружностью.

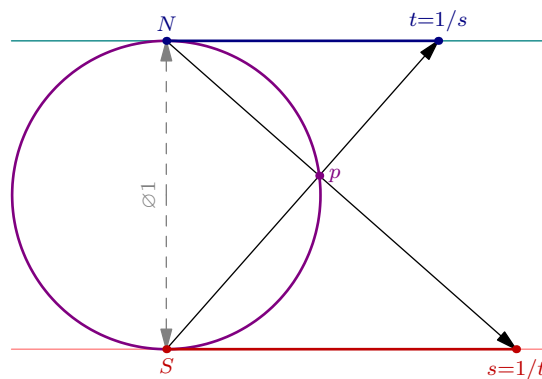


Рис. 1◊3.  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$ .

Точно также при  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  в результате склейки двух экземпляров комплексной аффинной прямой  $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$  по правилу  $s \leftrightarrow t = 1/s$  мы получим сферу диаметра 1, для которой наши карты являются диаметрально противоположными касательными плоскостями, а сопоставление точке сферы точки на карте задаётся центральной проекцией из диаметрально противоположного к

<sup>1</sup>См. рис. 1◊3 на стр. 5.

точке касания «полюса» сферы, как на рис. 1◊4: если ориентации касательных плоскостей выбраны согласованным образом, как на рис. 1◊4, комплексные числа  $s$  и  $t$  будут иметь противоположные аргументы и — согласно рис. 1◊3 — обратные модули.

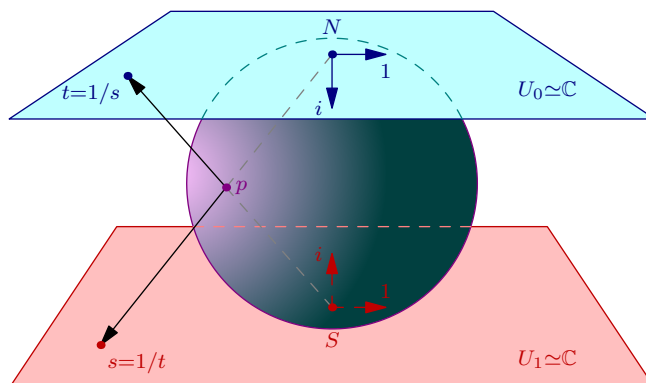


Рис. 1◊4.  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$ .

ПРИМЕР 1.2 (СТАНДАРТНОЕ АФФИННОЕ ПОКРЫТИЕ  $\mathbb{P}_n$ )

Набор из  $(n+1)$  аффинных карт  $U_\nu = U_{x_\nu}$ , задаваемых в  $\mathbb{A}^{n+1}$  уравнениями  $\{x_\nu = 1\}$ , называется *стандартным открытым покрытием*  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1})$ . Для каждого  $\nu = 0, 1, \dots, n$  в качестве стандартных локальных аффинных координат на  $U_\nu$  берутся  $n$  форм

$$t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = \frac{x_i}{x_\nu} \quad \text{с } 0 \leq i \leq n, i \neq \nu.$$

Таким образом, пространство  $\mathbb{P}_n$  можно представлять себе как результат склейки  $(n+1)$  различных копий  $U_0, U_1, \dots, U_n$  аффинного пространства  $\mathbb{A}^n$  по их фактическим пересечениям внутри  $\mathbb{P}_n$ . В однородных координатах на  $\mathbb{P}_n$  пересечение  $U_\mu \cap U_\nu$  состоит из всех таких  $x$ , у которых обе координаты  $x_\mu$  и  $x_\nu$  не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на  $U_\mu$  и  $U_\nu$  это подмножество задаётся, соответственно, неравенствами  $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$  и  $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$ . При этом точка  $t^{(\mu)} \in U_\mu$  склеивается с точкой  $t^{(\nu)} \in U_\nu$ , если и только если  $t_\nu^{(\mu)} = 1/t_\mu^{(\nu)}$  и  $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)}/t_\mu^{(\nu)}$  для  $i \neq \mu, \nu$ . Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат  $t^{(\nu)}$  к локальным координатам  $t^{(\mu)}$ .

ПРИМЕР 1.3 (АФФИННЫЕ КОНИКИ)

Посмотрим как выглядит в различных аффинных картах плоская проективная кривая  $C$  второй степени, заданная в однородных координатах на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 \tag{1-1}$$

В стандартной карте  $U_{x_1}$ , где  $x_1 = 1$ , в локальных координатах

$$t_0 = x_0|_{U_{x_1}} = x_0/x_1, \quad t_2 = x_2|_{U_{x_1}} = x_2/x_1$$

уравнение (1-1) превращается в уравнение гиперболы  $t_2^2 - t_0^2 = 1$ . В стандартной карте  $U_{x_2}$ , где  $x_2 = 1$ , с локальными координатами  $t_0 = x_0|_{U_{x_2}} = x_0/x_2$ ,  $t_1 = x_1|_{U_{x_2}} = x_1/x_2$  возникает уравнение окружности  $t_0^2 + t_1^2 = 1$ . В карте  $U_{x_1+x_2}$ , где  $x_1 + x_2 = 1$ , в локальных аффинных координатах

$$t = x_0|_{U_{x_1+x_2}} = x_0/(x_1 + x_2), \quad u = (x_2 - x_1)|_{U_{x_1+x_2}} = (x_2 - x_1)/(x_2 + x_1)$$

получается<sup>1</sup> уравнение параболы  $t^2 = u$ . Таким образом, аффинные эллипс, гипербола и парабола суть изображения одной и той же проективной кривой (1-1) в различных картах. Вид  $C$  в карте  $U \subset \mathbb{P}_2$  определяется тем, как располагается по отношению к  $C$  бесконечно удалённая прямая этой карты: эллипс, парабола и гипербола возникают, соответственно, когда эта прямая не пересекается с  $C$ , касается  $C$  и пересекается с  $C$  в двух различных точках (см. рис. 1◊5).

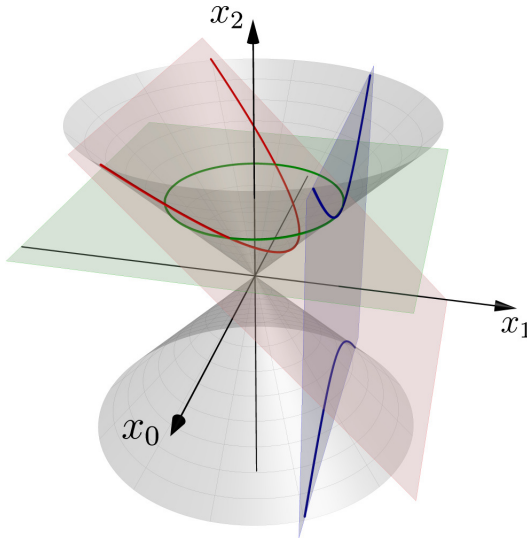


Рис. 1◊5. Аффинные коники.

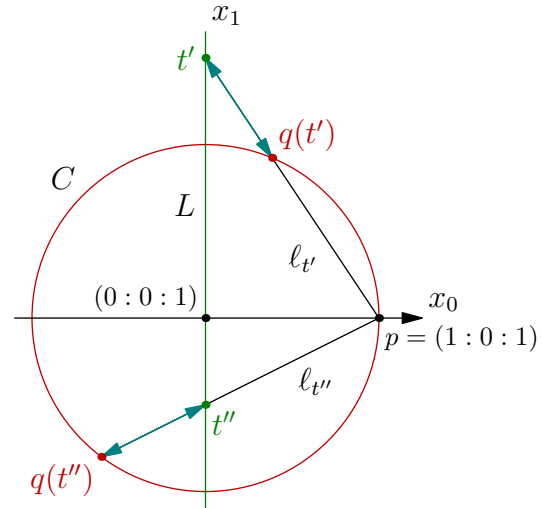


Рис. 1◊6. Проекция коники на прямую.

1.2.3. Дополнительные подпространства и проекции. Проективные подпространства

$$K = \mathbb{P}(U) \quad \text{и} \quad L = \mathbb{P}(W)$$

в  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  называются *дополнительными*, если  $K \cap L = \emptyset$  и  $\dim K + \dim L = n - 1$ . Например, любые две непересекающиеся прямые в  $\mathbb{P}_3$  дополнительные. На языке линейной алгебры дополнительность означает, что  $U \cap W = 0$  и  $\dim U + \dim W = \dim V$ , т. е.  $V = U \oplus W$ . В этом случае любой вектор  $v \in V$  имеет единственное разложение  $v = u + w$  с  $u \in U$  и  $w \in W$ , и если  $v$  не содержится ни в  $U$ , ни в  $W$ , то обе компоненты этого разложения отличны от нуля. Геометрически это означает, что для любой точки  $p \notin K \sqcup L$  существует единственная проходящая через  $p$  прямая  $\ell = (q, r)$ , пересекающая оба подпространства  $K, L$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.5. Убедитесь в этом.

Для каждой пары дополнительных подпространств  $K, L \subset \mathbb{P}_n$  проекция на  $L$  из  $K$

$$\pi_L^K : (\mathbb{P}_n \setminus K) \rightarrow L,$$

тождественно действует на  $L$  и переводит каждую точку  $p \in \mathbb{P}_n \setminus (K \sqcup L)$  в точку пересечения с  $L$  той единственной прямой, что проходит через  $p$  и пересекает  $K$  и  $L$ . В однородных координатах  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ , согласованных с разложением  $V = U \oplus W$  так, что  $(x_0 : x_1 : \dots : x_m)$  являются координатами в  $K$ , а  $(x_{m+1} : x_{m+2} : \dots : x_n)$  — координатами в  $L$ , проекция  $\pi_L^K$  просто удаляет первые  $(m + 1)$  координат  $x_v$  с  $0 \leq v \leq m$ .

<sup>1</sup>Надо перенести  $x_1^2$  в (1-1) слева направо и поделить обе части на  $x_2 + x_1$ .

ПРИМЕР 1.4 (ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОНИКИ НА ПРЯМУЮ)

Спроектируем гладкую конику  $C$  из прим. 1.3 из точки  $p = (1 : 0 : 1) \in C$  на прямую  $L$ , заданную уравнением  $x_0 = 0$ . В стандартной аффинной карте  $U_2$ , где  $x_2 = 1$ , эта проекция  $\pi_L^p : C \rightarrow L$  выглядит как на рис. 1◊б. Она является бирациональной биекцией между  $L$  и  $C$ , т. е. однородные координаты соответственных точек  $q = (q_0 : q_1 : q_2) \in C$  и  $t = (0 : t_1 : t_2) = \pi_L^p(q) \in L$  суть рациональные алгебраические функции друг друга:

$$\begin{aligned} (t_1 : t_2) &= (q_1 : (q_2 - q_0)) \\ (q_0 : q_1 : q_2) &= ((t_1^2 - t_2^2) : 2t_1t_2 : (t_1^2 + t_2^2)) \end{aligned} \quad (1-2)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Проверьте эти формулы и убедитесь, что когда пара  $(t_1, t_2)$  пробегает  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , тройка  $(q_0 : q_1 : q_2)$  пробегает все пифагоровы тройки<sup>1</sup> с точностью до пропорциональности.

а само отображение  $\pi_L^p : C \rightarrow L$  взаимно однозначно, если доопределить его в точке  $p$  так, чтобы она переходила в точку пересечения прямой  $L$  и касательной к  $C$  в точке  $p$  прямой  $x_0 = x_2$  (на рис. 1◊б это пересечение происходит в бесконечной точке  $t = (0 : 1 : 0)$ ). В самом деле, каждая проходящая через  $p$  прямая  $\ell_t = (pt)$ , за исключением касательной, пересекает  $C$  ещё ровно в одной точке  $q = q(t)$ , отличной от  $p$ , и координаты этой точки  $q$  рационально выражаются через коэффициенты уравнения прямой  $\ell_t$ , являющиеся рациональными функциями от  $t$ , и координаты точки  $p$ .

**1.2.4. Проективная двойственность.** Пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  и  $\mathbb{P}_n^\times \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V^*)$  называются двойственными проективными пространствами. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом: однородное линейное уравнение  $\langle \xi, v \rangle = 0$  на  $\xi \in V^*$  и  $v \in V$  при фиксированном  $\xi \in \mathbb{P}_n^\times$  задаёт гиперплоскость в  $\mathbb{P}_n$ , а при фиксированном  $v \in \mathbb{P}_n$  — гиперплоскость в  $\mathbb{P}_n^\times$ , состоящую из всех гиперплоскостей в  $\mathbb{P}_n$ , проходящих через точку  $v \in \mathbb{P}_n$ . Из курса линейной алгебры известно, что соответствие  $U \rightleftharpoons \text{Ann}(U)$  устанавливает обратную биекцию между векторными подпространствами дополнительных размерностей в двойственных пространствах  $V$  и  $V^*$ . При переходе к проективизациям для каждого  $m = 0, 1, \dots, (n-1)$  возникает биекция между  $m$ -мерными проективными подпространствами в  $\mathbb{P}_n$  и  $(n-1-m)$ -мерными проективными подпространствами в  $\mathbb{P}_n^\times$ , переводящая проективное подпространство  $L = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_n$  в проективное подпространство  $L^\times = \mathbb{P}(\text{Ann}(U)) \subset \mathbb{P}_n^\times$ , образованное всеми гиперплоскостями, содержащими  $L$ . Такая проективная двойственность позволяет переговаривать геометрические утверждения в двойственные геометрические утверждения. Например, условие коллинеарности трёх точек двойственно условию наличия у трёх гиперплоскостей общего подпространства коразмерности 2.

**1.3. Проективные преобразования.** Всякий линейный изоморфизм векторных пространств  $F : U \rightarrow W$  корректно определяет биекцию  $\bar{F} : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ , которая называется проективным изоморфизмом или проективным преобразованием.

УПРАЖНЕНИЕ 1.7. Рассмотрим две гиперплоскости  $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  и точку  $p \notin L_1 \cup L_2$ . Убедитесь, что проекция из  $p$  задаёт проективный изоморфизм  $\gamma_p : L_1 \rightarrow L_2$ .

ЛЕММА 1.1

Для любых двух упорядоченных наборов  $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{P}(U)$ ,  $q_0, q_1, \dots, q_{n+1} \in \mathbb{P}(W)$  из  $n+2$  точек, в каждом из которых никакие  $n+1$  точек не лежат в одной гиперплоскости, существует

<sup>1</sup>Т. е. все целые решения уравнения Пифагора  $q_0^2 + q_1^2 = q_2^2$

единственный с точностью до пропорциональности такой линейный изоморфизм  $F : U \simeq W$ , что  $\bar{F}(p_i) = q_i$  при всех  $i$ .

**Доказательство.** Зафиксируем представляющие точки  $p_i$  и  $q_i$  векторы  $u_i$  и  $w_i$ . Тогда наборы векторов  $u_0, u_1, \dots, u_n$  и  $w_0, w_1, \dots, w_n$  являются базисами в  $U$  и  $W$ . Оператор  $F : U \rightarrow W$  переводит точку  $p_i$  в точку  $q_i$ , если и только если  $F(u_i) = \lambda_i w_i$  для некоторого ненулевого  $\lambda_i \in \mathbb{k}$ . Для того, чтобы точки  $p_0, p_1, \dots, p_n$  переводились преобразованием  $\bar{F}$  в точки  $q_0, q_1, \dots, q_n$ , необходимо и достаточно, чтобы оператор  $F$  имел в указанных выше базисах диагональную матрицу с произвольными ненулевыми константами  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  на главной диагонали. Заметим теперь, что все координаты  $x_i$  в разложении  $u_{n+1} = x_0 u_0 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$  отличны от нуля, поскольку в противном случае  $n+1$  из точек<sup>1</sup>  $p_i$  оказались бы в одной координатной гиперплоскости. Если аналогичным образом разложить вектор  $w_{n+1} = y_0 w_0 + y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$  и записать равенство  $F(u_{n+1}) = \lambda_{n+1} w_{n+1}$  в виде системы равенств на координаты, мы получим на константы  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$  соотношения  $y_i = \lambda_{n+1} \lambda_i x_i$ , из которых  $\lambda_i = \lambda_{n+1}^{-1} \cdot y_i / x_i$  при всех  $0 \leq i \leq n$ , т. е. матрица оператора  $F$  определена однозначно с точностью до множителя  $\lambda_{n+1}^{-1} \neq 0$ .  $\square$

**Следствие 1.1**

Две матрицы тогда и только тогда задают одинаковые проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны.  $\square$

**1.3.1. Линейная проективная группа.** Согласно [лем. 1.1](#) линейные проективные автоморфизмы пространства  $\mathbb{P}(V)$  образуют группу, изоморфную фактор группе полной линейной группы  $GL(V)$  по подгруппе гомететий  $H = \{\lambda \cdot \text{Id} \mid \lambda \neq 0\} \subset GL(V)$ . Эта фактор группа обозначается  $PGL(V) = GL(V)/H$  и называется *проективной линейной группой*. Если при помощи выбора базиса отождествить линейную группу  $GL(V)$  с группой невырожденных матриц  $GL_{n+1}$ , проективная группа  $PGL(V)$  отождествится с группой  $PGL_{n+1}$  невырожденных матриц, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

**1.3.2. Гомографии.** Линейные проективные изоморфизмы между прямыми называются *гомографиями*.

**Упражнение 1.8.** Пусть точка  $p \in \mathbb{P}_2$  не лежит на прямой  $L \subset \mathbb{P}_2$ . Обозначим через  $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  прямую<sup>2</sup>, образованную всеми проходящими через  $p$  прямыми на  $\mathbb{P}_2$ . Покажите, что отображения  $p^\times \simeq L, \ell \mapsto \ell \cap L$ , является гомографией между прямыми  $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  и  $L \subset \mathbb{P}_2$ .

Другим простейшим примером гомографии является перспектива  $o : \ell_1 \simeq \ell_2$  между прямыми  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ , задаваемая проекцией из какой-нибудь точки  $o \notin \ell_1 \cup \ell_2$ , как на [рис. 1◊7](#). Это композиция гомографий  $\ell_1 \simeq o^\times \simeq \ell_2$  из [упр. 1.8](#).

**Лемма 1.2**

Гомография  $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$  между прямыми  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$  является перспективой, если и только если она переводит точку пересечения прямых  $\ell_1 \cap \ell_2$  в себя.

**Доказательство.** Обозначая через  $o$  точку пересечения прямых  $(a, \varphi(a))$  и  $(b, \varphi(b))$ , соединяющих произвольные точки  $a, b \in \ell_1 \setminus \ell_2$  с их образами  $\varphi(a), \varphi(b)$ , как на [рис. 1◊7](#). Согласно

<sup>1</sup>А именно, точка  $p_{n+1}$  и все точки  $p_i$  с номерами, отличными от номера занулившейся координаты вектора  $u_{n+1}$ .

<sup>2</sup>См. н° 1.2.4 на стр. 8.

лем. 1.1, каждая гомография однозначно определяется своим действием на три различные точки. Перспектива  $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$  действует на три точки  $a, b$  и  $\ell_1 \cap \ell_2$  так же, как и  $\varphi$ .  $\square$

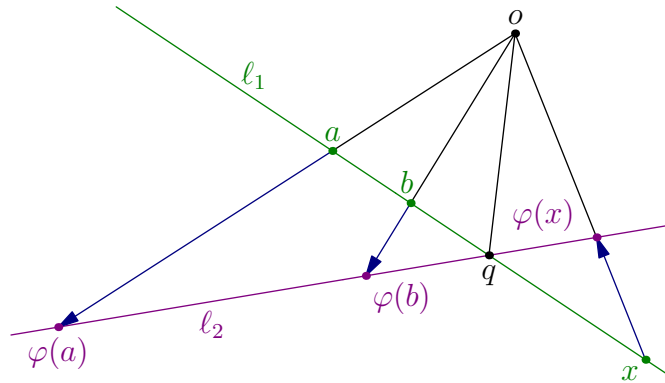


Рис. 1◊7. Перспектива.

Предложение 1.1 (Перекрёстная ось гомографии)

Каждая гомография  $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$  между прямыми  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$  раскладывается в композицию  $\varphi = b_1 \circ b_2$  двух перспектив  $b_2 : \ell_1 \rightarrow \ell$  и  $b_1 : \ell \rightarrow \ell_2$  с центрами в точках  $b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2$ , см. рис. 1◊8. При этом точку  $b_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2$  можно выбрать любой отличной от  $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$ , точка  $b_2 = \varphi(b_1)$ , а прямая  $\ell$  не зависит от выбора  $b_1$ , проходит через точки  $\varphi(\ell_1 \cap \ell_2)$  и  $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$  и представляет собою ГМТ пересечения «перекрёстных прямых»  $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$ , где  $x \neq y$  независимо пробегает  $\ell_1$ . Более того, любое разложение гомографии  $\varphi$  в композицию  $b_1 \circ b_2$  перспектив с центрами  $b_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2, b_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$  имеет именно такой вид.

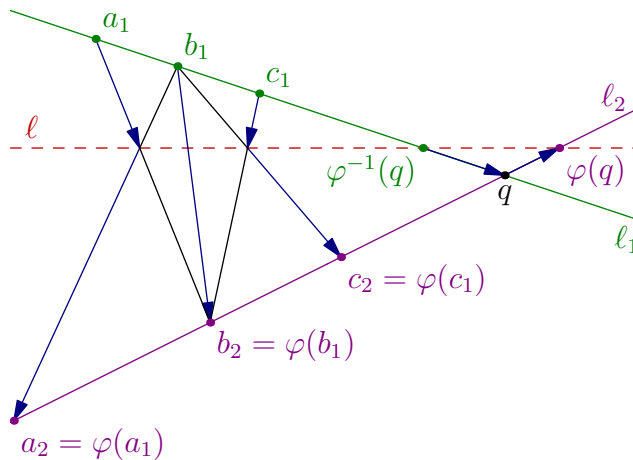


Рис. 1◊8. Перекрёстная ось.

Доказательство. Пусть три различные точки  $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$  и их образы  $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$  при гомографии  $\varphi$  таковы, что ни одна из этих шести точек не совпадает с точкой  $q = \ell_1 \cap \ell_2$ . Обозначим через  $\ell$  прямую, проходящую через точки  $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$  и  $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$ . Так как композиция перспектив  $b_1 \circ b_2$  переводит точки  $a_1, b_1, c_1$  в  $a_2, b_2, c_2$ , она совпадает с  $\varphi$ , см. рис. 1◊8. Мы заключаем, что прямая  $\ell$  проходит через точки<sup>1</sup>  $\varphi(q), \varphi^{-1}(q)$  и представляет собою ГМТ пересечения прямых  $(b_1 \varphi(x)) \cap (x \varphi(b_1))$ , где  $x \in \ell_1 \setminus b_1$ . Повторяя это же рассуждение для тройки

<sup>1</sup>Которые могут совпадать, если гомография  $\varphi$  перспектива.

$c_1, a_1, b_1$  вместо тройки  $a_1, b_1, c_1$ , как на рис. 1◊9, получим разложение  $\varphi = a_1 \circ a_2$  в композицию перспектив  $a_2: \ell' \rightarrow \ell$  и  $a_1: \ell' \rightarrow \ell_2$ , в котором прямая  $\ell'$  тоже проходит через точки  $\varphi(q)$ ,  $\varphi^{-1}(q)$  и представляет собою ГМТ пересечения прямых  $(a_1\varphi(y)) \cap (y\varphi(a_1))$ , где  $y \in \ell_1 \setminus a_1$ . Поскольку обе прямые  $\ell$  и  $\ell'$  проходят через (возможно совпадающие) точки  $\varphi(q)$ ,  $\varphi^{-1}(q)$ , а также через отличную от них точку  $(b_1a_2) \cap (a_1b_2)$ , эти прямые совпадают. Так как точки  $a_1$  и  $b_1$  выбирались произвольно, мы заключаем, что все разложения  $\varphi = (x: \ell \rightarrow \ell_2) \circ (\varphi(x): \ell_1 \rightarrow \ell)$  имеют одну и ту же прямую  $\ell$ , которая является ГМТ пересечения прямых  $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$ , где  $x \neq y$  независимо пробегает  $\ell_1$ . Последнее утверждение предложения вытекает из того, что в любом разложении  $\varphi = b_1 \circ b_2$  с  $b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2$  точка  $b_2 = \varphi(b_1)$ .  $\square$

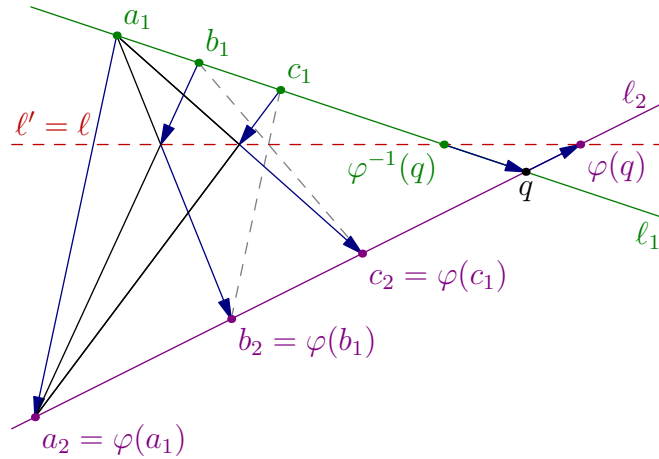


Рис. 1◊9. Равенство  $\ell' = \ell$ .

**1.3.3. Двойное отношение.** Линейная проективная группа  $\text{PGL}_2(\mathbb{k})$  состоит из классов пропорциональности матриц  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  с  $ad - bc \neq 0$ . Такая матрица действует на  $\mathbb{P}_1$  гомографией

$$\bar{A}: \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax_0 + bx_1 \\ cx_0 + dx_1 \end{pmatrix},$$

которая в стандартной аффинной карте  $U_1 \simeq \mathbb{A}^1$  с координатой  $t = x_0/x_1$  имеет вид дробно линейного преобразования  $t \mapsto (at + b)/(ct + d)$ . Единственное дробно линейное преобразование, переводящее три заданных различных точки  $q, r, s$  в  $\infty, 0, 1$ , имеет вид

$$t \mapsto \frac{t - r}{t - q} \cdot \frac{s - r}{s - q}. \quad (1-3)$$

Отметим, что разность аффинных координат  $a = a_0/a_1$  и  $b = b_0/b_1$  пары точек  $a = (a_0 : a_1)$  и  $b = (b_0 : b_1)$  на  $\mathbb{P}_1$  с точностью до множителя совпадает с определителем их однородных координат:

$$a - b = \frac{a_0}{a_1} - \frac{b_0}{b_1} = \frac{a_0b_1 - a_1b_0}{a_1b_1} = \frac{\det(a, b)}{a_1b_1}.$$

Для четырёх различных точек  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_1$  величина

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}{(p_1 - p_4)(p_2 - p_3)} = \frac{\det(p_1, p_3) \cdot \det(p_2, p_4)}{\det(p_1, p_4) \cdot \det(p_2, p_3)}. \quad (1-4)$$

называется *двойным отношением*<sup>1</sup> этих четырёх точек. Согласно (1-3), двойное отношение (1-4) представляет собою образ точки  $p_4$  при единственном дробно линейном автоморфизме  $\mathbb{P}_1$ , переводящем точки  $p_1, p_2, p_3$  в точки  $\infty, 0, 1$  соответственно. Отсюда сразу следует, что двойное отношение четырёх различных точек может принимать любые значения кроме  $\infty, 0$  и  $1$  и что две упорядоченных четвёрки точек тогда и только тогда переводятся одна в другую дробно линейным преобразованием прямой, когда их двойные отношения одинаковы.

Упражнение 1.9. Докажите последнее утверждение.

Поскольку замена однородных координат является именно таким преобразованием, мы заключаем, что правая часть равенства (1-4) не зависит от выбора однородных координат, а средняя часть (содержащая разности аффинных координат точек) не зависит ни от выбора аффинной карты, ни от выбора локальной аффинной координаты в ней (при условии, что карта содержит все четыре точки, т. е. значения  $p_1, p_2, p_3, p_4$  конечны).

Упражнение 1.10. Убедитесь, при действии симметрической группы  $S_4$  перестановками точек  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , четвертная подгруппа Клейна  $V_4 \subset S_4$  сохраняет двойное отношение этих точек, и если  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = \vartheta$ , то

$$\begin{aligned} [p_1, p_2, p_3, p_4] &= [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_2, p_1] = [p_4, p_3, p_2, p_1] = \vartheta \\ [p_2, p_1, p_3, p_4] &= [p_1, p_2, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_1, p_2] = 1/\vartheta \\ [p_3, p_2, p_1, p_4] &= [p_2, p_3, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_2, p_3] = [p_4, p_1, p_2, p_3] = \vartheta/(\vartheta - 1) \\ [p_4, p_2, p_3, p_1] &= [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_3, p_1, p_2, p_4] = [p_1, p_3, p_2, p_4] = 1 - \vartheta \\ [p_2, p_3, p_1, p_4] &= [p_3, p_2, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_3, p_2] = [p_4, p_1, p_3, p_2] = (\vartheta - 1)/\vartheta \\ [p_3, p_1, p_2, p_4] &= [p_1, p_3, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_4, p_2, p_1, p_3] = 1/(1 - \vartheta). \end{aligned} \quad (1-5)$$

**1.4. Задание фигур полиномиальными уравнениями.** С каждым вектором  $v \in V$  связано отображение вычисления  $ev_v : SV^* \rightarrow \mathbb{k}, f \mapsto f(v)$ , переводящее произведение линейных форм  $f = \varphi_1 \dots \varphi_m \in S^m V^*$  в произведение их значений  $f(v) \stackrel{\text{def}}{=} \prod \varphi(v)$  на векторе  $v$ . В терминах координат, значение многочлена  $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$  на векторе  $v$  равно результату подстановки вместо каждой переменной  $x_i$  значения  $i$ -той координаты вектора  $v$  в базисе пространства  $V$ , двойственном к базису  $x_0, x_1, \dots, x_n$  в  $V^*$ . Таким образом, каждый многочлен  $f \in SV^*$  задаёт функцию  $f : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}, v \mapsto f(v)$ , на аффинном пространстве  $\mathbb{A}(V)$ . Все такие функции называются *полиномиальными*.

Упражнение 1.11. Покажите, что над конечным полем  $\mathbb{k}$  любая функция  $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$  является полиномиальной, причём существуют ненулевые многочлены, задающие нулевую полиномиальную функцию. Напротив, над бесконечным полем имеются неполиномиальные функции  $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$ , а два многочлена задают одинаковые полиномиальные функции только когда они равны как многочлены.

**1.4.1. Аффинные многообразия.** Множество нулей многочлена  $f$  на аффинном пространстве  $\mathbb{A}(V)$  обозначается через  $V(f) = \{p \in \mathbb{A}(V) \mid f(p) = 0\}$  и называется *аффинной алгебраической гиперповерхностью*. Пересечения аффинных алгебраических гиперповерхностей, т. е. множества решений систем полиномиальных уравнений на координаты, называются *аффинными алгебраическими многообразиями*. Например, аффинными многообразиями являются аффинные подпространства — они задаются системами линейных уравнений.

<sup>1</sup>По-английски *cross-ratio*.

**1.4.2. Проективные многообразия.** На проективном пространстве  $\mathbb{P}(V)$  отличный от константы многочлен от однородных координат обычно *не задаёт* никакой функции, т. к. значение  $f(\lambda v)$  зависит от  $\lambda$ . Тем не менее, для любого *однородного* многочлена  $f$  степени  $d$  множество его нулей  $V(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid f(v) = 0\}$  является корректно определённым подмножеством в  $\mathbb{P}(V)$ , поскольку  $f(v) = 0 \iff f(\lambda v) = \lambda^d f(v) = 0$ . Иначе говоря, аффинная гиперповерхность  $V(f) \subset \mathbb{A}(V)$ , заданная однородным многочленом  $f$ , представляет собой конус, образованный проходящими через начало координат прямыми, которые являются точками проективного пространства. Множество этих точек  $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$  называется *проективной алгебраической гиперповерхностью* степени  $\deg f$ . Пересечения проективных гиперповерхностей, т. е. множества рассматриваемых с точностью до пропорциональности ненулевых решений систем однородных полиномиальных уравнений, называются *проективными алгебраическими многообразиями*.

Простейшие примеры проективных многообразий — это задаваемые системами однородных линейных уравнений *проективные подпространства*  $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$ , ассоциированные с векторными подпространствами  $U \subset V$ . Так, проективная прямая  $(ab)$  представляет собою проективизацию линейной оболочки векторов  $a$  и  $b$ , т. е. состоит из всевозможных точек вида  $\lambda a + \mu b$ , и может быть задана системой линейных уравнений  $\xi(x) = 0$ , где  $\xi$  пробегает подпространство  $\text{Ann}(a) \cap \text{Ann}(b)$  или какой-нибудь базис в этом подпространстве. Отношение  $(\lambda : \mu)$  коэффициентов из разложения вектора  $\lambda a + \mu b \in (a, b)$  можно использовать в качестве внутренней однородной координаты на прямой  $(ab)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.12. Покажите, что для любых двух проективных подпространств  $K, L \subset \mathbb{P}_n$  выполняется неравенство  $\dim(K \cap L) \geq \dim K + \dim L - n$  (в частности, любые две прямые на  $\mathbb{P}_2$  пересекаются).

**1.4.3. Проективное замыкание аффинной гиперповерхности**  $S = V(f) \subset \mathbb{A}^n$  это проективная гиперповерхность  $\bar{S} = V(\bar{f}) \subset \mathbb{P}_n$ , задаваемая однородным многочленом  $\bar{f}$  степени  $d = \deg f$ , пересечение которой со стандартной аффинной картой  $U_0$  совпадает с  $X$ . Если

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, \dots, x_n) + f_2(x_1, \dots, x_n) + \dots + f_d(x_1, \dots, x_n)$$

где каждый  $f_i$  однороден степени  $i$ , то

$$\bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) = f_0 \cdot x_0^d + f_1(x_1, \dots, x_n) \cdot x_0^{d-1} + \dots + f_d(x_1, \dots, x_n)$$

получается из  $f$  умножением каждого монома на подходящую степень  $x_0$ , дополняющую степень всего монома до  $d$ , и превращается в  $f$  при  $x_0 = 1$ . Дополнение  $\bar{S} \setminus S = \bar{S} \cap U_0^{(\infty)}$  задаётся в однородных координатах  $(x_1 : x_2 : \dots : x_n)$  на бесконечно удалённой гиперплоскости  $x_0 = 0$  уравнением  $f_d(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Таким образом, лежащие на бесконечности точки гиперповерхности  $\bar{S}$  — это в точности нули старшей однородной компоненты уравнения, задающего  $S$ . В аффинной геометрии их обычно называют *асимптотическими направлениями* гиперповерхности  $S$ .

Например проективным замыканием аффинной кубической кривой  $x_1 = x_2^3$  является проективная кривая  $x_0^2 x_1 = x_2^3$ , которая имеет ровно одну бесконечно удалённую точку  $(0 : 1 : 0)$  и выглядит в аффинной карте  $U_1$  как полукубическая парабола  $x_0^2 = x_2^3$  с остриём в этой точке.

**1.4.4. Пространство гиперповерхностей.** Поскольку пропорциональные уравнения задают одну и ту же гиперповерхность, гиперповерхности степени  $d$  являются точками проективного пространства  $\mathbb{P}(S^d V^*)$ , которое мы будем называть *пространством гиперповерхностей* степени  $d$  в  $\mathbb{P}(V)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.13. Найдите размерность пространства гиперповерхностей  $d$ -той степени в  $\mathbb{P}_n$ . Поскольку уравнение  $f(p) = 0$  при фиксированном  $p \in \mathbb{P}(V)$  является *линейным уравнением на*  $f \in S^d V^*$ , гиперповерхности степени  $d$ , проходящие через заданную точку  $p$ , образуют проективную гиперплоскость в пространстве всех гиперповерхностей.

Проективные подпространства в пространстве гиперповерхностей называются *линейными системами* гиперповерхностей. По определению, всякая гиперповерхность из линейной системы, порождённой гиперповерхностями  $V(f_1), V(f_2), \dots, V(f_m)$ , задаётся уравнением вида

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m = 0,$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{k}$  — некоторые константы. В частности, любая гиперповерхность из такой системы обязательно содержит пересечение  $V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots \cap V(f_m)$ . По старинной традиции, одномерные и двумерные линейные системы также называются *пучками* и *связками* соответственно. Поскольку любая прямая в проективном пространстве имеет непустое пересечение с любой гиперплоскостью, всякий пучок гиперповерхностей<sup>1</sup> всегда содержит гиперповерхность, проходящую через любую наперёд заданную точку.

ПРИМЕР 1.5 (НАБОРЫ ТОЧЕК НА  $\mathbb{P}_1$  И КРИВАЯ ВЕРОНЕЗЕ)

Фиксируем двумерное векторное пространство  $U \simeq \mathbb{k}^2$  с координатами  $x_0, x_1$  и рассмотрим проективную прямую  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ . Всякое конечное множество точек

$$p_1, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$$

(среди которых допускаются и совпадающие) является алгебраической гиперповерхностью, а именно, множеством нулей однородного многочлена  $d$ -той степени

$$f(x_0, x_1) = \prod_{v=1}^d \det(x, p_v) = \prod_{v=1}^d (p_{v,1}x_0 - p_{v,0}x_1), \quad \text{где } p_v = (p_{v,0} : p_{v,1}). \quad (1-6)$$

По аналогии с (неоднородными) многочленами от одной переменной, задающими конфигурации точек на аффинной прямой  $\mathbb{A}_1$ , мы будем называть точки  $p_v \in \mathbb{P}_1$  *корнями* однородного многочлена  $f$  от переменных  $x_0, x_1$ . В этом смысле разложение (1-6) аналогично разложению многочлена от одной переменной на линейные множители, отвечающие корням. В частности, у однородного многочлена степени  $d$  от двух переменных имеется не более  $d$  различных корней на  $\mathbb{P}_1$ , а если поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто, то таких корней, с учётом кратностей<sup>2</sup>, будет ровно  $d$ . Таким образом, над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  всевозможные  $d$ -точечные конфигурации на  $\mathbb{P}_1$  взаимно однозначно соответствуют точкам проективного пространства  $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$ , ассоциированного с  $(d+1)$ -мерным векторным пространством однородных многочленов степени  $d$  от  $x_0, x_1$ .

Конфигурации, в которых все  $d$  точек слипаются в одну, образуют алгебраическую кривую  $C_d \subset \mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$ , которая называется *кривой Веронезе* степени  $d$  или *рациональной нормальной кривой  $d$ -той степени*. Эта кривая является образом отображения Веронезе

$$\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*) \xrightarrow{v_d} \mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*), \quad (1-7)$$

<sup>1</sup>над любым полем

<sup>2</sup>Под кратностью корня  $p$  понимается максимальная степень линейной формы  $\det(t, p)$ , на которую делится  $f$ .

переводящего задающую одну точку  $p \in \mathbb{P}(U)$  линейную форму  $\varphi \in U^*$  в её  $d$ -ю степень  $\varphi^d \in S^d(U^*)$ , задающую  $d$ -кратную точку  $p$ . Если записывать формы  $\varphi \in U^*$  и  $f \in S^d(U^*)$  в виде

$$\varphi(x) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \quad \text{и} \quad f(x) = \sum_v a_v \cdot \binom{d}{v} x_0^{d-v} x_1^v$$

и использовать отношения коэффициентов  $(\alpha_0 : \alpha_1)$  и  $(a_0 : a_1 : \dots : a_d)$  в качестве однородных координат на  $\mathbb{P}_1^x = \mathbb{P}(U^*)$  и  $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$  соответственно, то при не делящейся на характеристику поля  $\mathbb{k}$  степени  $d$  кривая Веронезе запишется параметрическим уравнением<sup>1</sup>

$$(\alpha_0 : \alpha_1) \mapsto (a_0 : a_1 : \dots : a_d) = (\alpha_0^d : \alpha_0^{d-1} \alpha_1 : \alpha_0^{d-2} \alpha_1^2 : \dots : \alpha_1^d). \quad (1-8)$$

Таким образом, при  $\text{char } \mathbb{k} \nmid d$  кривая  $C_d$  состоит из всех точек  $(a_0 : a_1 : \dots : a_d) \in \mathbb{P}_d$ , координаты которых составляют геометрическую прогрессию. Это условие равносильно тому, что

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{d-2} & a_{d-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{d-1} & a_d \end{pmatrix} = 1,$$

и может быть выражено системой однородных уравнений второй степени — обращением в нуль всех  $2 \times 2$ -миноров этой матрицы. Например, кривая  $C_2 \subset \mathbb{P}_2$  образована всеми квадратными трёхчленами  $a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2$ , которые являются полными квадратами. Она задаётся известным из школы уравнением

$$D/4 = -\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 - a_0 a_2 = 0 \quad (1-9)$$

и допускает следующее параметрическое задание:

$$a_0 = \alpha_0^2, \quad a_1 = \alpha_0 \alpha_1, \quad a_2 = \alpha_1^2. \quad (1-10)$$

Пересечение кривой (1-8) с произвольной гиперплоскостью, заданной уравнением

$$A_0 a_0 + A_1 a_1 + \dots + A_d a_d = 0,$$

состоит из Веронезе-образов тех точек  $(\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}_1$ , в которых обращается в нуль однородный многочлен  $\sum A_v \cdot \alpha_0^{d-v} \alpha_1^v$  степени  $d$ . Поскольку таких точек не более  $d$ , никакие  $d+1$  точек кривой Веронезе не лежат в одной гиперплоскости. Отсюда вытекает, что при  $2 \leq m \leq d$  никакие  $m+1$  точек кривой  $C_d$  не лежат в одном  $(m-1)$ -мерном подпространстве. Над алгебраически замкнутым полем пересечение кривой  $C_d$  с любой гиперплоскостью состоит в точности из  $d$  точек<sup>2</sup> — именно поэтому мы и сказали выше, что *степень* кривой  $C_d$  равна  $d$ .

#### ТЕОРЕМА 1.1

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристики нуль всякое биективное отображение

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\},$$

которое может быть задано в некоторой аффинной карте с координатой  $t$  формулой

$$\varphi(t) = g(t)/h(t), \quad \text{где} \quad g, h \in \mathbb{k}[t], \quad (1-11)$$

является ограничением некоторой гомографии<sup>3</sup>  $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_1$ .

<sup>1</sup>Если  $d$  кратно  $p = \text{char } \mathbb{k}$ , то формула (1-8) превращается в  $(\alpha_0 : \alpha_1) \mapsto (\alpha_0^d : 0 : \dots : 0 : \alpha_1^d)$ .

<sup>2</sup>Некоторые из которых могут совпадать друг с другом.

<sup>3</sup>См. н° 1.3.2 на стр. 9.

Доказательство. Переходя к однородным координатам  $(x_0 : x_1)$ , для которых  $t = x_0/x_1$ , и меняя при необходимости конечное множество точек неопределённости отображения  $\varphi$ , перепишем формулу (1-11) в виде  $\varphi : (x_0 : x_1) \mapsto (f(x_0, x_1) : g(x_0, x_1))$ , где  $f$  и  $g$  — взаимно простые однородные многочлены от  $(x_0, x_1)$  одинаковой степени  $\deg f = \deg g = d$ . Точка  $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1$  имеет при отображении  $\varphi$  ровно один прообраз, если и только если однородный многочлен  $\vartheta_1 \cdot f(x_0, x_1) - \vartheta_0 \cdot g(x_0, x_1)$  имеет на  $\mathbb{P}_1$  ровно один корень  $\zeta = \varphi^{-1}(\vartheta)$ . Над алгебраически замкнутым полем такое возможно, только если этот корень  $d$ -кратный, т. е.

$$\vartheta_1 \cdot f(x) - \vartheta_0 \cdot g(x) = \det^d(x, \zeta).$$

Поскольку алгебраически замкнутое поле  $\mathbb{k}$  бесконечно, а отображение  $\varphi$  биективно вне конечного множества точек, прямая  $(fg)$  в пространстве  $\mathbb{P}_d$  однородных многочленов степени  $d$  от  $(x_0, x_1)$  имеет бесконечно много точек пересечения с кривой Веронезе, образованной  $d$ -ми степенями линейных двучленов. Выше мы видели, что при  $d \geq 2$  никакие три точки кривой  $C_d$  не лежат на одной прямой. Поэтому  $d = 1$  и  $\varphi \in \text{PGL}_2(\mathbb{k})$ .  $\square$

**1.5. Касательные и поляры к проективным гиперповерхностям.** Из курса алгебры известно<sup>1</sup>, что для каждого однородного многочлена  $f \in S^n V^*$  степени  $n$  на конечномерном векторном пространстве  $V$  над любым полем  $\mathbb{k}$  характеристики нуль существует единственная такая  $n$ -линейная симметричная форма  $\tilde{f} : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$ , что для всех  $v \in V$

$$f(v) = \tilde{f}(v, \dots, v). \quad (1-12)$$

Эта форма называется *полной поляризацией* многочлена  $f$ . Например, поляризация однородной квадратичной формы  $q \in S^2 V^*$  — это симметричная билинейная форма  $\tilde{q} : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ , задаваемая равенством  $2\tilde{q}(u, w) = q(u + w) - q(u) - q(w)$ .

Для составленного из векторов  $u_1, \dots, u_k \in V$  набора векторов  $w_1, \dots, w_n$ , в котором каждый вектор  $u_i$  присутствует ровно  $m_i$  раз<sup>2</sup>, удобно записывать значение  $\tilde{f}(w_1, \dots, w_n)$  в виде  $\tilde{f}(u_1^{m_1}, \dots, u_k^{m_k})$ , так как оно зависит только от векторов  $u_i$  и их кратностей  $m_i$  и не меняется при перестановках аргументов между собой. В этих обозначениях для любых  $u, w \in V$  и  $f \in S^n V^*$  при всех  $0 \leq k \leq n$  выполняются равенства

$$\tilde{f}(u^k, w^{n-k}) = \frac{(n-k)!}{n!} \partial_u^k f(w) = \frac{k!}{n!} \partial_w^{n-k} f(u), \quad (1-13)$$

где  $\partial_v^\ell = \partial_v \dots \partial_v$  означает  $\ell$ -кратную производную<sup>3</sup> многочлена  $f$  в направлении вектора  $v$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.14. Убедитесь в том, что  $\partial_u f(w) = n\tilde{f}(u, w^{n-1})$  для всех  $u, w \in V$  и  $f \in S^n V^*$ .

В частности, для каждого  $f \in S^n V^*$  и всех  $v_1, \dots, v_n \in V$  выполняется равенство

$$\tilde{f}(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \partial_{v_1} \dots \partial_{v_n} f,$$

<sup>1</sup>См. разделы 14.3, 14.4 на стр. 231–239 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2425/lec\\_14.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2425/lec_14.pdf).

<sup>2</sup>Где  $i = 1, \dots, k$ , все  $m_i \geq 0$ , и  $m_1 + \dots + m_k = n$

<sup>3</sup>В терминах двойственных базисов  $e_1, \dots, e_d$  и  $x_1, \dots, x_d$  в  $V$  и  $V^*$  производная от  $f(x_1, \dots, x_n) \in S^n V^*$  в направлении  $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_d e_d \in V$  определяется равенством

$$\partial_v f \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \alpha_d \frac{\partial f}{\partial x_d}$$

и не зависит от выбора двойственных базисов.

а для любых двух векторов  $u, w \in V$  биномиальное разложение

$$f(u+w) = \tilde{f}((u+w), \dots, (u+w)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \tilde{f}(u^k, w^{n-k}).$$

можно интерпретировать как *разложение Тейлора*

$$f(u+w) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \partial_w^k f(u) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \partial_u^{n-k} f(w), \quad (1-14)$$

симметричное по  $u, w$  в силу (1-13).

УПРАЖНЕНИЕ 1.15 (КОМБИНАТОРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПОЛНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ). Убедитесь, что для однородного многочлена  $f$  произвольной степени  $n$

$$n! \tilde{f}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{I \subsetneq \{1, \dots, n\}} (-1)^{\ell(I)} f\left(\sum_{i \notin I} v_i\right), \quad (1-15)$$

где суммирование идёт по всем собственным подмножествам  $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$ , включая пустое, а  $\ell(I)$  означает число элементов в  $I$ . Например,

$$6 \tilde{f}(u, v, w) = f(u+v+w) - f(u+v) - f(u+w) - f(v+w) + f(u) + f(v) + f(w).$$

Пусть проективная гиперповерхность  $S = V(f) \subset \mathbb{P}(V)$  задаётся однородным многочленом  $f \in S^n V^*$ . Её пересечение с произвольной прямой  $\ell = (pq)$  состоит из таких точек  $x_0 p + x_1 q \in \ell$ , что отношение  $(x_0 : x_1)$  удовлетворяет уравнению  $f_{pq}(x_0, x_1) = 0$ , где

$$f_{pq}(x_0, x_1) = f(x_0 p + x_1 q) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tilde{f}(p^k, q^{n-k}) x_0^k x_1^{n-k} \in \mathbb{k}[x_0, x_1] \quad (1-16)$$

является однородным многочленом степени  $n$  от  $x = (x_0, x_1)$ . Этот многочлен тождественно нулевой если и только если  $\ell \subset S$ . Если же прямая  $\ell$  не лежит на  $S$  и поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто, то многочлен (1-16) полностью раскладывается на линейные множители:

$$f_{pq}(t) = \prod_{a \in \ell \cap S} \det^{m(a)}(x, a),$$

где суммирование происходит по всем различным точкам пересечения  $a = (\alpha_0 : \alpha_1) \in \ell \cap S$  и

$$\det(x, a) = \det \begin{pmatrix} x_0 & \alpha_0 \\ x_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \alpha_1 x_0 - \alpha_0 x_1.$$

Показатель  $m(a)$ , с которым линейная форма  $\det(x, a)$  входит в разложение многочлена  $f_{pq}$  на линейные множители, называется *локальной кратностью пересечения* поверхности  $S$  с прямой  $\ell$  в точке  $a$  и обозначается  $(S, \ell)_a$ . Мы заключаем, что над алгебраически замкнутым полем каждая не лежащая на гиперповерхности  $S = V(f)$  прямая пересекается с  $S$  ровно по  $\deg f$  точкам с учётом их кратностей.

Зафиксируем точку  $p \in S$ . Прямая  $\ell = (pq)$  называется *касательной* к  $S$  в точке  $p$ , если  $(S, \ell)_p \geq 2$  или  $\ell \subset S$ . Начальный кусок разложения (1-16) имеет в окрестности точки  $p$  вид

$$f(p+tq) = t \binom{n}{1} \tilde{f}(p^{n-1}, q) + t^2 \binom{n}{2} \tilde{f}(p^{n-2}, q^2) + \dots, \quad (1-17)$$

где  $t = x_1/x_0$ . Поэтому касание прямой  $(pq)$  с гиперповерхностью  $S$  в точке  $p \in S$  означает равенство  $\tilde{f}(p^{n-1}, q) = 0$ . Если линейная по  $q$  форма  $\tilde{f}(p^{n-1}, q)$  не является тождественно нулевой, поверхность  $S$  называется *гладкой* в точке  $p$ , а точка  $p$  — *гладкой точкой* поверхности  $S$ . В этом случае все прямые  $(pq)$ , касающиеся  $S$  в точке  $p$ , заматают в  $\mathbb{P}(V)$  гиперплоскость. Она называется проективной *касательной гиперплоскостью* к  $S$  в  $p$  и обозначается

$$T_p S = \{q \in \mathbb{P}(V) \mid \tilde{f}(p^{n-1}, q) = 0\}. \quad (1-18)$$

Если форма  $\tilde{f}(p^{n-1}, q)$  тождественно нулевая по  $q$ , поверхность  $S$  называется *особой* в точке  $p$ , а точка  $p$  — *особой точкой* поверхности  $S$ . В этом случае любая проходящая через  $p$  прямая имеет как минимум двукратное пересечение с  $S$  в  $p$ , и касательное пространство (1-18) совпадает со всем пространством  $\mathbb{P}(V)$ . По форм. (1-13) на стр. 16, коэффициенты линейной по  $q$  формы

$$\tilde{f}(p^{n-1}, q) = \partial_q f(p)/n$$

пропорциональны значениям частных производных от  $f$  в точке  $p$ . Таким образом, особенность точки  $p$  равносильна тому, что в ней зануляются все частные производные уравнения гиперповерхности.

Зафиксируем точку  $q$  вне  $S$  или в какой-нибудь гладкой точке поверхности  $S$ . Замыкание множества таких точек  $p \neq q$ , что прямая  $(pq)$  касается  $S$  в точке  $p$  называется видимым из точки  $q$  *контуром* поверхности  $S$ . Он высекается из  $S$  гиперповерхностью

$$\text{pl}_q S = \{p \in \mathbb{P}(V) \mid \tilde{f}(p^{n-1}, q) = 0\}. \quad (1-19)$$

степени  $n - 1$ , которая называется *полярной* к точке  $q$  относительно  $S$ . В силу выбора точки  $q$  многочлен  $g_q(p) = \tilde{f}(p^{n-1}, q)$  не является тождественно нулевым по  $p$ , так как в противном случае при каждом  $p$  все его производные

$$\partial_r g_q(p) = \tilde{g}_q(r, p^{n-2})/(n-1) = \tilde{f}(r, q, p^{n-2})/(n-1)$$

были бы нулевыми линейными формами от  $r$ , и полагая  $p = q$ , мы получили бы тождественно нулевую линейную по  $r$  форму  $\tilde{f}(r, q^{n-1})$ , а это означает, что  $q$  — особая точка гиперповерхности  $S$ . Таким образом, полярная гиперповерхность (1-19) отлична от всего пространства  $\mathbb{P}(V)$ .

Более общим образом, для каждого  $k$  в пределах  $0 < k < n$  гиперповерхность

$$\text{pl}_q^{n-k} S = \{p \in \mathbb{P}(V) \mid \tilde{f}(q^{n-r}, p^k) = 0\}. \quad (1-20)$$

называется *полярной* степени  $k$  точки  $q$  относительно  $S$ . Если  $q \in S$  — гладкая точка, то её линейная полярна — это касательная гиперплоскость  $T_q S$ , её квадратичная полярна — это проходящая через  $q$  квадрака, касательная гиперплоскость которой в точке  $q$  совпадает с  $T_q S$ , её кубическая полярна — это проходящая через  $q$  кубика, относительно которой квадратичная полярна точки  $q$  такая же, как относительно  $S$  и т. д.

**УПРАЖНЕНИЕ 1.16.** Проверьте, что при любом  $k$  у гладкой точки  $q \in S$  поляры всех степеней  $< k$  относительно  $S$  и относительно поляры (1-20) совпадают.

**ПРИМЕР 1.6** (класс плоской кривой)

Максимальное количество касательных, которые можно опустить на кривую  $C \subset \mathbb{P}_2$  из точки  $q \in \mathbb{P}_2 \setminus C$ , называется *классом* кривой  $C$  и обозначается  $c(C)$ . По предыдущему, эти касательные пересекают  $C$  в точках пересечения  $C \cap \text{pl}_q C$ , где  $\text{pl}_q C$  — полярная точке  $q$  относительно  $C$

кривая степени  $\deg C - 1$ . Например, для гладкой кубической кривой  $C = V(f)$  поляра  $Q = \text{pl}_q C$  представляет собою конику с матрицей Грама

$$q_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(q).$$

Множество  $H_C = \{q \in \mathbb{P}_2 \mid \det(q_{ij}) = 0\}$  является кубической кривой, которая называется *гессианом* исходной кубической кривой  $C$ . При  $q \notin H_C$  коника  $Q = \text{pl}_q C$  гладкая и над алгебраически замкнутым полем пересекает гладкую кубическую кривую  $C$  по шести точкам<sup>1</sup>, т. е. из не лежащей на гессиане точки  $q$  можно опустить на  $C$  шесть касательных (некоторые из которых могут совпасть друг с другом). Если  $q \in H_C$ , коника  $Q$  является двойной прямой или парой различных прямых и пересекает  $C$  не более, чем по шести точкам. Таким образом, гладкая кубическая кривая имеет класс 6.

---

<sup>1</sup>Это вытекает из того, что каждая гладкая коника допускает параметризацию однородными многочленами второй степени, см. [прим. 2.2](#) на стр. 22 и [предл. 2.4](#) на стр. 27 ниже.

## §2. Проективные квадрики

Всюду в этом параграфе мы считаем, что  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ .

**2.1. Напоминания из линейной алгебры и геометрии.** Каждая ненулевая квадратичная форма  $q \in S^2V^*$  задаёт в проективном пространстве  $\mathbb{P}(V)$  алгебраическую гиперповерхность

$$Q = V(q) = \{v \in V \setminus 0 \mid q(v) = 0\},$$

которая состоит из одномерных изотропных<sup>1</sup> подпространств формы  $q$  и называется *проективной квадратикой*. Если  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ , то квадратичный многочлен  $q$  можно записать в однородных координатах  $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  как

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = x \cdot A \cdot {}^t x,$$

где  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  — строка координат,  ${}^t x$  — транспонированный ей столбец координат, а  $A = (a_{ij})$  — *симметричная* матрица, которая при  $i \neq j$  имеет в качестве  $a_{ij} = a_{ji}$  половину<sup>2</sup> коэффициента при  $x_i x_j$  в многочлене  $q(x)$ . Другими словами, для любого многочлена  $q \in S^2V^*$  существует единственная такая симметричная билинейная форма  $\tilde{q} : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ , что  $q(v) = \tilde{q}(v, v)$  для всех  $v \in V$ . Она называется *поляризацией* квадратичной формы  $q$  и выражается через  $q$  несколькими эквивалентными способами<sup>3</sup>:

$$\tilde{q}(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j = x \cdot A \cdot {}^t y = \frac{1}{2} \partial_y q(x) = \frac{1}{2} \partial_x q(y) = \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y)). \quad (2-1)$$

Матрица  $A$  представляет собой *матрицу Грама* формы  $\tilde{q}$  в двойственном к  $x_i$  базисе  $e_i$  пространства  $V$ , т. е.  $a_{ij} = \tilde{q}(e_i, e_j)$ . В другом базисе  $(e'_0, e'_1, \dots, e'_n) = (e_0, e_1, \dots, e_n) \cdot C$  новая матрица Грама  $A'$  выражается через  $A$  по формуле  $A' = {}^t C \cdot A \cdot C$ . В частности, при линейной замене координат *определитель Грама*  $\det A$  умножается на *ненулевой квадрат* определителя матрицы перехода:  $\det(A') = \det(A) \cdot \det^2(C)$ . Поэтому класс определителя Грама по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля  $\mathbb{k}$  не зависит от выбора базиса и является инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат. Мы будем называть этот класс *определителем Грама* формы  $q$  и обозначать  $\det(q)$ . Если  $\det q \neq 0$ , квадратика  $V(q)$  называется *невырожденной* (или *гладкой*), в противном случае — *вырожденной* (или *особой*).

**2.1.1. Корреляция, ядро и ранг.** С симметричной билинейной формой  $\tilde{q}$  на  $V$  связан линейный *оператор корреляции*  $\hat{q} : V \rightarrow V^*$ , переводящий вектор  $v \in V$  в линейную форму скалярного умножения на  $v$ :

$$\hat{q}(v) : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad w \mapsto \tilde{q}(w, v).$$

**Упражнение 2.1.** Проверьте, что матрица оператора корреляции, записанная в любом базисе пространства  $V$  и двойственном к нему базисе в  $V^*$  совпадает с матрицей Грама квадратичной формы  $q$  в этом базисе.

<sup>1</sup>Напомню, что подпространство  $U \subset V$  называется *изотропным* для квадратичной формы  $q \in S^2(V^*)$ , если  $q(u) = 0$  для всех  $u \in U$ . См. раздел 13.3.2 на с. 174 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/2122/lec\\_13.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_13.pdf).

<sup>2</sup>Именно для этого существенно, что  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ .

<sup>3</sup>Ср. с н° 1.5 на стр. 16.

Невырожденность квадратичной формы  $q$  равносильна тому, что  $\hat{q}$  изоморфизм. Пространство

$$\ker \hat{q} = \{ v \in V \mid \forall w \in V \ \hat{q}(w, v) = 0 \}$$

называется *ядром* квадратичной формы  $q$ . Поскольку  $\dim \ker \hat{q} = \dim V - \text{rk } A$ , ранг матрицы Грама не зависит от выбора базиса. Он называется *рангом* квадратичной формы  $q$ . Проективизация ядра  $\text{Sing } Q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker \hat{q}) \subset \mathbb{P}(V)$  называется *вершинным пространством* квадратичной формы  $Q$ . Обратите внимание, что  $\text{Sing } Q \subset Q$ .

**2.1.2. Касательные прямые и касательное пространство.** Вершинное подпространство совпадает с *множеством особых точек* квадратичной гиперповерхности  $Q = V(q)$ , как оно определялось в н° 1.5 на стр. 16 выше. В самом деле, проходящая через точку  $a \in Q$  прямая  $\ell = (ab)$  касается  $Q$  в точке  $a$ , если и только если  $\hat{q}(b, a) = 0$ , поэтому особенность точки  $a$  равносильна тому, что  $a \in \ker \hat{q}$ . Касательное пространство к  $Q$  в точке  $a$  совпадает с проективизацией ортогонала к вектору  $a$  относительно билинейной формы  $\hat{q}$

$$T_a Q = \mathbb{P}(a^\perp) = \{ b \in \mathbb{P}(V) \mid \hat{q}(a, b) = 0 \} \quad (2-2)$$

и либо является гиперплоскостью в  $\mathbb{P}(V)$ , если точка  $a$  гладкая, либо совпадает со всем пространством  $\mathbb{P}(V)$ , если точка  $a \in \ker \hat{q}$  особая.

Если  $b \notin Q$ , то ограничение формы  $q$  на одномерное подпространство  $b \subset V$  невырождено и  $V = b \oplus b^\perp$ . Формула (2-2) утверждает, что видимый из точки  $b \notin Q$  контур квадратичной поверхности  $Q$ , т. е. ГМТ пересечения с квадратикой  $Q$  всевозможных касательных, опущенных на неё из точки  $b$ , высекается из квадратичной поверхности  $Q$  не проходящей через точку  $b$  гиперплоскостью

$$\mathbb{P}(b^\perp) = \{ x \mid \hat{q}(x, b) = 0 \}, \quad (2-3)$$

которая называется *полярной* точки  $b$  относительно квадратичной поверхности  $Q$ .

#### ТЕОРЕМА 2.1

Пересечение особой квадратичной поверхности  $Q$  с любым дополнительным к  $\text{Sing } Q$  проективным подпространством  $L \subset \mathbb{P}(V)$  является гладкой (возможно пустой) квадратикой  $Q' = L \cap Q$  в подпространстве  $L$ , и исходная квадратичная поверхность  $Q$  является линейным соединением<sup>1</sup>  $J(Q', \text{Sing } Q)$  квадратичной поверхности  $Q'$  и подпространства  $\text{Sing } Q$ .

*Доказательство.* Ограничение формы  $q$  на подпространство  $L$  невырождено, поскольку ограничение корреляции  $\hat{q}$  на любое дополнительное к  $\ker \hat{q}$  подпространство имеет нулевое ядро. Каждая пересекающая  $\text{Sing } Q$  прямая, будучи касательной к квадратичной поверхности  $Q$ , либо целиком лежит на квадратичной поверхности  $Q$ , либо пересекает  $Q$  ровно в одной точке — точке своего пересечения с  $\text{Sing } Q$ . Поэтому каждая прямая  $(a, b)$  с  $a \in \text{Sing } Q$ ,  $b \in Q'$  целиком лежит на  $Q$ , т. е.  $J(Q', \text{Sing } Q) \subset Q$ . Через каждую не лежащую в  $L$  гладкую точку  $c \in Q$  проходит единственная прямая, пересекающая  $L$  и  $\text{Sing } Q$ . Поскольку эта прямая пересекает  $Q$  также и в точке  $c \notin \text{Sing } Q$ , она целиком лежит на квадратичной поверхности  $Q$ , а значит, пересекает  $L$  в точке, лежащей на  $Q'$ . Поэтому  $Q \subset J(Q', \text{Sing } Q)$ .  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ 2.2.** Покажите, что квадратичная поверхность, имеющая хотя одну гладкую точку, не содержится в гиперплоскости.

<sup>1</sup>Т. е. объединением всех прямых вида  $(ab)$  с  $a \in Q'$  и  $b \in \text{Sing } Q$ .

Пример 2.1 (квадрики на  $\mathbb{P}_1$ )

При  $\dim V = 2$  вырожденность квадрики  $V(q)$  означает обращение в нуль дискриминанта<sup>1</sup> квадратичной формы  $q$ . В этом случае  $q = \psi^2$  является квадратом ненулевой линейной формы  $\psi \in V^*$ , обращающейся в нуль в единственной точке  $p = \mathbb{P} \operatorname{Ann} \xi \subset \mathbb{P}(V)$ . Такая квадратика называется *двойной точкой*  $p$ .

Гладкая квадратика имеет ненулевой дискриминант и либо состоит из двух различных точек, либо пуста. Первое происходит, когда  $D/4 = -\det(q)$  является квадратом в  $\mathbb{k}$ , что всегда так, если поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто, второе — когда  $D/4 = -\det(q)$  не квадрат, и над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  такого не бывает.

Мы заключаем, что в проективном пространстве любой размерности произвольные квадратика  $Q$  и прямая  $\ell$  пересекаются ровно одним из следующих четырёх способов: либо  $\ell \subset Q$ , либо  $\ell \cap Q$  это одна двойная точка, либо  $\ell \cap Q$  это две различные точки, либо  $\ell \cap Q = \emptyset$ , причём над алгебраически замкнутым полем последний случай невозможен.

Пример 2.2 (коника)

Квадрики на плоскости называются *кониками*. С гладкой коникой в  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  мы уже встречались в [прим. 1.3](#) на стр. 6.

Если  $\operatorname{rk} q = 1$ , то уравнение  $q(x) = 0$  переписывается в ортогональном базисе как  $x_0^2 = 0$ . Такая коника  $C = V(q)$  совпадает с  $\operatorname{Sing} C$  и называется *двойной прямой*. В терминах [теор. 2.1](#) коника  $C$  является линейным соединением прямой  $\operatorname{Sing} C$  и пустой нульмерной квадрики<sup>2</sup>.

Если  $\operatorname{rk} q = 2$ , то  $\operatorname{Sing} q$  является проективизацией одномерного ядра формы  $q$  и состоит из одной точки  $s$ . По [теор. 2.1](#) пересечение такой коники  $C$  с любой не проходящей через  $s$  прямой, будучи гладкой квадратикой на этой прямой, либо состоит из двух разных точек, либо пусто, и над алгебраически замкнутым полем последнее невозможно. В первом случае  $C$  является объединением двух различных прямых, пересекающихся в её особой точке  $s$ , и называется *распавшейся*, а форма  $q = \psi_1 \psi_2$  является произведением двух различных линейных форм. Во втором случае коника  $C$  называется *двойной точкой* и визуально совпадает со своей особой точкой. Например, над полем  $\mathbb{R}$  уравнение  $x_0^2 + x_1^2 = 0$  задаёт двойную точку  $(0 : 0 : 1)$ .

Невырожденная квадратичная форма  $q$  на трёхмерном векторном пространстве либо анизотропна<sup>3</sup>, либо является прямой ортогональной суммой двумерной гиперболической<sup>4</sup> и одно-

<sup>1</sup>Напомню, что дискриминант  $D = 4(b^2 - ac)$  квадратичной формы  $ax_0^2 + 2bx_0x_1 + cx_1^2$  связан с определителем Грама соотношением

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = -\frac{D}{4}.$$

<sup>2</sup>Дополнительным подпространством к прямой на плоскости является точка — проективизация одномерного векторного пространства, а невырожденная форма на одномерном пространстве автоматически анизотропна.

<sup>3</sup>Напомню, что квадратичная форма  $q$  называется *анизотропной*, если у неё нет ненулевых изотропных векторов, т. е.  $q(v) = 0$  только для  $v = 0$ . Над алгебраически замкнутым полем анизотропны только ненулевые одномерные формы. Подробнее об этом см. раздел 14.1.2 на с. 182 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/2122/lec\\_14.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_14.pdf).

<sup>4</sup>Напомню, что квадратичная форма  $q$  называется *гиперболической*, если её матрица Грама в подходящем базисе имеет блочный вид  $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$ , в котором  $0$  и  $E$  — нулевая и единичная квадратные матрицы одинакового размера (таким образом размерность всего пространства чётна). Подробнее о гиперболических формах см. примере 13.2 на с. 173 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/2122/lec\\_13.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_13.pdf) и раздел 14.1.2 на с. 182 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/)

мерной анизотропной форм. В первом случае  $V(q) = \emptyset$ , и над алгебраически замкнутым полем такое невозможно. Над полем  $\mathbb{R}$  примером такой коники служит  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ . Во втором случае в подходящих координатах коника задаётся уравнением

$$x_1^2 = x_0 x_2. \quad (2-4)$$

Поскольку любые значения  $x_0 = t_0, x_1 = t_1$  однозначно дополняются до тройки

$$(t_0 : t_1 : t_1^2/t_0) = (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2),$$

удовлетворяющей уравнению (2-4), коника (2-5) является образом вложения Веронезе

$$\mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_2, \quad (t_0 : t_1) \mapsto (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2). \quad (2-5)$$

Мы заключаем, что над любым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  имеется единственная с точностью до проективного преобразования непустая невырожденная коника. В подходящих координатах она задаётся уравнением (2-4) и допускает рациональную параметризацию (2-5).

**2.1.3. Планарность гладкой квадрики.** Размерность максимального по включению проективного пространства, целиком лежащего на гладкой квадрике  $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ , называется *планарностью* квадрики  $Q$ . Иначе говоря, планарность квадрики  $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$  на единицу больше размерности максимального изотропного подпространства  $U \subset V$  квадратичной формы  $q$ . Планарность пустой квадрики, задаваемой анизотропной формой  $q$ , по определению полагается равной  $-1$ . Квадрики планарности 0 суть непустые квадрики, не содержащие прямых. Ортогональная группа  $O_q(V)$  невырожденной квадратичной формы  $q$  действует на  $\mathbb{P}(V)$ , переводя квадрику  $Q = V(q)$  в себя. Из курса линейной алгебры и геометрии известно<sup>1</sup>, что это действие транзитивно на изотропных подпространствах любой фиксированной размерности и в частности на точках квадрики  $Q$ . Любое ортогональное преобразование, переводящее точку  $p \in Q$  в точку  $p' \in Q$ , биективно отображает множество  $k$ -мерных подпространств  $L \subset Q$ , проходящих через  $p$ , в множество  $k$ -мерных подпространств  $L' \subset Q$ , проходящих через  $p'$ . Тем самым, через каждую точку  $m$ -планарной квадрики можно провести  $m$ -мерное проективное подпространство, целиком лежащее на квадрике, и мощность множества таких подпространств не зависит от точки, а никаких  $(m + 1)$ -мерных проективных подпространств на  $m$ -планарной квадрике не лежит.

Из курса линейной алгебры и геометрии также известно<sup>2</sup>, что всякое пространство  $V$  с невырожденной симметричной билинейной формой распадается в прямую ортогональную сумму  $V = H_{2m} \oplus A$  гиперболического подпространства  $H_{2k}$  и анизотропного подпространства  $A$ , каждое из которых может быть нулевым или совпадать со всем пространством  $V$ , и для любых двух таких разложений  $H_{2k} \oplus A = H_{2\ell} \oplus A'$  выполняется равенство  $k = \ell$  и имеется сохраняющий симметричную билинейную форму изоморфизм  $A \simeq A'$ . На языке формул это означает, что уравнение гладкой  $m$ -планарной проективной квадрики записывается в подходящих однородных координатах как

$$x_0 x_1 + x_2 x_3 + \cdots + x_{2m} x_{2m+1} = \alpha(x_{2m+2}, \dots, x_n), \quad (2-6)$$

2122/lec\_14.pdf

<sup>1</sup>См. следствие 14.2 на с. 186 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/2122/lec\\_14.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_14.pdf).

<sup>2</sup>См. теоремы 14.1 и 14.4 на с. 183 и 186 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/2122/lec\\_14.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_14.pdf).

где  $\alpha$  — анизотропная квадратичная форма от  $n - 2m - 1$  переменных. Число  $2m + 2$  равно размерности гиперболического слагаемого в разложении пространства  $V$  в прямую ортогональную относительно формы  $\tilde{q}$  сумму гиперболического и анизотропного подпространств, и максимум размерностей изотропных относительно формы  $\tilde{q}$  векторных подпространств в  $V$  равен  $m + 1$ . В частности, число  $m$  не зависит от выбора координат, в которых уравнение квадрики имеет вид (2-6). При фиксированном  $n$  планарность  $m$  может принимать значение в пределах

$$-1 \leq m \leq (n - 1)/2.$$

Квадрики (2-6) с разными  $m$  не переводятся одна в другую проективными преобразованиями.

Пример 2.3 (квадрики максимальной планарности)

Максимально возможная планарность квадрики  $Q \subset \mathbb{P}_n$  равна  $(n - 1)/2$  при нечётном  $n$  и  $(n - 2)/2$  при чётном  $n$ . Над алгебраически замкнутым полем все невырожденные квадрики имеют максимальную планарность, поскольку над таким полем есть единственная с точностью до изометрии анизотропная форма  $x^2$ , живущая в одномерном пространстве. Над произвольным полем уравнение квадрики максимальной планарности в  $\mathbb{P}_n$  в подходящих однородных координатах записывается в виде

$$0 = x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{2m}x_{2m+1} \text{ при } n = 2m + 1, \quad (2-7)$$

$$x_0^2 = x_1x_{m+1} + x_2x_{m+2} + \dots + x_mx_{2m} \text{ при } n = 2m. \quad (2-8)$$

Поэтому все квадрики максимальной планарности переводятся друг в друга проективными преобразованиями. Например, все непустые гладкие коники на  $\mathbb{P}_2$  проективно конгруэнтны, как мы уже видели в прим. 2.2 на стр. 22.

Пример 2.4 (гладкие вещественные квадрики)

Над полем  $\mathbb{R}$  при каждом  $k \in \mathbb{N}$  есть единственная с точностью до изометрии и умножения на константу анизотропная форма от  $k$  переменных:  $x_1^2 + \dots + x_k^2$ . Поэтому каждая гладкая вещественная квадрика размерности  $n$ , лежащая в  $(n + 1)$ -мерном пространстве  $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ , в подходящих однородных координатах задаётся уравнением

$$x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{2m}x_{2m+1} = x_{2m+2}^2 + \dots + x_{n+1}^2, \quad -1 \leq m \leq n/2. \quad (2-9)$$

При разных  $m$  эти уравнения задают квадрики разной планарности и тем самым являют собою полный список различных гладких вещественных квадрик с точностью до проективного преобразования.

Предложение 2.1

Сечение гладкой квадрики  $Q \subset \mathbb{P}_n$  произвольной гиперплоскостью  $\Pi$  либо является гладкой квадратикой в этой гиперплоскости, либо имеет единственную особую точку  $p \in \Pi \cap Q$ . Последнее равносильно тому, что  $\Pi = T_pQ$  касается квадрики в точке  $p$ , и в этом случае  $Q \cap T_p$  является конусом с вершиной в  $p$  над гладкой квадратикой на единицу меньшей планарности и на два меньшей размерности, чем у  $Q$ , расположенной в  $(n - 2)$ -мерной плоскости, дополнительной к  $p$  внутри  $T_pQ$ .

Доказательство. Пусть  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ ,  $\Pi = \mathbb{P}(W)$  и  $Q = V(q)$ . Ядро ограничения оператора корреляции  $\hat{q} : V \rightarrow V^*$  на подпространство  $W \subset V$  является пересечением  $W$  с одномерным подпространством  $W^\perp \subset V$ . Это пересечение либо нулевое, либо одномерное с проективизацией

$p \in \Pi$ . В первом случае квадрика  $Q \cap \Pi$  невырождена, а во втором имеет единственную особую точку  $p$ , причём  $\Pi = \mathbb{P}(p^\perp)$  является касательным пространством<sup>1</sup> к  $Q$  в точке  $p$ . Согласно теор. 2.1 на стр. 21, особая квадрика  $Q \cap \Pi$  в пространстве  $\Pi \simeq \mathbb{P}_{n-1}$  является линейным соединением точки  $p$  и неособой квадрики, лежащей в любой не проходящей через  $p$  гиперплоскости  $\mathbb{P}(U) \simeq \mathbb{P}_{n-2} \subset \Pi$ . Так как ограничение квадратичной формы  $q$  на подпространство  $U \subset V$  невырождено, имеется ортогональное разложение  $V = U \oplus U^\perp$ . Ограничение формы  $q$  на двумерное пространство  $U^\perp$  невырождено, и в  $U^\perp$  есть изотропная прямая  $p \subset U^\perp$ . Следовательно<sup>2</sup>,  $U^\perp \simeq H_2$  является гиперболической плоскостью, и размерность гиперболической составляющей ограничения  $q|_U$  на два меньше, чем у самой формы  $q$  на  $V$ , т. е. планарность гладкой квадрики  $Q \cap \mathbb{P}(U)$  на единицу меньше, чем у  $Q$ .  $\square$

**2.1.4. Полярное преобразование.** Корреляция  $\hat{q} : V \simeq V^*$ , ассоциированная с невырожденной квадратичной формой  $q$ , индуцирует линейный проективный изоморфизм

$$\bar{q} : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V^*)$$

который называется *полярным преобразованием* или *поляритетом* квадрики  $Q$ . Поляритет переводит точку  $p \in \mathbb{P}_n$  в гиперплоскость  $L \subset \mathbb{P}_n$ , заданную уравнением  $\tilde{q}(p, x) = 0$ . Точка  $p$  и гиперплоскость  $L$  в этом случае называются *полюсом* и *полярной* друг друга относительно квадрики  $Q$ . Поляра точки, не лежащей на квадрике, это гиперплоскость, высекающая видимый из этой точки контур квадрики, а поляра точки, лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, касающаяся квадрики в этой точке. Таким образом, всякую квадратичную  $Q$  можно охарактеризовать как ГМТ, лежащих на своих полярах.

Поскольку условие  $\tilde{q}(a, b) = 0$  симметрично по  $a$  и  $b$ , точка  $a$  лежит на поляре точки  $b$ , если и только если точка  $b$  лежит на поляре точки  $a$ . Такие точки называются *сопряжёнными* относительно квадрики  $Q$ .

Предложение 2.2

Пусть  $a, b \notin Q$  и прямая  $(ab)$  пересекает  $Q$  в двух различных точках  $c, d$ . Точки  $a, b$  сопряжены относительно квадрики  $Q$ , если и только если они *гармоничны*<sup>3</sup> точкам  $c, d$ , т. е.  $[a, b, c, d] = -1$ .

Доказательство. Ограничение квадрики  $Q$  на прямую  $(cd)$  задаётся в однородных координатах  $(x_0 : x_1)$  относительно базиса  $c, d$  квадратичной формой  $q(x) = \det(x, c) \cdot \det(x, d)$ , поляризация которой есть  $\tilde{q}(x, y) = \frac{1}{2} (\det(x, c) \cdot \det(y, d) + \det(y, c) \cdot \det(x, d))$ . Условие сопряжённости  $\tilde{q}(a, b) = 0$  означает, что  $\det(a, c) \cdot \det(b, d) = -\det(b, c) \cdot \det(a, d)$  или  $[a, b, c, d] = -1$ .  $\square$

Предложение 2.3

Для неособой квадрики  $G$  и произвольной квадрики  $Q$  в  $\mathbb{P}_n$  гиперплоскости, полярные относительно квадрики  $G$  точкам  $p \in Q$ , образуют в двойственном проективном пространстве  $\mathbb{P}_n^\times$  квадратичную  $Q_G^\times$  того же ранга, что и квадрика  $Q$ . Если  $Q$  и  $G$  имеют в некоторых однородных координатах на  $\mathbb{P}_n$  матрицы Грама  $A$  и  $\Gamma$  соответственно, то квадрика  $Q_G^\times$  имеет в двойственных однородных координатах на  $\mathbb{P}_n^\times$  матрицу  $\Gamma^{-1} A \Gamma^{-1}$ .

<sup>1</sup>См. форм. (2-2) на стр. 21.

<sup>2</sup>См. предложение 14.1 на с. 182 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/2122/lec\\_14.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_14.pdf).

<sup>3</sup>Иначе говоря, в дополнительной к точке  $a$  аффинной карте на прямой  $(a, b)$  точка  $b$  является центром тяжести точек  $c$  и  $d$ .

Доказательство. Поляритет  $\hat{g} : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n^\times$  гладкой квадрики  $G \subset \mathbb{P}_n$  переводит точку из  $\mathbb{P}_n$  со столбцом координат  $x$  в точку двойственного пространства  $\mathbb{P}_n^\times$  со строкой координат  $\xi = x^t \Gamma$  и является проективным изоморфизмом. Таким образом, полярная точке  $x \in Q$  гиперплоскость  $\xi \in Q^\times$  удовлетворяет уравнению, которое получается из уравнения  $x^t \cdot A \cdot x = 0$  квадрики  $Q$  подстановкой  $x = \Gamma^{-1} \xi^t$ , т. е. уравнению  $\xi \cdot \Gamma^{-1} A \Gamma^{-1} \cdot \xi^t = 0$ .  $\square$

Следствие 2.1

Касательные пространства гладкой квадрики  $Q \subset \mathbb{P}_n$  образуют в  $\mathbb{P}_n^\times$  гладкую квадрику  $Q^\times$ . Матрицы Грама квадрик  $Q$  и  $Q^\times$  в двойственных базисах пространств  $\mathbb{P}_n$  и  $\mathbb{P}_n^\times$  обратны друг другу.

Доказательство. Положим в предыдущей теореме  $G = Q$  и  $\Gamma = A$ , и заметим, что гиперплоскости, полярные точкам  $p \in Q$  относительно самой же квадрики  $Q$ , это в точности касательные пространства  $T_p Q$ .  $\square$

**2.2. Коники.** Напомню<sup>1</sup>, что кривые второй степени на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$  называются *проективными кониками*. Они являются точками пространства  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$ . Над алгебраически замкнутым полем имеются ровно три проективно неэквивалентных коники:

- *двойная прямая*  $x_0^2 = 0$  имеет ранг 1, и все её точки особы
- *распавшаяся коника*  $x_0^2 + x_1^2 = 0$  имеет ранг 2 и является объединением двух различных прямых  $x_0 = \pm \sqrt{-1} \cdot x_1$ , точка пересечения которых  $(0 : 0 : 1)$  является единственной особой точкой распавшейся коники
- *гладкая коника*  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$  имеет максимальный ранг 3

что согласуется<sup>2</sup> с [прим. 2.2](#).

Над произвольным полем  $\mathbb{k}$  с  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  каждая непустая гладкая коника  $C \subset \mathbb{P}_2$  допускает квадратичную *рациональную параметризацию*, т. е. отображение  $\varphi : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$  задаваемое в однородных координатах тройкой взаимно простых однородных многочленов второй степени  $\varphi(t_0, t_1) = (\varphi_0(t_0, t_1) : \varphi_1(t_0, t_1) : \varphi_2(t_0, t_1)) \in \mathbb{P}_2$  и биективно отображающее прямую  $\mathbb{P}_1$  на конику  $C \subset \mathbb{P}_2$ . Такая параметризация задаётся проекцией  $p : C \xrightarrow{\sim} \ell$  коники  $C$  из любой её точки  $p \in C$  на любую не проходящую через  $p$  прямую  $\ell$ . В самом деле, каждая отличная от касательной прямой  $T_p C$  прямая  $(px)$  с  $x \in \ell$  пересекает конику  $C$  по двум различным точкам: точке  $p$  и ещё одной точке  $p'(x) \in C$ , однородные координаты которой  $(\lambda_0 : \lambda_1)$  в базисе  $p, x$  на прямой  $(px)$  доставляют отличный от  $p = (1 : 0)$  корень уравнения

$$(\lambda_0, \lambda_1) \cdot \begin{pmatrix} q(p, p) & q(p, x) \\ q(x, p) & q(x, x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2q(p, x) \cdot \lambda_0 \lambda_1 + q(x, x) \cdot \lambda_1^2 = 0,$$

равный  $(\lambda_0 : \lambda_1) = (q(x, x) : -2q(p, x))$ . Отображение

$$\ell \ni x \mapsto q(x, x) \cdot p - 2q(p, x) \cdot x \in C \subset \mathbb{P}_2 \tag{2-10}$$

и задаёт искомую квадратичную параметризацию коники  $C$  точками  $x \in \ell$ .

<sup>1</sup>См. [прим. 2.2](#) на стр. 22.

<sup>2</sup>Распавшаяся коника является линейным соединением особой точки и гладкой квадрики — пары различных точек — на любой прямой, не проходящей через особую точку. Двойная прямая это линейное соединение прямой особых точек и пустого множества — гладкой квадрики на  $\mathbb{P}_0$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.3. Убедитесь, что все три однородных координаты точки

$$q(x, x) \cdot p - 2q(p, x) \cdot x \in \mathbb{P}_2$$

являются однородными полиномами степени 2 от однородных координат  $(t_0 : t_1)$  точки  $x \in \ell$  относительно произвольного базиса на прямой  $\ell$ , и что формула (2-10) корректно сопоставляет точке  $x = T_p C \cap \ell$  точку  $p \in C$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.4. Убедитесь, что проекция коники Веронезе  $a_0 a_2 = a_1^2$  из точки  $(1 : 1 : 1)$  на прямую  $a_1 = 0$ , переводит точку  $(\alpha_0^2 : \alpha_0 \alpha_1 : \alpha_1^2)$  в точку  $(\alpha_0 : 0 : \alpha_1)$ .

Предложение 2.4

Гладкая коника пересекает произвольную кривую, заданную на  $\mathbb{P}_2$  однородным уравнением степени  $d$ , не более, чем по  $2d$  точкам, либо целиком содержится в этой кривой.

Доказательство. Запараметризуем конику однородными полиномами степени 2 от параметра  $t = (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1$ . Значения  $t$ , при которых коника пересекает кривую с уравнением  $f(x) = 0$ , являются корнями однородного уравнения  $f(q(t)) = 0$ , левая часть которого либо тождественно равна нулю, либо имеет степень  $2d$ . В первом случае вся коника содержится в кривой, во втором случае имеется не более  $2d$  различных корней.  $\square$

Предложение 2.5

Каждые 5 точек в  $\mathbb{P}_2$  лежат на некоторой конике. Если никакие 4 из пяти точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие 3 не коллинеарны, то она ещё и невырождена.

Доказательство. При фиксированном  $p \in V$  уравнение  $q(p) = 0$  линейно по  $q \in S^2 V^*$ . Поэтому коники, проходящие через  $p \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$  образуют гиперплоскость в  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$ . Поскольку любые 5 гиперплоскостей в  $\mathbb{P}_5$  имеют непустое пересечение, требуемая коника существует. Если какие-то три из точек коллинеарны, а никакие четыре — нет, коника содержит прямую, проходящую через три коллинеарные точки, и стало быть, распадается в объединение этой прямой и прямой, проходящей через две оставшиеся точки. Тем самым, такая коника единственна. Если никакие три из точек не коллинеарны, любая проходящая через них коника автоматически неособа, и значит, единственна по [предл. 2.4](#).  $\square$

Следствие 2.2

Любые 5 прямых на  $\mathbb{P}_2$ , никакие 3 из которых не конкурентны касаются единственной невырожденной коники.

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно предыдущему: 5 точек на  $\mathbb{P}_2^\times = \mathbb{P}(V^*)$ , двойственные к данным пяти прямым на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ , лежат на единственной гладкой конике  $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ , и двойственная ей коника<sup>1</sup>  $C \subset \mathbb{P}_2$  есть единственная гладкая коника, касающаяся пяти данных прямых.  $\square$

<sup>1</sup>Т. е. коника, образованная касательными к конике  $C^\times$ , см. [сл. 2.1](#) на стр. 26 ниже.

**2.3. Квадратичные поверхности** в  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$  образуют проективное пространство

$$\mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(S^2V^*).$$

Поэтому любые 9 точек в  $\mathbb{P}_3$  лежат на некоторой квадрике. В частности, любые три прямые в  $\mathbb{P}_3$  лежат на некоторой квадрике — достаточно взять по 3 точки на каждой прямой и провести квадрику через эти 9 точек.

**УПРАЖНЕНИЕ 2.5.** Покажите, что никакая вырожденная квадрика в  $\mathbb{P}_3$  (над произвольным полем) не содержит трёх попарно непересекающихся прямых.

Таким образом, любые три попарно скрещивающиеся прямые в  $\mathbb{P}_3$  лежат на гладкой 1-планарной квадрике. Удобной геометрической моделью такой квадрики является *квадрика Сегре*, состоящая из ненулевых матриц ранга 1 в  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{k}))$ :

$$Q_S \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \neq 0 \mid \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0 \right\}. \quad (2-11)$$

**УПРАЖНЕНИЕ 2.6.** Убедитесь, что всякий ненулевой линейный оператор  $F : U \rightarrow V$  ранга один имеет вид  $v \otimes \xi : u \mapsto v \cdot \langle \xi, u \rangle$  для некоторых ненулевых  $v \in V$ ,  $\xi \in U^*$ , определяемых по оператору однозначно с точностью до пропорциональности.

В ситуации, когда  $U = V = \mathbb{k}^2$ , а  $v$  и  $\xi$  имеют в стандартных двойственных базисах пространств  $\mathbb{k}^2$  и  $\mathbb{k}^{2*}$  координаты  $v = (x_0 : x_1)$  и  $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$ , матрица оператора  $v \otimes \xi$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot (\xi_0 \quad \xi_1) = \begin{pmatrix} \xi_0 x_0 & \xi_1 x_0 \\ \xi_0 x_1 & \xi_1 x_1 \end{pmatrix} \quad (2-12)$$

Сопоставляя паре точек  $(\xi, v) \in \mathbb{P}_1^{\times} \times \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{2*}) \times \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$  одномерное подпространство в  $\text{End}(\mathbb{k}^2) \simeq \text{Mat}_2(\mathbb{k})$ , порождённое оператором  $v \otimes \xi$  с матрицей (2-12), мы получаем *вложение Сегре*

$$s : \mathbb{P}_1^{\times} \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{End}(\mathbb{k}^2)),$$

биективно отображающее  $\mathbb{P}_1^{\times} \times \mathbb{P}_1$  на квадрику Сегре  $Q_S \subset \mathbb{P}_3$ . При этом два семейства координатных прямых на  $\mathbb{P}_1^{\times} \times \mathbb{P}_1$  переходят в два семейства прямых на  $Q_S$ . А именно, координатная прямая  $\xi = \text{const}$  изобразится на квадрике Сегре проективизацией двумерного пространства матриц ранга 1 с фиксированным отношением  $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$  между столбцами, а прямая  $v = \text{const}$  — матрицами с фиксированным отношением  $x = (x_0 : x_1)$  между строками. В каждом из этих семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются, причём каждая точка  $Q_S$  является точкой пересечения пары прямых из различных семейств, и никаких других прямых на  $Q_S$  нет.

**УПРАЖНЕНИЕ 2.7.** Убедитесь, что никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

**Предложение 2.6**

Через любые три попарно непересекающиеся прямые в  $\mathbb{P}_3$  проходит единственная (и автоматически неособая) квадрика. Эта квадрика представляет собою объединение всех прямых, пересекающих все три заданных.

Доказательство. Всякая квадратика, проходящая через три скрещивающихся прямые, является неособой квадратикой Сегре, заметаемой двумя семействами прямолинейных образующих. Все три заданные прямые должны лежать в одном из них. Но тогда любая прямая из другого семейства пересекают каждую из них, и наоборот, всякая прямая пересекающая каждую из них, лежит на квадратике (ибо пересекает её по трём точкам), причём в другом по отношению к трём заданным прямым семействе.  $\square$

**2.4. Пучки квадратик.** В этом разделе мы по умолчанию считаем, что основное поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто и  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ . Напомню<sup>1</sup>, что прямые в пространстве квадратик  $\mathbb{P}(S^2V^*)$  на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  называются *пучками квадратик*. Такой пучок  $(Q_0Q_1) \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$  однозначно задаётся любой парой различных лежащих в нём квадратик  $Q_0 = V(q_0)$ ,  $Q_1 = V(q_1)$  и состоит из всех квадратик вида

$$Q_\lambda = V(\lambda_0q_0 + \lambda_1q_1) = \{v \in \mathbb{P}(V) \mid \lambda_0q_0(v) + \lambda_1q_1(v) = 0\}, \quad (2-13)$$

где  $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1) \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ .

Пересечение базисных квадратик  $B = Q_0 \cap Q_1$  называется *базисным множеством* пучка. Поскольку каждая квадратика из пучка (2-13) проходит через  $B$ , базисное множество является пересечением всех квадратик пучка и не зависит от выбора базисных квадратик  $Q_0$ ,  $Q_1$  на прямой  $(Q_0Q_1)$ . Многочлен

$$\chi_{(q_0q_1)}(t_0, t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \det(t_0q_0 + t_1q_1) \in \mathbb{k}[t_0, t_1] \quad (2-14)$$

называется *характеристическим многочленом* пучка (2-13). Это однородный многочлен степени  $n + 1$  от  $t = (t_0 : t_1)$ . В отличие от базисного множества, характеристический многочлен (2-14) *зависит* от выбора базисных квадратик  $Q_0$ ,  $Q_1$ , и даже их уравнений  $q_0$ ,  $q_1$ . При переходе к другим двум базисным квадратикам в том же самом пучке или умножении их уравнений на константы переменные  $(t_0 : t_1)$  подвергаются обратимому линейному преобразованию. Поэтому алгебраическим инвариантом пучка является не сам многочлен (2-14), а только его класс по модулю обратимой линейной замены переменных.

**2.4.1. Невырожденные пучки.** Пучок квадратик называется *невыврожденным*, если в нём есть хотя бы одна гладкая квадратика. Это означает, что характеристический многочлен (2-14) отличен от нуля хотя бы в одной точке на  $\mathbb{P}_1$  и, в частности, является ненулевым многочленом. Поэтому в невырожденном пучке квадратик на  $\mathbb{P}_n$  может быть не более  $n + 1$  особых квадратик, причём вершинные подпространства никаких двух из них не пересекаются, так вектор, лежащий в ядре сразу двух корреляций  $\hat{q}_0$ ,  $\hat{q}_1$ , лежит в ядре и любой их линейной комбинации  $\lambda_0\hat{q}_0 + \lambda_1\hat{q}_1$ , что означает вырожденность сразу всех квадратик пучка.

Множество вырожденных квадратик в невырожденном пучке (2-13) называют *спектром* этого пучка. Квадратичные формы  $\lambda_0q_0 + \lambda_1q_1$ , задающие квадратик из спектра, биективно соответствуют корням  $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1)$  характеристического многочлена (2-14). Будем называть *кратностью*  $\text{mult } Q_\lambda$  вырожденной квадратик  $Q_\lambda$ , отвечающей корню  $\lambda$  характеристического многочлена (2-14), кратность этого корня, т. е. максимальное такое  $k \in \mathbb{N}$ , что многочлен (2-14) делится в кольце многочленов  $\mathbb{k}[t_0, t_1]$  на  $\det^k(\lambda, t) = (\lambda_0t_1 - \lambda_1t_0)^k$ . Кратности всех гладких квадратик пучка по определению положим равными нулю. Над алгебраически замкнутым полем спектр невырожденного пучка квадратик на  $\mathbb{P}_n$  состоит ровно из  $n + 1$  квадратик с учётом их кратностей. Рассматриваемый как неупорядоченный набор из  $n + 1$  не обязательно различных точек на  $\mathbb{P}_1$  с точностью до дробно линейного автоморфизма  $\mathbb{P}_1$ , он не зависит от выбора базиса в пучке.

<sup>1</sup>См. н° 1.4.4 на стр. 13.

## ЛЕММА 2.1

Кратность  $\text{mult } S$  каждой особой квадрики  $S$  из невырожденного пучка строго больше размерности  $\dim \text{Sing } S$  пространства её особых точек.

Доказательство. Пусть квадрика  $G \subset \mathbb{P}_n$  неособа, а квадрика  $S \subset \mathbb{P}_n$  имеет  $\dim \text{Sing } S = k$ . Это означает, что её матрица Грама имеет  $\text{rk } S = (n + 1) - (k + 1) = n - k$ , и все миноры порядка  $n - k + 1$  и выше в ней — нулевые.

УПРАЖНЕНИЕ 2.8. Выведите из этого, что характеристический многочлен  $\det(t_0 S + t_1 G)$  делится на  $t_1^{k+1}$ .

Таким образом кратность задающей  $S$  точки  $t = (1 : 0) \in \mathbb{P}_1$  не менее  $k + 1$ . □

**2.4.2. Невырожденные пучки коник.** Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  невырожденный пучок коник на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$  содержит 1, 2 или 3 различных особых коники, а его базисное множество состоит из 1, 2, 3 или 4 различных точек. Если в пучке есть двойная прямая, то все его базисные точки лежат на этой прямой. Если в пучке есть распавшаяся коника  $\ell_1 \cup \ell_2$ , то все базисные точки такого пучка лежат на ней так, что на каждой из прямых  $\ell_1, \ell_2$  есть хотя бы одна базисная точка, ибо любая гладкая коника пучка пересекает каждую из двух прямых.

## ПРИМЕР 2.5 (пучок с одной базисной точкой)

Если базисное множество пучка состоит из единственной точки  $p$ , особой коникой в нём может быть лишь двойная прямая, касающаяся любой гладкой коники пучка в точке  $p$ . Наоборот, любая гладкая коника  $C$  и касающаяся её в произвольной точке  $p \in C$  двойная прямая  $\ell$  задают регулярный пучок коник с единственной базисной точкой  $p$ , и единственной особой коникой — двойной прямой  $\ell$ . Все гладкие коники этого пучка пересекаются друг с другом по единственной точке  $p$  и имеют в ней общую касательную см. рис. 2◊1.

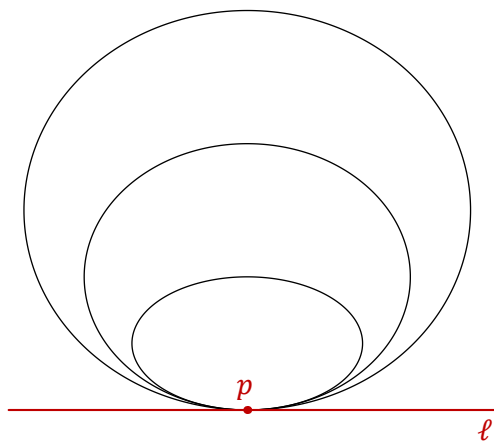


Рис. 2◊1. Пучок с одной базисной точкой ( $a = b = c = d = p$ ).

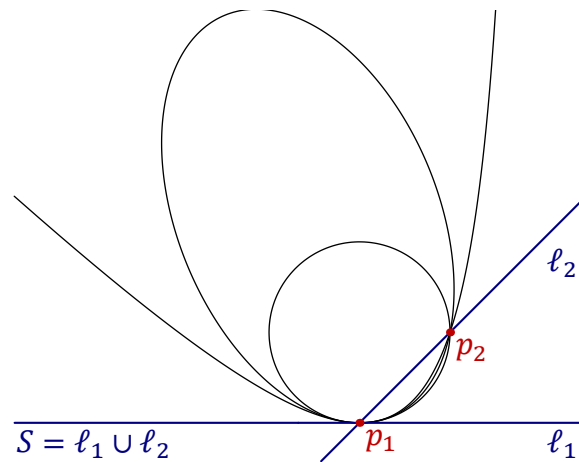


Рис. 2◊2. Пучок с двумя базисными точками  $p_1 = a = b = c, p_2 = d$  и одной вырожденной коникой  $S$ .

## ПРИМЕР 2.6 (пучки с двумя базисными точками)

Если базисное множество пучка состоит из двух точек  $p_1, p_2$ , то вырожденными кониками в нём могут быть только двойная прямая  $\ell = (p_1 p_2)$  или такая распавшаяся коника  $\ell_1 \cup \ell_2$ , что  $p_1 \in \ell_1, p_2 \in \ell_2$ . Второй случай разделяется на два подслучая: либо обе точки  $p_1, p_2$  отличны от  $\ell_1 \cap \ell_2$ , как на рис. 2◊3, либо  $p_1 = \ell_1 \cap \ell_2$ , а  $p_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$ , как на рис. 2◊2.

Если имеет место последнее, то распавшаяся коника  $\ell_1 \cap \ell_2$  является единственной особой коникой в пучке, а каждая гладкая коника пучка касается прямой  $\ell_1$  в точке  $p_1$  и проходит через точку  $p_2$ , см. рис. 2◊2. В частности, любые две гладкие коники в таком пучке пересекаются ровно по двум точкам  $p_1, p_2$  и имеют в точке  $p_1$  общую касательную.

Двойная прямая  $\ell = (p_1 p_2)$  и распавшаяся коника  $\ell_1 \cup \ell_2$  с  $p_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2, p_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$  возникают в пучке с двумя базисными точками  $p_1, p_2$  только одновременно в силу следующей леммы.

ЛЕММА 2.2

Коника, касающиеся двух заданных прямых  $\ell_1, \ell_2$  в двух заданных точках  $p_1 \in \ell_1, p_2 \in \ell_2$ , отличных от  $\ell_1 \cap \ell_2$ , составляют пучок. Этот пучок содержит ровно две вырожденные коники: двойную прямую  $\ell = (p_1 p_2)$  и распавшуюся конику  $\ell_1 \cup \ell_2$ , причём прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  однозначно восстанавливаются по двойной прямой  $(p_1 p_2)$  и любой гладкой конике  $C$  из пучка как касательные к  $C$  в точках пересечения  $C \cap (p_1 p_2)$ .

Доказательство. Каждый ненулевой вектор  $p \in V$  задаёт сюръективное линейное отображение

$$S^2 V^* \rightarrow V^*, \quad q \mapsto \hat{q}(p), \quad (2-15)$$

переводящее квадратичную форму  $q$  в ковектор

$$\hat{q}(p) : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad v \mapsto \tilde{q}(v, p).$$

Так как  $\dim V = 3$ , ядро отображения (2-15) имеет размерность  $\dim S^2 V^* - \dim V^* = 3$ . Поэтому полный прообраз любого одномерного подпространства  $\xi \subset V^*$  при отображении (2-15) имеет размерность 4, а его проективизация имеет коразмерность 2 в пространстве коник. Беря вектор  $p$  на прямой  $\ell = \text{Ann } \xi$ , мы заключаем, что коники, касающиеся прямой  $\ell$  в точке  $p \in \ell$ , образуют в  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$  проективное подпространство коразмерности 2. Два таких подпространства, отвечающие  $p_1 \in \ell_1$  и  $p_2 \in \ell_2$ , пересекаются как минимум по прямой. Если бы их пересечение содержало плоскость, то в пространстве коник, касающихся  $\ell_1$  и  $\ell_2$  в точках  $p_1$  и  $p_2$ , нашлась бы коника, проходящая через любые две наперёд заданные точки. Но такая коника, проходящая через отличную от  $p_1$  и  $p_2$  точку прямой  $\ell$  и ещё какую-нибудь точку вне прямых  $\ell, \ell_1, \ell_2$ , распадается в объединение прямой  $\ell$  и ещё одной прямой  $\ell'$ , отличной от  $\ell, \ell_1, \ell_2$ . Поэтому она не может пересекать прямые  $\ell_1, \ell_2$  с кратностью 2 одновременно и в  $p_1$ , и в  $p_2$ . Это доказывает первое утверждение леммы. Остальные утверждения очевидны из рис. 2◊3. □

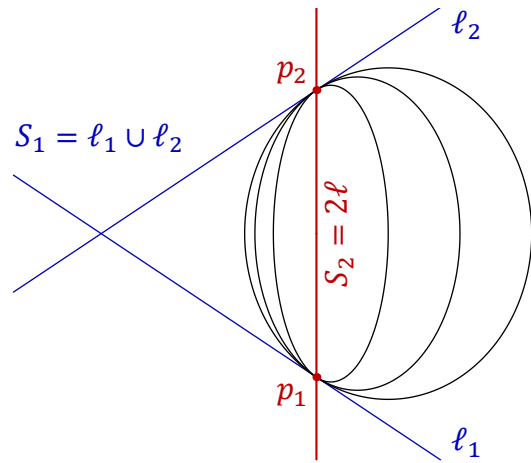


Рис. 2◊3. Пучок с двумя базисными точками  $p_1 = a = b, p_2 = c = d$  и двумя вырожденными кониками  $S_1, S_2$ .

ПРИМЕР 2.7 (пучок с тремя базисными точками)

Если базисное множество пучка коник состоит из трёх точек  $p_1, p_2, p_3$ , то они не коллинеарны<sup>1</sup>. В частности, такой пучок не содержит двойных прямых. Кроме того, ни одна из точек  $p_i$

<sup>1</sup>Иначе содержащая их прямая пересекала бы любую гладкую конику пучка по трём точкам.

не может быть особой одновременно для двух распавшихся коник из пучка<sup>1</sup>. Каждая распавшаяся коника  $\ell_1 \cup \ell_2$  из такого пучка проходит через базисные точки либо так, что  $p_1 = \ell_1 \cap \ell_2$ ,  $p_2 \in \ell_1 \setminus \ell_2$ ,  $p_3 \in \ell_2 \setminus \ell_1$ , либо так, что  $p_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2$ , а  $p_2, p_3 \in \ell_2 \setminus \ell_1$ . На рис. 2◊4 ниже первое отвечает прямым  $\ell'_1, \ell'_2$ , второе — прямым  $\ell''_1, \ell''_2$ . Во втором случае любая гладкая коника  $C$  из пучка касается прямой  $\ell_1$  в точке  $p_1$ . В первом случае все гладкие коники пучка имеют в точке  $p_1$  общую касательную, поскольку проходящая через  $p_1$  прямая  $\ell$ , касающаяся фиксированной гладкой коники  $C$  из пучка в точке  $p_1 \in C$ , соприкасается в точке  $p_1$  с каждой коникой пучка, порождённого коникой  $C$  и распавшейся коникой  $\ell''_1 \cup \ell''_2$ , которая тоже касается прямой  $\ell$  в точке  $p_1 = \ell''_1 \cap \ell''_2$ .

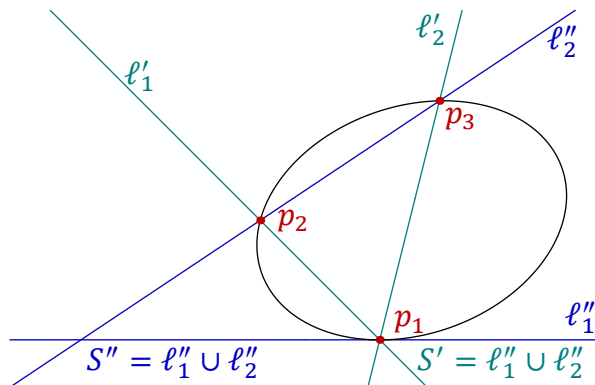


Рис. 2◊4. Пучок с тремя базисными точками  $p_1 = a = b$ ,  $p_2 = c$ ,  $p_3 = d$  и двумя вырожденными кониками  $S_1, S_2$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.9. Убедитесь в этом и покажите, что множество всех коник  $C \subset \mathbb{P}_2$ , касающихся заданной прямой  $\ell$  в заданной точке  $p \in \ell$  и проходящих через две другие различные заданные точки  $c, d \notin \ell$ , составляют пучок, содержащий ровно две вырожденные коники:  $(cd) \cup \ell$  и  $(pc) \cup (pd)$ .

Пример 2.8 (простой пучок коник)

Пучок коник, спектр которого состоит из трёх разных точек, называется *простым*. По лем. 2.1 все точки спектра простого пучка имеют кратность 1, и по предыдущему базисное множество такого пучка состоит из четырёх различных точек  $a, b, c, d$ , никакие 3 из которых не коллинеарны.

УПРАЖНЕНИЕ 2.10. Покажите, что множество всех коник, проходящих через четыре различные точки  $a, b, c, d$ , никакие три из которых не коллинеарны, представляет собою простой пучок, три особые коники которого суть пары противоположных сторон четырёхугольника  $abcd$ , как на рис. 2◊5 на стр. 33.

Таким образом, простой пучок коник однозначно определяется своими базисными точками  $a, b, c, d$ . В однородных координатах  $x = (x_0 : x_1 : x_2)$  на  $\mathbb{P}_2$  уравнения его коник имеют вид

$$\frac{\det(x, a, b) \cdot \det(x, c, d)}{\det(x, a, d) \cdot \det(x, b, c)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1},$$

где  $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1)$  пробегает  $\mathbb{P}_1$ . Все предыдущие примеры являются вырождениями простого пучка и получаются из него, когда некоторые из базисных точек слипаются друг с другом. А

<sup>1</sup>Иначе все коники пучка были бы особы в этой точке, см. самое начало п° 2.4.1.

именно, пучок на рис. 2◊4 возникает при  $a, b \rightarrow p_1, c = p_2, d = p_3$ , пучок на рис. 2◊3 — когда  $a, b \rightarrow p_1, c, d \rightarrow p_2$ , пучок на рис. 2◊2 — если  $a, b, c \rightarrow p_1, d = p_2$ , а на рис. 2◊1 все четыре базисные точки схлопываются в одну.

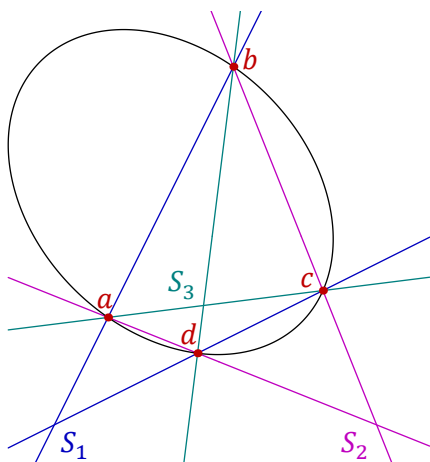
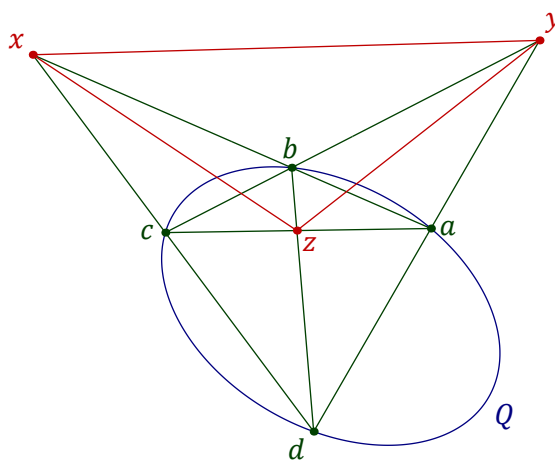


Рис. 2◊5. Простой пучок.

Рис. 2◊6. Автополярный  $\Delta xyz$ .

Пример 2.9 (В. С. Жгун)

Покажем, что треугольник  $xyz$  с вершинами в точках пересечения трёх пар противоположных сторон четырёхугольника  $abcd$  на рис. 2◊6 автополярен относительно всех гладких коник, описанных около этого четырёхугольника. Действительно, каждая такая коника  $Q = V(q)$  лежит в простом пучке, порождённом любыми двумя из трёх распавшихся коник

$$\begin{aligned} S_x &= V(f_x) = (ab) \cup (cd) \\ S_y &= V(f_y) = (ad) \cup (bc) \\ S_z &= V(f_z) = (ac) \cup (bd). \end{aligned}$$

Поскольку  $x = \text{Sing } S_x = \ker \hat{f}_x$ , мы имеем равенства  $\tilde{f}_x(y, x) = \tilde{f}_x(z, x) = 0$ . Аналогично,  $\tilde{f}_y(x, y) = \tilde{f}_y(z, y) = 0$  и  $\tilde{f}_z(x, z) = \tilde{f}_z(y, z) = 0$ . Так как билинейная форма  $\tilde{q}$  является линейной комбинацией билинейных форм  $\tilde{f}_x$  и  $\tilde{f}_y$ , из равенств  $\tilde{f}_x(x, y) = \tilde{f}_y(x, y) = 0$  вытекает равенство  $\tilde{q}(x, y) = 0$ . Аналогично получаем равенства  $\tilde{q}(x, z) = 0$  и  $\tilde{q}(y, z) = 0$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.11 (построение Штейнера или задача Мишустина). Одной линейкой постройте полярную данной точки относительно данной гладкой коники.

**2.5. Гиперповерхность особых квадратик.** Множество всех особых квадратик на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  образует в пространстве квадратик  $\mathbb{P}(S^2V^*)$  алгебраическую гиперповерхности степени  $(n + 1)$

$$\Sigma = V(\det) = \{q \in S^2V^* \mid \det(q) = 0\}. \quad (2-16)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.12. Покажите, что частная производная  $\partial \det A / \partial a_{ij}$  от определителя квадратной матрицы  $A = (a_{ij})$  по любому её элементу  $a_{ij}$  равна алгебраическому дополнению к этому элементу.

## Предложение 2.7

Особая квадрика  $S \in \Sigma$  является гладкой точкой гиперповерхности  $\Sigma$  если и только если сама квадрика  $S \subset \mathbb{P}(V)$  имеет единственную особую точку  $s \in S$ , и в этом случае касательное пространство  $T_S \Sigma \subset \mathbb{P}(S^2 V^*)$  состоит из всех квадрик  $Q \subset \mathbb{P}(V)$ , проходящих через точку  $s$ .

Доказательство. Пусть  $S = V(f)$ . Согласно упр. 2.12, для любой квадрики  $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$  ограничение многочлена  $\det$  на прямую  $(SQ) \subset \mathbb{P}(S^2 V^*)$  имеет в аффинной окрестности точки  $S$  вид

$$0 = \det(f + tq) = \det(f) + t \cdot \sum_{ij} q_{ij} f_{ij}^\vee + \text{члены, делящиеся на } t^2,$$

где  $f_{ij}^\vee$  означает алгебраическое дополнение к  $(ij)$ -тому элементу матрицы Грама квадратичной формы  $f$ . Квадрика  $S$  отвечает корню  $t = 0$ . Он кратный тогда и только тогда, когда

$$\sum_{ij} q_{ij} f_{ij}^\vee = 0. \quad (2-17)$$

Это линейное уравнение на  $q$  нетривиально если и только если в матрице Грама  $F = (f_{ij})$  имеется хоть один ненулевой минор порядка  $n$ , т. е. когда  $\dim \ker F = 1$ . Каждый столбец и каждая строка присоединённой матрицы  $F^\vee = (f_{ij}^\vee)$  лежит в ядре матрицы  $F$ , поскольку  $F F^\vee = F^\vee F = = \det(F) E = 0$ . Таким образом,  $\text{rk } F^\vee = 1$ , и все строки и все столбцы симметричной матрицы  $F^\vee$  пропорциональны однородным координатам особой точки

$$s = (s_0 : s_1 : \dots : s_n) = (f_{i0}^\vee : f_{i1}^\vee : \dots : f_{in}^\vee) = (f_{0j}^\vee : f_{1j}^\vee : \dots : f_{nj}^\vee)$$

квадрики  $S$ . Это означает, что с точностью до умножения на независимую от  $i, j$  константу  $f_{ij}^\vee = = s_i s_j$ , и условие касания (2-17) превращается в равенство  $\sum_{ij} q_{ij} s_i s_j = q(s) = 0$ , т. е. в условие прохождения квадрики  $Q$  через точку  $s$ .  $\square$

## Следствие 2.3

Прямая  $(PQ) \subset \mathbb{P}(S^2 V^*)$  касается гиперповерхности особых квадрик  $\Sigma$  в точке  $Q \in \Sigma$  если и только если  $P \cap \text{Sing } Q \neq \emptyset$ . Если же  $\text{Sing } P \cap \text{Sing } Q \neq \emptyset$ , то прямая  $(PQ)$  лежит на  $\Sigma$ .

Доказательство. Если  $Q$  является гладкой точкой гиперповерхности  $\Sigma$ , то первое утверждение является переформулировкой предл. 2.7. Если точка  $Q \in \Sigma$  особа, то  $\dim \text{Sing } Q \geq 1$ , и любая лежащая в  $\text{Sing } Q$  прямая пересекает любую квадрику  $P$ , а любая прямая  $(PQ)$  касается гиперповерхности  $\Sigma$  в точке  $Q$ , т. е. первое утверждение является в этом случае тавтологией. Если  $\text{Sing } P \cap \text{Sing } Q \neq \emptyset$ , то все квадрики пучка  $(PQ)$  особые в точках пересечения  $\text{Sing } P \cap \text{Sing } Q$ , поскольку ненулевой вектор, лежащий в ядре корреляций, отвечающих квадрикам  $P$  и  $Q$ , лежит в ядре и любой линейной комбинации этих корреляций.  $\square$

Упражнение 2.13. Приведите пример пучка  $L$  особых коник, в котором  $\text{Sing } P \cap \text{Sing } Q = \emptyset$  для всех  $P, Q \in L$ .

## Пример 2.10 (ещё раз классификация невырожденных пучков коник)

При  $n = 2$  особые коники на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$  образуют кубическую гиперповерхность в  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$

$$\Sigma = \{q \in \mathbb{P}_5 \mid \det q = 0\}.$$

Гладкими точками гиперповерхности  $\Sigma$  являются распавшиеся коники, а особыми точками гиперповерхности  $\Sigma$  являются двойные прямые. Прямая общего положения  $L \subset \mathbb{P}_5$  трансверсально пересекает гиперповерхность  $\Sigma$  в трёх её гладких точках и представляет собою простой пучок коник, как на рис. 2◊5 на стр. 33. Если прямая  $L$  касается  $\Sigma$  в гладкой точке  $S = \ell_1 \cup \ell_2$ , то она либо больше нигде не пересекает  $\Sigma$ , и в этом случае кратность пересечения  $\Sigma$  с  $L$  в точке  $S$  равна 3, либо пересекает  $\Sigma$  с кратностью 1 ещё ровно в одной, автоматически гладкой точке. Эти случаи реализуются пучками коник, представленными на рис. 2◊2 на стр. 30 и рис. 2◊4 на стр. 32, причём точке касания  $L$  с  $\Sigma$  всегда отвечает распавшаяся коника с особенностью в базисной точке пучка. Если прямая  $L$  проходит через особую точку  $S = 2\ell$  гиперповерхности  $\Sigma$ , возникает та же альтернатива: если кратность пересечения  $\Sigma$  и  $L$  в точке  $S$  равна 3, то  $L$  больше нигде не пересекает  $\Sigma$  и выгладит как на рис. 2◊1 на стр. 30, если же эта кратность 2, то  $L$  пересекает  $\Sigma$  ещё ровно в одной гладкой точке с кратностью 1, как на рис. 2◊3 на стр. 31.

**2.6. Рабочий пример: регулярные пучки квадрик.** Невырожденный пучок квадрик  $(Q_0 Q_1)$  называется *регулярным*, если кратность каждой точки его спектра ровно на единицу больше размерности пространства особых точек отвечающей этой точке особой квадрики, т. е. когда

$$\dim \text{Sing } Q_\lambda = \text{mult } Q_\lambda - 1 \text{ для всех } \lambda = (\lambda_0 : \lambda_1) \in \mathbb{P}_1.$$

Это означает, что коранг матрицы Грама формы  $\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1$  при каждом  $\lambda \in \mathbb{P}_1$  равен кратности корня  $t = \lambda$  характеристического многочлена  $\chi_{q_0, q_1}(t_0, t_1) = \det(t_0 q_0 + t_1 q_1)$ . Из всех рассмотренных в н° 2.4.2 невырожденных пучков коник регулярными являются только пучки, представленные на рис. 2◊5 и рис. 2◊3.

#### ТЕОРЕМА 2.2

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  для любого регулярного пучка квадрик в  $\mathbb{P}(V)$  найдётся такой базис пространства  $V$ , в котором матрицы Грама всех квадрик из пучка одновременно диагональны.

*Доказательство.* Пусть пучок порождается квадриками  $V(g)$  и  $V(f)$ , где форма  $g$  неособа. Сопоставим форме  $f$  самосопряжённый относительно невырожденной формы  $\tilde{g}$  линейный оператор  $\varphi = \tilde{g}^{-1} \hat{f} : V \rightarrow V$ , однозначно задающийся тем, что  $\tilde{g}(u, \varphi w) = \hat{f}(u, w)$  для всех  $u, w \in V$ . Поскольку матрица  $\Phi$  оператора  $\varphi$  выражается через матрицы Грама  $G, F$  квадратичных форм  $g, f$  по формуле  $\Phi = G^{-1}F$ , характеристический многочлен

$$\chi_\varphi(t) = \det(tE - \Phi) = \det(tE - G^{-1}F) = \det G^{-1} \det(tG - F)$$

оператора  $\varphi$  связан с характеристическим многочленом  $\chi_{(gf)}(t_0, t_1) = \det(t_0 G + t_1 F)$  пучка квадрик по формуле

$$\chi_\varphi(t) = \det G^{-1} \cdot \chi_{(gf)}(-t_0/t_1, 1).$$

Поэтому квадратичная форма  $F - \lambda G$  вырождена если и только если число  $\lambda \in \mathbb{k}$  является собственным значением оператора  $\varphi$ . Так как ранг матрицы  $\lambda G - F$  равен рангу матрицы  $\lambda E - \Phi = G^{-1}(\lambda G - F)$ , размерность собственного подпространства  $V_\lambda = \ker(\lambda E - \Phi)$  оператора  $\varphi$  совпадает с размерностью ядра квадратичной формы  $F - \lambda G$ , которая по условию теоремы в точности равна кратности корня  $(t_0 : t_1) = (-\lambda : 1)$  многочлена  $\chi_{(gf)}(t_0, t_1)$ . Таким образом, сумма размерностей собственных подпространств  $V_\lambda$  оператора  $\varphi$  равна  $\dim V$ . Поскольку по ?? на стр. ??

все собственные подпространства самосопряжённого оператора ортогональны друг другу относительно скалярного произведения  $\tilde{g}$ , пространство  $V$  является  $\tilde{g}$ -ортогональной прямой суммой собственных подпространств  $V_\lambda$  оператора  $\varphi$ . Выбирая в каждом подпространстве  $V_\lambda$  ортогональный базис квадратичной формы  $g$ , мы получаем в  $V$  базис, где обе формы  $g$  и  $f$  имеют диагональные матрицы Грама, причём на диагонали матрицы  $F$  будут стоять собственные значения оператора  $f$  или, что то же самое, взятые с обратным знаком характеристические числа  $t_0/t_1$  пучка  $(GF)$ . Все формы  $\lambda g + \mu f$  также будут диагональны в этом базисе.  $\square$

Следствие 2.4 (из доказательства ТЕОР. 2.2)

Если квадратичная форма  $f$  на векторном пространстве  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  имеет диагональную матрицу Грама в ортонормальном базисе невырожденной квадратичной формы  $g$ , то диагональные элементы этой матрицы суть собственные числа линейного оператора  $\varphi = \hat{g}^{-1}\hat{f}: V \rightarrow V$ , который однозначно задаётся тем, что  $\tilde{f}(u, w) = \tilde{g}(u, \varphi w)$  для всех  $u, w \in V$ . При этом сам базис состоит из собственных векторов оператора  $\varphi$ , и количество появлений каждого собственного числа на диагонали матрицы Грама равно размерности соответствующего собственного подпространства. В частности, диагональная матрица Грама формы  $f$  с точностью до перестановки диагональных элементов не зависит от выбора базиса, одновременно ортонормального для  $g$  и ортогонального для  $f$ .

ТЕОРЕМА 2.3

Два регулярных пучка квадрик в  $\mathbb{P}_n$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  переводятся один в другой линейным проективным автоморфизмом<sup>1</sup>  $\mathbb{P}_n$  если и только если их спектры, понимаемые как неупорядоченные множества из  $n$  не обязательно различных точек на  $\mathbb{P}_1$ , переводятся друг в друга дробно линейным автоморфизмом  $\mathbb{P}_1$ .

Доказательство. Выберем в первом пучке гладкую квадрику  $V(g')$  и рассмотрим в  $V$  базис  $e'$ , в котором все квадрики первого пучка имеют диагональные матрицы Грама, причём нормируем его так, чтобы матрица Грама формы  $g'$  стала единичной. Рассмотрим любую отличную от  $g'$  форму  $f'$  из первого пучка и обозначим через  $F'$  её матрицу Грама в базисе  $e'$ . В доказательстве ТЕОР. 2.2 мы видели, что диагональные элементы матрицы  $F'$  являются корнями многочлена  $\det(tE - F')$ , т. е. составляют в точности спектр первого пучка. Поскольку он совпадает со спектром второго пучка, во втором пучке квадратичных форм имеется базис из таких форм  $g'', f''$ , что корни многочлена  $\chi_{g'' f''}(t, 1)$  совпадают с корнями многочлена  $\det(tE - F')$ . Из этого вытекает, что форма  $g''$  невырождена, и в пространстве  $V$  существует базис  $e''$ , в котором матрица Грама формы  $g''$  единичная, а форма  $f''$  имеет диагональную матрицу  $F''$  с диагональными элементами, равными корням многочлена  $\det(tE - F')$ . Таким образом, матрица  $F''$  в базисе  $e''$  совпадает с матрицей  $F'$  в базисе  $e'$ . Проективный изоморфизм  $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n$ , переводящий базис  $e'$  в базис  $e''$ , преобразует базисные квадратичные формы  $g', f'$  первого пучка в базисные квадратичные формы  $g'', f''$  второго. Следовательно, он преобразует каждую форму  $\lambda g' + \mu f'$  первого пучка в форму  $\lambda g'' + \mu f''$  второго.  $\square$

ПРИМЕР 2.11 (ПРОСТЫЕ ПУЧКИ)

Пучок квадрик на  $\mathbb{P}_n$  называется *простым*, если его спектр состоит из  $(n + 1)$  различных точек на  $\mathbb{P}_1$ . Таким образом, каждая особая квадрика простого пучка имеет ровно одну особую точку

<sup>1</sup>Т. е. существует такой линейный проективный автоморфизм  $\mathbb{P}_n$ , который биективно отображает квадрики одного пучка на квадрики второго.

и единичную кратность в спектре. В частности, каждый простой пучок регулярен, и все квадрики в нём одновременно диагонализуются в некотором базисе. Два простых пучка переводятся один в другой проективным преобразованием тогда и только тогда, когда  $n+1$  точек на  $\mathbb{P}_1$ , отвечающих особым квадрикам первого пучка, переводятся дробно линейным автоморфизмом  $\mathbb{P}_1$  в  $n+1$  точек, отвечающих особым квадрикам второго.

#### ТЕОРЕМА 2.4

Пучок квадрик  $(PQ)$  над алгебраически замкнутым полем прост если и только если его базисные квадрики пересекаются трансверсально, т. е.  $\text{codim } T_a P \cap T_a Q = 2$  в каждой точке  $a \in P \cap Q$ .

Доказательство. Рассмотрим в пространстве квадрик  $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2 V^*)$  на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  гиперповерхность особых квадрик<sup>1</sup>  $\Sigma = V(\det) \subset \mathbb{P}_N$ . Прямая  $(PQ) \subset \mathbb{P}_N$  пересекает гиперповерхность  $\Sigma$  меньше, чем по  $n+1$  точкам, если и только если она касается  $\Sigma$  в одной из точек  $S \in (PQ) \cap \Sigma$ . Нетрансверсальность пересечения квадрик  $P = V(f)$  и  $Q = V(q)$  в точке  $a \in P \cap Q$  означает, что ковекторы  $\hat{f}(a)$  и  $\hat{q}(a)$  пропорциональны<sup>2</sup>. В этом случае все ковекторы  $\hat{h}(a)$  с  $\hat{h} = \lambda \hat{f} + \mu \hat{q}$  пропорциональны друг другу, т. е. любые две квадрики из пучка  $(PQ)$  пересекаются в точке  $a$  не трансверсально, и пучок содержит квадрику  $S = V(h)$  с  $\hat{h}(a) = \lambda \hat{f}(a) + \mu \hat{q}(a) = 0$ , т. е. с  $a \in \text{Sing } S$ . Тогда  $P \cap \text{Sing } S \neq \emptyset$  и прямая  $(PQ)$  касается гиперповерхности  $\Sigma$  в точке  $S$  по сл. 2.3. Значит, пучок не прост. Наоборот, если прямая  $(PQ)$  касается гиперповерхности  $\Sigma$  в точке  $S$ , то  $P \cap \text{Sing } S \neq \emptyset$  и пересечение  $P \cap S$  не трансверсально во всех точках из  $P \cap \text{Sing } S$ . Но тогда и пересечение  $P \cap Q$  тоже не трансверсально в этих же точках в силу сделанного выше замечания.  $\square$

<sup>1</sup>См. форм. (2-16) на стр. 33.

<sup>2</sup>При этом один из них (но не оба) может обратиться в нуль — это означает, что одна из квадрик особа в точке  $a$ .

### §3. Многообразия Веронезе, Грассмана и Сегре

**3.1. Напоминания из полилинейной алгебры.** Тензорные степени<sup>1</sup>  $V^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} V \otimes \dots \otimes V$  векторного пространства  $V$  объединяются в ассоциативную (некоммутативную) алгебру<sup>2</sup>

$$TV \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n},$$

которая называется *тензорной алгеброй* пространства  $V$  или *свободной ассоциативной алгеброй*, порождённой  $V$ . Выбор в  $V$  базиса из векторов  $e_i$  отождествляет  $TV$  с алгеброй многочленов от некоммутирующих друг с другом переменных  $e_i$ : мономы  $n$ -й степени

$$e_{v_1} \otimes \dots \otimes e_{v_n} \quad (3-1)$$

образуют базис в  $V^{\otimes n}$  и перемножаются приписыванием друг к другу через значок  $\otimes$ . Алгебра  $TV$  вместе с вложением

$$\iota: V \hookrightarrow TV, \quad (3-2)$$

которое отождествляет  $V$  с подпространством  $V^{\otimes 1} \subset TV$  однозначно с точностью до единственного перестановочного с  $\iota$  изоморфизма алгебр характеризуется тем, что для любой ассоциативной  $\mathbb{k}$ -алгебры  $A$  и всякого линейного отображения  $f: V \rightarrow A$  существует единственный такой гомоморфизм  $\mathbb{k}$ -алгебр  $\alpha: TV \rightarrow A$ , что  $f = \alpha \circ \iota$ .

Двусторонний идеал  $\mathcal{J}_{\text{com}} \subset TV$ , порождённый всевозможными разностями<sup>3</sup>

$$u \otimes w - w \otimes u \in V \otimes V, \quad (3-3)$$

называется *соотношениями коммутативности*, а фактор алгебра  $SV \stackrel{\text{def}}{=} TV / \mathcal{J}_{\text{com}}$  называется *симметрической алгеброй* пространства  $V$  или *свободной коммутативной алгеброй*, порождённой  $V$ . Выбор в  $V$  базиса  $e_1, \dots, e_d$  отождествляет  $SV$  с алгеброй многочленов  $\mathbb{k}[e_1, \dots, e_d]$ .

Двусторонний идеал  $\mathcal{J}_{\text{sk}} \subset TV$ , порождённый квадратами всевозможных векторов  $v \in V$

$$v \otimes v \in V \otimes V, \quad (3-4)$$

называется *соотношениями антикоммутативности*<sup>4</sup>, а фактор алгебра  $AV \stackrel{\text{def}}{=} TV / \mathcal{J}_{\text{sk}}$  называется *внешней* или *грассмановой алгеброй* пространства  $V$ . Умножение в алгебре  $AV$  называется *внешним* или *грассмановым* и обозначается  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ . Из равенств

$$0 = (u + w) \wedge (u + w) = u \wedge w + w \wedge u$$

вытекает, что внешнее произведение векторов  $u, w \in V$  *знакопеременно*. Выбор в  $V$  базиса  $e_1, \dots, e_d$  отождествляет внешнюю алгебру  $AV$  с алгеброй  $\mathbb{k}\langle e_1, \dots, e_d \rangle$  *грассмановых многочленов*<sup>5</sup> с коэффициентами в  $\mathbb{k}$  от антикоммутирующих переменных  $e_i$  с нулевыми квадратами, базис в которой составляют грассмановы мономы

$$e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}, \quad \text{где } I = (i_1, \dots, i_n) \text{ и } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq d. \quad (3-5)$$

<sup>1</sup>Подробнее про тензорные произведения и тензорную алгебру можно прочитать в лекциях [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2425/lec\\_13.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2425/lec_13.pdf) и [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2425/lec\\_14.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2425/lec_14.pdf).

<sup>2</sup>Мы полагаем  $V^{\otimes 0} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{k}$ , а  $V^{\otimes 1} \stackrel{\text{def}}{=} V$ .

<sup>3</sup>Т. е. наименьшая по включению  $\mathbb{k}$ -подалгебра, содержащая все такие разности и вместе с каждым элементом содержащая все его левые и правые кратные.

<sup>4</sup>Или *суперкоммутативности*, коротко — *s-коммутативности*.

<sup>5</sup>См. раздел 8.3 на с. 132 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2425/lec\\_08.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2425/lec_08.pdf).

Подпространство  $\Lambda^n V \subset \Lambda V$  однородных грассмановых многочленов степени  $n$  имеет размерность  $\dim \Lambda^n V = \binom{d}{n}$ , а вся грассманова алгебра  $\Lambda V = \bigoplus_{n=0}^d \Lambda^n V$  имеет  $\dim \Lambda V = 2^{\dim V} = 2^d$ .

**3.1.1. Свёртки.** Для конечномерного векторного пространства  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  тензорные степени  $V^{\otimes n}$  и  $V^{*\otimes n}$  канонически двойственны друг другу посредством *полной свёртки*, сопоставляющей разложимым тензорам  $v = v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$  и  $\xi = \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$  произведение

$$\langle v, \xi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n \xi_i(v_i). \quad (3-6)$$

Если базисы  $e_1, \dots, e_n \in V$  и  $x_1, \dots, x_n \in V^*$  двойственны друг другу, то составленные из тензорных мономов  $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}$  и  $x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_s}$  базисы в  $V^{\otimes n}$  и  $V^{*\otimes n}$  также двойственны друг другу. Из универсального свойства тензорного произведения вытекает, что пространство линейных отображений  $V^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{k}$  канонически изоморфно пространству  $n$ -линейных форм

$$V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}. \quad (3-7)$$

Комбинация этого изоморфизма с задаваемым полной свёрткой изоморфизмом между  $V^{\otimes n}$  и  $V^{*\otimes n}$  устанавливает канонический изоморфизм между  $V^{*\otimes n}$  и пространством  $n$ -линейных форм (3-7). Разложимому тензору  $\xi = \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$  при этом отвечает  $n$ -линейная форма

$$V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}, (v_1, \dots, v_n) \mapsto \prod_{i=1}^n \xi_i(v_i).$$

Для любых двух упорядоченных наборов из  $m$  неповторяющихся<sup>1</sup> индексов

$$I = (i_1, \dots, i_m), \quad J = (j_1, \dots, j_m)$$

имеется линейное отображение *частичной свёртки* по  $m$  сомножителям  $I, J$

$$c_J^I : V^{*\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow V^{*\otimes(p-m)} \otimes V^{\otimes(q-m)} \quad (3-8)$$

$$\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_q \mapsto \prod_{v=1}^m \xi_{i_v}(v_{j_v}) \cdot \left( \bigotimes_{i \notin I} \xi_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{j \notin J} v_j \right)$$

которое для каждого  $v = 1, 2, \dots, m$  спаривает  $i_v$ -тый сомножитель в  $V^{*\otimes p}$  с  $j_v$ -тым сомножителем в  $V^{\otimes q}$ , а все остальные сомножители оставляет в том же порядке, как они стояли.

**Упражнение 3.1.** Интерпретируем  $n$ -линейную форму  $\varphi : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$  как тензор из  $V^{*\otimes n}$ , обозначим через  $v_{\perp} \varphi$  его свёртку по первому тензорному сомножителю с заданным вектором  $v \in V$  и интерпретируем тензор  $v_{\perp} \varphi \in V^{*\otimes(n-1)}$  как  $(n-1)$ -линейную форму на  $V$ . Убедитесь, что  $v_{\perp} \varphi(w_1, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, \dots, w_{n-1})$ .

**3.1.2. Линейный носитель тензора.** Для заданного тензора  $t \in V^{\otimes n}$  на конечномерном векторном пространстве  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  обозначим через  $\text{supp}(t) \subset V$  пересечение всех таких подпространств  $U \subset V$ , что  $t \in U^{\otimes n}$ . Иначе  $\text{supp}(t)$  описывается как такое наименьшее по включению<sup>2</sup> подпространство  $U \subset V$ , что  $t \in U^{\otimes n}$ .

**Упражнение 3.2.** Убедитесь, что для любой пары векторных подпространств  $U, W \subset V$  включения  $t \in U^{\otimes n}$  и  $t \in W^{\otimes n}$  влекут включение  $t \in (U \cap W)^{\otimes n}$ .

<sup>1</sup>Но не обязательно возрастающих или убывающих.

<sup>2</sup>Или, что то же самое, по размерности.

Подпространство  $\text{supp}(t)$  называется *линейным носителем* тензора  $t$ . Если он отличается от всего пространства  $V$ , тензор  $t$  называется *вырожденными*. Это означает, что часть переменных в некоммутативном многочлене  $t$  можно уничтожить подходящей линейной заменой базиса. Например, если  $\dim \text{supp}(t) = 1$ , то  $t = c \cdot v^{\otimes n}$  для некоторых ненулевых  $c \in \mathbb{k}$  и  $v \in \text{supp}(t)$ .

Чтобы явно указать векторы, линейно порождающие  $\text{supp}(t)$ , где  $t \in V^{\otimes n}$ , для каждого набора  $J = (j_1, \dots, j_{n-1})$  из  $n - 1$  неповторяющихся индексов<sup>1</sup>  $1 \leq j_\nu \leq n$  обозначим через

$$t_J : V^{*\otimes(n-1)} \rightarrow V, \quad \xi \mapsto c_{j_1, \dots, j_{n-1}}^{1, \dots, (n-1)}(\xi \otimes t), \quad (3-9)$$

полную свёртку с тензором  $t$ , спаривающую  $\nu$ -й сомножитель произведения  $V^{*\otimes(n-1)}$  с  $j_\nu$ -м сомножителем тензора  $t$  для каждого  $1 \leq \nu \leq (n - 1)$ . Если записать  $t$  в виде суммы разложимых тензоров вида  $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ , то результатом такой свёртки будет линейная комбинация векторов  $v_i$  с  $i \notin J$ . Очевидно, что она лежит в  $\text{supp}(t)$ .

#### ТЕОРЕМА 3.1

Пространство  $\text{supp}(t)$  линейно порождается образами всех свёрток (3-9).

*Доказательство.* Обозначим  $\text{supp}(t)$  через  $W \subset V$ . Достаточно доказать, каждая линейная форма  $\xi \in V^*$ , аннулирующая образы всех свёрток (3-9), аннулирует подпространство  $W$ . Предположим противное: пусть ковектор  $\xi \in V^*$  имеет ненулевое ограничение на  $W$ , но аннулирует  $t_J (V^{*\otimes(n-1)})$  для всех  $J$ . Выберем в  $V^*$  базис  $\xi_1, \dots, \xi_d$ , в котором  $\xi_1 = \xi$ , а ограничения ковекторов  $\xi_1, \dots, \xi_k$  на  $W$  образуют базис в  $W^*$ . Обозначим через  $w_1, \dots, w_k$  двойственный базис пространства  $W$  и разложим  $t$  по этому базису. Значение  $\xi(t_J(\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{n-1}}))$  равно полной свёртке тензора  $t$  с базисным тензорным мономом  $\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{n-1}} \otimes \xi_1$  по всем  $n$  тензорным сомножителям в том порядке, который предписан последовательностью<sup>2</sup>  $J$ . Получающееся в результате этой свёртки число равно коэффициенту, с которым соответствующий двойственный тензорный моном<sup>3</sup> от базисных векторов  $w_i$  входит в разложение  $t$ . Подбирая надлежащие  $J$ , можно получить коэффициент при любом содержащем  $w_1$  мономе, входящем в разложение  $t$ . Тем самым, все они нулевые, т. е.  $w_1 \notin \text{supp}(t)$  вопреки нашему выбору.  $\square$

**3.1.3. Симметричные и знакопеременные тензоры.** Всюду в этом разделе мы по умолчанию считаем, что основное поле  $\mathbb{k}$  имеет характеристику нуль. Симметрическая группа  $S_n$  действует на  $V^{\otimes n}$  перестановками сомножителей в разложимых тензорах<sup>4</sup>:

$$\forall g \in S_n \quad g(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = v_{g^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{g^{-1}(n)}, \quad (3-10)$$

и так как правая часть полилинейно зависит от  $v_1, \dots, v_n$ , эта формула корректно задаёт линейный оператор  $g : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$ . Тензор  $t \in V^{\otimes n}$  называется *симметричным*, если  $g(t) = t$

<sup>1</sup>Которые не обязаны возрастать или убывать.

<sup>2</sup>Т. е.  $j_\nu$ -й сомножитель тензора  $t$  сворачивается с  $\xi_{i_\nu}$  при  $1 \leq \nu \leq n - 1$ , а оставшийся в  $t$  сомножитель с номером  $\{1, \dots, n\} \setminus J$  сворачивается с  $\xi_1$ .

<sup>3</sup> $j_\nu$ -й множитель этого монома равен  $w_{i_\nu}$  при  $1 \leq \nu \leq n - 1$ , а оставшийся сомножитель с номером  $\{1, \dots, n\} \setminus J$  равен  $w_1$ .

<sup>4</sup>Обратите внимание, что набор занумерованных векторов  $v_1, \dots, v_n$  есть не что иное, как отображение  $v : \{1, \dots, n\} \rightarrow V$ . Левое действие группы  $S_n$  автоморфизмов множества  $\{1, \dots, n\}$  на таких отображениях задаётся правилом  $gv(i) = v(g^{-1}(i))$ . При этом  $i$ -й слева элемент набора  $v$  оказывается в наборе  $g(v)$  на  $g(i)$ -м слева месте.

для всех  $g \in S^n$ , и *знакопеременным* — если  $g(t) = \text{sgn}(g)t$  для всех  $g \in S^n$ . Симметричные и знакопеременные тензоры образуют в  $V^{\otimes n}$  векторные подпространства

$$\begin{aligned}\text{Sym}^n V &= \{ t \in V^{\otimes n} \mid \forall g \in S_n \ g(t) = t \}, \\ \text{Alt}^n V &= \{ t \in V^{\otimes n} \mid \forall g \in S_n \ g(t) = \text{sgn}(g) \cdot t \}.\end{aligned}$$

Зафиксируем в пространстве  $V$  базис  $E \subset V$  и будем записывать тензоры  $t \in V^{\otimes n}$  в виде некоммутативных многочленов от базисных мономов  $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ , где  $e_i \in E$ . Два таких монома лежат в одной  $S_n$ -орбите если и только если для каждого  $e \in E$  количество  $m(e)$  равных  $e$  сомножителей в этих мономах одинаково. Мы заключаем, что  $S_n$ -орбиты базисных мономов в  $V^{\otimes n}$  нумеруются функциями  $m : E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  с конечным носителем и суммой значений  $|m| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{e \in E} m(e)$  равной  $n$ . При этом тензор  $t$  симметричен если и только если вместе с каждым базисным моном в него с тем же самым коэффициентом входят все мономы  $S_n$ -орбиты этого базисного монома. Мы заключаем, что симметричные тензоры

$$e_{[m]} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \text{сумма всех базисных тензорных мономов, куда} \\ \text{каждый вектор } e \in E \text{ входит ровно } m(e) \text{ раз,} \end{pmatrix} \quad (3-11)$$

занумерованные функциями  $m : E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  с  $|m| = n$ , образуют базис векторного подпространства  $\text{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$ . Например, базис в  $\text{Sym}^3(\mathbb{k}^2)$  составляют тензоры

$$\begin{aligned}e_{[3,0]} &= e_1 \otimes e_1 \otimes e_1, & e_{[0,3]} &= e_2 \otimes e_2 \otimes e_2, \\ e_{[2,1]} &= e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_1, \\ e_{[1,2]} &= e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_2 \otimes e_1,\end{aligned}$$

где  $E = \{e_1, e_2\} \subset \mathbb{k}^2$  — стандартный базис, а  $[i, j] : E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $e_1 \mapsto i, e_2 \mapsto j$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.3. Убедитесь, что в сумме (3-11) ровно  $n! / \prod_{e \in E} m(e)!$  слагаемых.

В разложении кососимметричного тензора  $t \in \text{Alt}^n V$  участвуют только те базисные мономы  $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ , у которых  $e_i \neq e_j$  при  $i \neq j$ . Орбита такого монома состоит из  $n!$  мономов

$$e_{g(1)} \otimes \dots \otimes e_{g(n)}, \text{ где } g \in S_n,$$

и коэффициент при каждом таком мономе получается из коэффициента при  $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$  умножением на  $\text{sgn } g$ . Мы заключаем, что если зафиксировать на множестве базисных векторов  $E \subset V$  какой-нибудь линейный порядок, то кососимметричные тензоры

$$\langle e_1 \otimes \dots \otimes e_n \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) e_{g(1)} \otimes \dots \otimes e_{g(n)}, \text{ где } e_1 < \dots < e_n, \quad (3-12)$$

составят базис векторного подпространства  $\text{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$ .

ТЕОРЕМА 3.2 (ПОЛЯРИЗАЦИЯ МНОГОЧЛЕНОВ)

Если  $\text{char } \mathbb{k} = 0$ , то ограничения отображения факторизации

$$V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{J}_{\text{com}} \cap V^{\otimes n}), \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto v_1 \dots v_n, \quad (3-13)$$

на подпространство симметричных тензоров  $\text{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$  и отображения факторизации

$$V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{J}_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n}), \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_n, \quad (3-14)$$

на подпространство знакопеременных тензоров  $\text{Alt}^n \subset V^{\otimes n}$  являются линейными изоморфизмами векторных пространств. Они действуют на стандартные базисы (3-11) и (3-12) так:

$$e_{[m]} \mapsto \frac{n!}{\prod_{e \in E} m(e)!} \prod_{e \in E} e^{m(e)}, \quad (3-15)$$

$$\langle e_1 \otimes \dots \otimes e_n \rangle \mapsto n! e_1 \wedge \dots \wedge e_n. \quad (3-16)$$

Доказательство. Проекция (3-13) переводит каждое из  $n! / \prod_{e \in E} m(e)!$  слагаемых, входящих в сумму (3-11), в стандартный коммутативный базисный моном  $\prod_{e \in E} e^{m(e)}$  алгебры многочленов  $\mathbb{k}[E]$ , а проекция (3-14) переводит каждое из  $n!$  слагаемых суммы (3-12) в стандартный базисный грассманов моном  $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$  алгебры грассмановых многочленов  $\mathbb{k}\langle E \rangle$ .  $\square$

**Предостережение 3.1.** Не смотря на теор. 3.2, симметричные и знакопеременные тензоры, т. е. подпространства  $\text{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$  и  $\text{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$ , не следует путать с однородными многочленами, т. е. с фактор пространствами  $S^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{J}_{\text{com}} \cap V^{\otimes n})$  и  $L^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{J}_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n})$ . Если  $\text{char } \mathbb{k} = p > 0$ , то ограничения проекций  $V^{\otimes n} \rightarrow S^n V$  и  $V^{\otimes n} \rightarrow L^n V$  на подпространства симметрических и знакопеременных тензоров могут иметь ненулевые ядра. Даже в характеристике нуль эти проекции переводят стандартные базисные векторы тензорных и полиномиальных пространств не буквально друг в друга, но в некоторые кратности друг друга, и эти поправочные комбинаторные множители приходится учитывать как при попытке поднять на пространства симметричных и знакопеременных тензоров коммутативное и  $s$ -коммутативное умножения, имеющиеся в алгебрах  $SV$  и  $LV$ , так и при попытке спустить в симметрическую и грассманову алгебру отображения свёртки, которые имеются между тензорами из двойственных пространств  $V$  и  $V^*$ .

**Пример 3.1 (двойственность)**

Если  $\text{char } \mathbb{k} = 0$  и  $\dim V < \infty$ , то ограничение задаваемого полной свёрткой спаривания между  $V^{\otimes n}$  и  $V^{*\otimes n}$  на подпространства  $\text{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$  и  $\text{Sym}^n V^* \subset V^{*\otimes n}$  задаёт между ними невырожденное спаривание, при котором стандартные базисные симметрические тензоры (3-11), составленные из векторов двойственных друг другу базисов в  $V$  и  $V^*$  сворачиваются друг с другом по правилу

$$\langle x_{[m]}, e_{[m]} \rangle = n! / \prod_{e \in E} m(e)! \quad \text{и} \quad \langle x_{[k]}, e_{[\ell]} \rangle = 0 \quad \text{при} \quad k \neq \ell, \quad (3-17)$$

так как каждое слагаемое суммы (3-11) сворачивается в единицу ровно с одним слагаемым такой же суммы, составленной из двойственных базисных векторов, и сворачивается в нуль со всеми прочими базисными мономами. Изоморфизм (3-15) превращает это спаривание в каноническое невырожденное спаривание между симметрическими степенями  $S^n V$  и  $S^n V^*$ , при котором базисные мономы, составленные из векторов любых двойственных друг другу базисов в  $V$  и в  $V^*$  спариваются по правилу

$$\langle x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, e_1^{m_1} \dots e_n^{m_n} \rangle = \begin{cases} m_1! \dots m_n! / n! & \text{если } (k_1, \dots, k_n) = (m_1, \dots, m_n) \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3-18)$$

Аналогичным образом, ограничение полной свёртки на подпространства  $\text{Alt}^n V$  и  $\text{Alt}^n V^*$  над полем характеристики нуль задаёт между ними невырожденное спаривание, при котором стандартные базисные знакопеременные тензоры (3-12) сворачиваются по правилу

$$\langle \langle x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_n} \rangle, \langle e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_n} \rangle \rangle = \begin{cases} n! & \text{если } (i_1, \dots, i_n) = (j_1, \dots, j_n) \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (3-19)$$

и посредством изоморфизма (3-16) это спаривание превращается в невырожденное спаривание между внешними степенями  $\Lambda^n V$  и  $\Lambda^n V^*$ , при котором базисные мономы, составленные из векторов любых двойственных друг базисов в  $V$  и в  $V^*$  спариваются по правилу

$$\langle x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_n}, e_{m_1} \wedge \dots \wedge e_{m_n} \rangle = \begin{cases} 1/n! & \text{если } (i_1, \dots, i_n) = (j_1, \dots, j_n) \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (3-20)$$

где оба набора индексов строго возрастают:  $i_1 < \dots < i_n$  и  $j_1 < \dots < j_n$ .

Предложение 3.1 (принцип Аронгольда)

Над полем характеристики нуль пространство симметрических тензоров  $\text{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$  линейно порождается тензорами  $v^{\otimes n} = v \otimes \dots \otimes v$ , где  $v \in V$ , а пространство однородных многочленов  $S^n V^*$  — многочленами  $\varphi^n$ , где  $\varphi \in V^*$ .

Доказательство. Двойственное к  $\text{Sym}^n V$  пространство канонически изоморфно пространству симметричных  $n$ -линейных форм  $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$ . Если такая форма  $\tilde{f}$  зануляется на всех наборах  $(v, \dots, v)$ , то многочлен  $f \in S^n V^*$ , поляризацией которого она является, задаёт тождественно нулевую функцию  $f : V \rightarrow \mathbb{k}$ , откуда  $f = 0$ , а значит и  $\tilde{f} = 0$ . Тем самым, линейная оболочка тензоров  $v^{\otimes n}$  не лежит ни в какой гиперплоскости пространства  $\text{Sym}^n V$ , что доказывает первое утверждение. Второе следует из первого, поскольку при изоморфизме  $\text{Sym}^n V^* \simeq S^n V^*$  тензоры  $\varphi^{\otimes n}$  переходят в многочлены  $\varphi^n$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 3.4 (усиленный принцип Аронгольда). В условиях предл. 3.1 для любого ненулевого многочлена  $f \in S^n V^*$  покажите, что пространство  $\text{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$  линейно порождается тензорами  $v^{\otimes n}$  с  $f(v) \neq 0$ .

**3.1.4. Линейный носитель (грассманова) многочлена.** Линейным носителем многочлена  $f \in S^n V^*$  (соотв. грассманова многочлена  $\omega \in \Lambda^n V$ ) называется наименьшее такое подпространство  $U \subset V^*$  (соотв.  $W \subset V$ ), что  $f \in S^n U$  (соотв.  $\omega \in \Lambda^n W$ ). Над полем характеристики нуль носитель многочлена совпадает с носителем его полной поляризации:  $\text{supp } f = \text{supp } \tilde{f}$  (соотв.  $\text{supp } \omega = \text{supp } \tilde{\omega}$ ) и может быть найден при помощи теор. 3.1 на стр. 40, причём в силу симметричности тензора  $\tilde{f} \in \text{Sym}^n V^*$  (соотв. знакопеременности тензора  $\tilde{\omega} \in \text{Alt}^n V$ ) образ полной свёртки

$$f_J : V^{\otimes(n-1)} \rightarrow V^*, \quad \tau \mapsto c_{1, \dots, (n-1)}^{j_1, \dots, j_{n-1}}(\tilde{f} \otimes \tau), \quad (3-21)$$

сворачивающей все  $n-1$  сомножителей тензора  $\tau \in V^{\otimes(n-1)}$  с какими-то  $n-1$  сомножителями с тензора  $\tilde{f}$ , как и образ полной свёртки

$$\omega_J : V^{*\otimes(n-1)} \rightarrow V, \quad \eta \mapsto c_{j_1, \dots, j_{n-1}}^{1, \dots, (n-1)}(\eta \otimes \omega), \quad (3-22)$$

сворачивающей все  $n-1$  сомножителей тензора  $\eta \in V^{*\otimes(n-1)}$  с какими-то  $n-1$  сомножителями с тензора  $\tilde{\omega}$  не зависят от выбора последовательности  $J$  номеров сворачиваемых  $n-1$  сомножителей у тензоров  $\tilde{f}$  и  $\tilde{\omega}$ . Таким образом, линейный носитель  $\text{supp } f \subset V^*$  обычного многочлена  $f \in S^n V^*$  и линейный носитель  $\text{supp } \omega = \text{supp } \tilde{\omega}$  грассманова многочлена  $\omega \in \Lambda^n V$  совпадают, соответственно, с образами отображений (3-21) и (3-22) полной свёртки по первым  $n-1$  тензорным сомножителям  $J = \{1, \dots, n-1\}$ .

**3.1.5. Многочлены с минимальным (одномерным) носителем.** Если записать многочлен  $f$  в виде

$$f = \sum_{v_1 \dots v_d} \frac{n!}{v_1! \dots v_d!} a_{v_1 \dots v_d} x_1^{v_1} \dots x_d^{v_d}, \quad (3-23)$$

то его полная поляризация, согласно форм. (3-15) на стр. 42, будет иметь вид

$$\tilde{f} = \sum_{v_1 \dots v_d} a_{v_1 \dots v_d} x_{[v_1 \dots v_d]},$$

где  $x_{[v_1 \dots v_d]} \in \text{Sym}^n V^*$  — сумма всех тензорных мономов, содержащих  $v_i$  сомножителей  $x_i$  для всех  $i = 1, \dots, d$ . Образ полной свёртки (3-21) порождается  $\binom{n+d-2}{d-1}$  линейными формами

$$\varphi_{m_1 \dots m_d}(x) = \tilde{f}(e_1^{m_1}, \dots, e_d^{m_d}, x) = \sum_{i=1}^d a_{m_1 \dots m_{i-1}(m_i+1)m_{i+1} \dots m_d} x_i, \quad (3-24)$$

где  $m_1 + \dots + m_d = n - 1$  и все  $m_i \geq 0$ , а  $x = (x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^d x_i e_i \in V$ .

**Предложение 3.2 (многочлены с одномерным носителем)**

Однородный многочлен (3-23) над полем характеристики нуль пропорционален чистой  $n$ -й степени линейной формы, если и только если  $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$ -матрица из коэффициентов линейных форм (3-24) имеет ранг 1, и в этом случае в качестве таковой формы можно взять любую из форм (3-24).

**Доказательство.** Если  $f = \lambda \varphi^n$ , где  $\lambda \in \mathbb{k}$ ,  $\varphi \in V^*$ , то  $\text{supp } f$  одномерен и порождается формой  $\varphi$ , а все формы (3-24) пропорциональны форме  $\varphi$ . Наоборот, если все формы (3-24) пропорциональны некоторой форме  $\psi \in V^*$ , то  $\text{supp } f = \mathbb{k} \psi$  и  $f = \lambda \psi^n$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{k}$ .  $\square$

**Пример 3.2 (опять кривая Веронезе)**

При  $d = 2$  для однородной бинарной формы  $n$ -й степени

$$f(x_0, x_1) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \binom{n}{k} \cdot x_0^k x_1^{n-k}$$

получаем ровно  $n$  линейных форм (3-24):

$$\varphi_k(x) = f(e_0^k, e_1^{n-k-1}, x) = a_{k+1} x_0 + a_k x_1, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

и заключаем, что форма  $f$  пропорциональна форме вида  $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n$ , если и только если

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = 1,$$

что выражается системой квадратичных уравнений

$$\det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ a_{i+1} & a_{j+1} \end{pmatrix} = 0$$

на коэффициенты  $a_i$  многочлена  $f$ . Например, кубика Веронезе в  $\mathbb{P}_3$  с однородными координатами  $(a_0 : \dots : a_3)$  представляет собой пересечение трёх квадратик:

$$a_0 a_2 = a_1^2, \quad a_0 a_3 = a_1 a_2, \quad a_2^2 = a_1 a_3,$$

каждые две из которых пересекаются по объединению кривой Веронезе и общей для обеих квадратик прямолинейной образующей.

**Упражнение 3.5.** Убедитесь в этом.

**3.1.6. Грассмановы многочлены с минимальным носителем.** В отличие от обычных многочленов, размерность носителя однородного грассманова многочлена ограничена снизу его степенью.

УПРАЖНЕНИЕ 3.6. Пусть  $\dim U = m$  и  $\omega \in \Lambda U$  — ненулевой грассманов многочлен. Убедитесь, что а) если  $\omega \in \Lambda^n U$ , то  $\dim \text{supp } \omega \geq n$  б)  $\omega \in \Lambda^m U$  тогда и только тогда, когда  $v \wedge \omega = 0$  для всех  $v \in V$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3 (ГРАССМАНОВЫ МНОГОЧЛЕНЫ С МИНИМАЛЬНЫМ НЕНУЛЕВЫМ НОСИТЕЛЕМ)

Следующие три условия на грассманов многочлен

$$\omega = \sum_I a_I e_I = \sum_{i_1 < \dots < i_n} a_{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}, \quad (3-25)$$

где  $I = (i_1, \dots, i_n)$  пробегает возрастающие последовательности из  $n$  индексов, эквивалентны:

- 1)  $\dim \text{supp } \omega \leq n$  2)  $\omega = u_1 \wedge \dots \wedge u_n$ , где  $u_1, \dots, u_n \in V$  3)  $\forall u \in \text{supp } \omega \ u \wedge \omega = 0$
- 4) для любых двух наборов  $I, J$  возрастающих индексов  $i_1 < \dots < i_{m+1}$  и  $j_1 < \dots < j_{m-1}$ , таких, что  $I \not\supset J$ , выполнены соотношения Пюккера

$$\sum_{v=1}^{m+1} (-1)^{v-1} \tilde{a}_{j_1 \dots j_{m-1} i_v} a_{i_1 \dots \hat{i}_v \dots i_{m+1}} = 0, \quad (3-26)$$

где «крышка» в  $a_{i_1 \dots \hat{i}_v \dots i_{m+1}}$  означает, что индекс  $i_v$  следует пропустить.

Доказательство. Условия (1), (2) и (3) очевидно эквивалентны и означают, что  $\omega$  лежит в старшей внешней степени  $\Lambda^{\dim \text{supp } \omega}$  своей линейной оболочки  $\text{supp } \omega$ . Полной поляризацией грассманова многочлена (3-25) является знакопеременный тензор

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{n!} \sum_I a_I \langle e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} \rangle = \sum_{i_1, \dots, i_n} \tilde{a}_{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}, \quad (3-27)$$

где справа суммирование идёт уже по всем последовательностям из  $n$  не повторяющихся индексов, а коэффициенты  $\tilde{a}_{i_1 \dots i_n}$  кососимметричны по  $i_1, \dots, i_n$  и  $\tilde{a}_{i_1 \dots i_n} = a_{i_1 \dots i_n} / n!$  когда индексы строго возрастают. Подпространство  $\text{supp}(\tilde{\omega}) \subset V$  является образом полной свёртки

$$c_{\tilde{\omega}} : V^{*\otimes(n-1)} \rightarrow V$$

с тензором  $\tilde{\omega} \in V^{\otimes n}$  по первым  $n - 1$  тензорным сомножителям и линейно порождается векторами

$$w_J = c_{\tilde{\omega}}(x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_{n-1}}) = \sum_{i \notin J} \tilde{a}_{j_1 \dots j_{n-1} i} e_i, \quad (3-28)$$

где  $J = (j_1, \dots, j_{n-1})$  пробегает возрастающие последовательности из  $n - 1$  индексов. Соотношение (3-26) констатирует обнуление коэффициента при  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{m+1}}$  в произведении  $w_J \wedge \omega$  для линейно порождающих  $\text{supp } \omega$  векторов  $w_J$  из формулы (3-28).  $\square$

ПРИМЕР 3.3 (соотношение Пюккера для  $\Lambda^2 \mathbb{K}^4$ )

Для четырёхмерного пространства  $V$  с базисом  $e_1, \dots, e_4$  и  $\omega = \sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j$  соотношение Пюккера для наборов индексов  $I = (2, 3, 4)$  и  $J = (1)$  имеет вид  $-a_{12} a_{34} + a_{13} a_{24} - a_{14} a_{23} = 0$ , и любой другой выбор непересекающихся наборов  $(i_1, i_2, i_3)$  и  $(j)$  приводит к тому же самому с точностью до общего знака соотношению. Если  $j \in \{i_1, i_2, i_3\}$ , скажем  $I = (1, 2, 3)$ ,  $J = (1)$ , то получается тривиальное соотношение  $a_{12} a_{13} - a_{13} a_{12} = 0$ .

## Предложение 3.4

Если  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ , то однородный грассманов многочлен  $\omega \in \Lambda^2 V$  тогда и только тогда разложим в произведение  $u \wedge w$  двух векторов  $u, w \in V$ , когда  $\omega \wedge \omega = 0$ .

Доказательство. Если  $\omega = u \wedge w$ , то  $\omega \wedge \omega = u \wedge w \wedge u \wedge w = 0$ . Чтобы получить обратное, перейдём к базису Дарбу<sup>1</sup>  $e_1, \dots, e_d$  в  $V$ , где  $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots$ . Если  $\omega$  неразложим, то в этой сумме есть хотя бы два слагаемых, и тогда базисный моном  $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$  войдёт в  $\omega \wedge \omega$  с коэффициентом 2, и тем самым  $\omega \times \omega \neq 0$ , если  $2 \neq 0$ .  $\square$

Пример 3.4 (соотношения Плюккера для  $\Lambda^2 \mathbb{k}^5$ )

Если  $V = \mathbb{k}^5$  с базисом  $e_1, \dots, e_5$ , то по предл. 3.4 разложимость грассмановой квадратичной формы  $\omega = \sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2 V$  равносильна равенству  $\omega \wedge \omega = 0$ . Поскольку  $\omega \wedge \omega$  лежит в пятимерном пространстве  $\Lambda^4 \mathbb{k}^5$ , это равенство эквивалентно пяти квадратичным соотношениям на коэффициенты  $a_{ij}$  формы  $\omega$ . Эти пять соотношений совпадают с пятью соотношениями Плюккера, возникающими из пяти пар непересекающихся наборов индексов  $I = (i_1, i_2, i_3)$  и  $J = (j)$ , объединения которых  $I \sqcup J$  пробегает пять различных четырёхэлементных подмножеств в  $\{1, \dots, 5\}$ . При фиксированном  $I \sqcup J$  четыре различных разбиения этого множества на непересекающиеся поднаборы из одного и трёх элементов дают, как и в предыдущем прим. 3.3, одинаковые с точностью до общего знака соотношения вида

$$\tilde{a}_{i_1 j} a_{i_2 i_3} - \tilde{a}_{i_2 j} a_{i_1 i_3} + \tilde{a}_{i_3 j} a_{i_1 i_2} = 0.$$

При  $j = i_1 \in \{i_1, i_2, i_3\}$  получается тривиальное соотношение  $a_{i_1 i_2} a_{i_1 i_3} - a_{i_1 i_3} a_{i_1 i_2} = 0$ .

**3.2. Грассманианы.** Множество всех  $m$ -мерных векторных подпространств  $d$ -мерного векторного пространства  $V$  называется *грассманианом*  $\text{Gr}(m, d)$  или  $\text{Gr}(m, V)$ , если важно подчеркнуть природу пространства  $V$ . С проективной точки зрения грассманиан  $\text{Gr}(m, d)$  есть множество  $(m-1)$ -мерных проективных подпространств в  $\mathbb{P}_{d-1}$ . Грассманианы являются естественными обобщениями проективных пространств: двойственные пространства

$$\mathbb{P}_n = \text{Gr}(1, n+1) \quad \text{и} \quad \mathbb{P}_n^\times = \text{Gr}(n, n+1)$$

служат простейшими примерами грассманианов. Двойственность  $U \leftrightarrow \text{Ann } U$  между  $m$ -мерными и  $(d-m)$ -мерными подпространствами двойственных векторных пространств  $V$  и  $V^*$  задаёт каноническое отождествление  $\text{Gr}(m, V) = \text{Gr}(d-m, V^*)$ .

**3.2.1. Плюккерovo вложение.** Грассманиан  $\text{Gr}(m, V)$  вкладывается в  $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$  отображением Плюккера

$$p_m : \text{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V), \quad (3-29)$$

которое переводит  $m$ -мерное векторное подпространство  $U \subset V$  в одномерное векторное подпространство  $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$ . Если векторы  $u_1, \dots, u_m$  образуют базис в  $U$ , то  $p_m(U) = u_1 \wedge \dots \wedge u_m$ . Выбор другого базиса  $w_1, \dots, w_m$  из векторов  $w_i = \sum_j a_{ij} u_j$  заменяет  $u_1 \wedge \dots \wedge u_m$  на пропорциональный разложимый грассманов многочлен  $w_1 \wedge \dots \wedge w_m = \det(a_{ij}) u_1 \wedge \dots \wedge u_m$ .

## Предложение 3.5

Отображение Плюккера (3-29) инъективно, а его образ является алгебраическим многообразием, задаваемым квадратичными соотношениями Плюккера из предл. 3.3.

<sup>1</sup>См. пример 14.5 на стр. 230 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2425/lec\\_14.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2425/lec_14.pdf).

Доказательство. Образ отображения (3-29) состоит из всех разложимых грассмановых многочленов степени  $m$  и описывается в предл. 3.3 на стр. 45. Покажем, что отображение Плюккера инъективно. Пусть  $U \neq W$  и  $\dim U \cap W = r < m$ . Тогда в  $V$  есть базис из таких векторов

$$e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_s, v_1, \dots, v_t,$$

где  $s = m - r$ , что векторы  $e_1, \dots, e_r$  образуют базис в  $U \cap W$ , а наборы векторов

$$e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_s \quad \text{и} \quad e_1, \dots, e_r, w_1, \dots, w_s$$

являются базисами в  $U$  и в  $W$ . Отображение Плюккера сопоставляет им разные базисные мономы  $e_1 \wedge \dots \wedge e_r \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_s$  и  $e_1 \wedge \dots \wedge e_r \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_s$  пространства  $\Lambda^m V$ .  $\square$

**3.2.2. Однородные координаты на грассманиане** обобщают однородные координаты на проективном пространстве. Если зафиксировать в  $V$  базис  $e_1, \dots, e_d$ , то  $m$ -мерное подпространство  $U \subset V$  можно задавать матрицей  $X_u$  размера  $d \times m$ , по строкам которой записаны координаты векторов  $u_1, \dots, u_m$  какого-нибудь базиса  $u$  в  $U$ . Разумеется, такое представление не единственно: другому базису  $w$  в  $U$ , составленному из векторов  $w_1, \dots, w_m$ , отвечает другая матрица  $X_w = C_{wu} X_u$ , получающаяся из  $X_u$  умножением слева на невырожденную квадратную  $m \times m$ -матрицу перехода, которая определяется соотношением

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = C_{wu} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

Мы заключаем, что грассманиан  $\text{Gr}(m, d) = \text{GL}_m(\mathbb{k}) \setminus \text{Mat}_{m \times d}^\circ(\mathbb{k})$  является множеством орбит левого действия группы  $\text{GL}_m(\mathbb{k})$  на множестве  $\text{Mat}_{m \times d}^\circ(\mathbb{k})$  матриц размера  $m \times d$  и ранга  $m$ . При  $m = 1$  это описание превращается в описание проективного пространства  $\mathbb{P}_{d-1}$  как множества ненулевых координатных строк длины  $d$  с точностью до умножения на ненулевые константы. Таким образом, матрица  $X_u$  с точностью до умножения слева на обратимые матрицы является прямым аналогом однородных координат.

**3.2.3. Плюккеревы координаты.** Плюккерovo вложение  $p_m : \text{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$  сопоставляет  $m$ -мерному подпространству  $U \subset V$  с базисом  $u_1, \dots, u_m$  одномерное подпространство  $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$  с базисом  $u_1 \wedge \dots \wedge u_m$ . Если зафиксировать в  $V$  базис  $e_1, \dots, e_d$ , а в  $\Lambda^m V$  — базис из грассмановых мономов  $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ , то  $I$ -й однородной координатой разложимого грассманова многочлена  $u_1 \wedge \dots \wedge u_m$  относительно базиса из мономов  $e_I$  будет  $I$ -й минор  $\det X_I$  порядка  $m$ , где  $X_I \subset X$  — подматрица, образованная столбцами с номерами  $i_1, \dots, i_m$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.7. Убедитесь в этом.

При умножении матрицы  $X$  слева на обратимую матрицу  $C \in \text{GL}_m$  все  $(m \times m)$ -миноры  $\det X_I$  матрицы  $X$  умножатся на ненулевую константу  $\det C$ . Рассматриваемый с точностью до пропорциональности набор миноров  $\det X_I$  называется *плюккеревыми координатами* задаваемой матрицей  $X$  точки грассманиана  $\text{Gr}(m, d)$ . Таким образом, плюккеревы координаты суть ограничения однородных координат в  $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$  на образ грассманиана при плюккеревом вложении  $p_m : \text{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ .

**3.2.4. Стандартное аффинное покрытие и аффинные координаты.** Аналогом  $i$ -й стандартной аффинной карты  $U_i$  проективного пространства<sup>1</sup>  $\mathbb{P}^n = \text{Gr}(1, n)$  на произвольном грассманиане  $\text{Gr}(m, d)$  является множество  $U_I$  всех  $m \times d$  матриц  $X$  с ненулевым минором  $\det X_I$ . В  $\text{GL}_m(\mathbb{k})$ -орбите каждой такой матрицы  $X$  есть единственный представитель, имеющий в столбцах  $I$  единичную матрицу размера  $m \times m$ . Обозначим его  $T^{(I)} \stackrel{\text{def}}{=} X_I^{-1}X$ . Стоящие вне столбцов с номерами из  $I$  матричные элементы  $t_{\mu\nu}^{(I)}$  матрицы  $T^{(I)}$  называются *локальными аффинными координатами* точки  $X \in \text{Gr}(m, d)$  в стандартной карте  $U_I$ , и всего их имеется  $m(d - m)$ . Плюккерово вложение  $p_m : \text{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$  биективно отображает карту  $U_I \subset \text{Gr}(m, V)$  на пересечение образа  $p_m(\text{Gr}(m, V))$  со стандартной аффинной картой  $U_I \subset \mathbb{P}(\Lambda^m V)$  на проективном пространстве.

На геометрическом языке карта  $U_I \subset \text{Gr}(m, V)$  состоит из всех подпространств  $U \subset V$ , которые изоморфно отображаются на  $I$ -е координатное подпространство  $E_I \subset V$ , натянутое на базисные векторы  $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$ , при проекции  $\pi_I : V \rightarrow E_I$  вдоль дополнительного координатного подпространства  $E_J \subset V$ , натянутого на базисные векторы  $e_j$  с  $j \notin I$ . Подпространство  $U \subset V$  лежит в стандартной карте  $U_I$  если и только если  $U \cap E_J = 0$ , и в каждом таком подпространстве  $U$  имеется единственный базис  $u_1, \dots, u_m$ , который проектируется в стандартный базис  $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$  пространства  $E_I$ . Матрица  $T^{(I)}$  составлена из координат этих векторов  $u_i$ .

**3.2.5. Аффинная окрестность точки.** Более общим образом, для любого  $(d - m)$ -мерного векторного подпространства  $W \subset V$  множество  $U_W = \{U \in \text{Gr}(m, V) \mid U \cap W = 0\}$  является аффинным пространством над векторным пространством  $\text{Hom}(V/W, W)$ . В самом деле, любые два дополнительные к  $W$  подпространства  $U_1, U_2$  изоморфно проектируются на  $V/W$  при факторизации  $\pi_W : V \rightarrow V/W$ . Поэтому у каждого класса  $[v] = [v_1] = [v_2] \in V/W$  имеются единственные представители  $v_1 \in U_1$  и  $v_2 \in U_2$ . Обозначая через  $\overline{U_1 U_2} : V/W \rightarrow W$  линейное отображение, переводящее класс  $[v] \in V/W$  в разность  $v_2 - v_1 \in W$  этих представителей, мы сопоставляем каждой паре точек  $U_1, U_2 \in U_W$  вектор  $\overline{U_1 U_2} \in \text{Hom}(V/W, W)$ . Очевидно, что  $\overline{U_1 U_2} + \overline{U_2 U_3} = \overline{U_1 U_3}$  для всех  $U_1, U_2, U_3 \in U_W$ . Если зафиксировать любое «начальное» подпространство  $U \in U_W$  и отождествить его с  $V/W$  при помощи изоморфизма  $\pi_W|_U : U \xrightarrow{\sim} V/W$ , а  $\text{Hom}(V/W, W)$  отождествить с  $\text{Hom}(U, W)$ , то отображение векторизации с центром в  $U$ , переводящее каждую точку  $U_1 \in U_W$  в её радиус вектор  $\overline{U U_1} \in \text{Hom}(U, W)$ , будет сопоставлять каждому дополнительному к  $W$  подпространству  $U_1 \subset U \oplus W$  линейное отображение  $U \rightarrow W$ , графиком которого является подпространство  $U_1$ . Очевидно, что такое сопоставление биективно. Поскольку  $W \simeq V/U$ , можно сказать, что каждая точка  $U \in \text{Gr}(m, V)$  обладает аффинной окрестностью, получающейся «откладыванием» от  $U$  всевозможных векторов из пространства  $\text{Hom}(U, V/U)$ . Если зафиксировать какое-нибудь дополнительное к  $U$  подпространство  $W$  и представлять классы из  $V/U$  векторами из  $W$ , то результатом «откладывания» от  $U$  отображения  $\tau : U \rightarrow W$  будет график  $\Gamma_\tau = \{(u, \tau(u)) \in U \oplus W \mid u \in U\}$  отображения  $\tau$ , представляющий собою дополнительное к  $W$  подпространство в  $V = U \oplus W$ .

**3.2.6. Клеточное разбиение.** Метод Гаусса показывает, что любое подпространство  $U \subset V$  обладает *единственным* базисом  $\{u_1, \dots, u_m\}$ , матрица координат которого имеет *строгий*

<sup>1</sup>Она состоит из всех точек  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$  с  $x_i \neq 0$ . Каждая такая точка  $p$  однозначно представляется вектором, у которого  $x_i = 1$ , и остальные  $n$  координат этого вектора берутся в качестве локальных аффинных координат точки  $p$  в карте  $U_i$ , см. пример 16.4 на стр. 207 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/2122/lec\\_16.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_16.pdf).

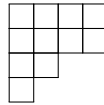
ступенчатый вид<sup>1</sup>.

УПРАЖНЕНИЕ 3.8. Докажите, что различные строго ступенчатые матрицы задают разные подпространства в  $V$ .

Таким образом возникает биекция между точками грассманиана  $\text{Gr}(m, d)$  и строгими ступенчатыми матрицами ранга  $m$  и размера  $m \times d$ . Строгие ступенчатые матрицы, ступеньки которых располагаются в столбцах с возрастающими номерами  $I = (i_1, \dots, i_m)$ , образуют аффинное пространство размерности

$$m(d - m) - \sum_{v=1}^m (i_v - v) = \dim \text{Gr}(m, d) - \left( |I| - \frac{m(m+1)}{2} \right).$$

Весь грассманиан  $\text{Gr}(m, d)$  является дизъюнктивным объединением  $\binom{d}{m}$  таких аффинных пространств, отвечающих различным выборам  $I$ . Эти аффинные пространства называются *открытыми* или *аффинными клетками Шуберта*. Альтернативным общепринятым способом нумерации клеток Шуберта является их индексация диаграммами Юнга<sup>2</sup>  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ , уместающимися в прямоугольнике  $m \times (d - m)$ . При этом длина  $v$ -той сверху строки  $\lambda_v$  указывает на сколько клеток самый левый ненулевой элемент в  $v$ -той снизу строке ступенчатой матрицы сдвинут вправо от самого левого возможного своего положения, т. е. углы ступенек в матрице типа  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  находятся в столбцах с номерами  $i_v = (m+1-v) + \lambda_{m+1-v}$ . Открытая клетка Шуберта, отвечающая диаграмме  $\lambda$ , обозначается  $\sigma_\lambda$ . Обратите внимание, что коразмерность такой клетки в грассманиане в точности равна количеству клеток  $|\lambda|$  в диаграмме  $\lambda$ . Например, диаграмма



отвечает 13-мерной аффинной клетке Шуберта  $\sigma_{4,4,2,1} \in \text{Gr}(4, 10)$ , образованной подпространствами  $U \subset \mathbb{K}^{10}$ , порождёнными строками строгих ступенчатых матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}.$$

Пустой диаграмме  $(0, 0, 0, 0)$  отвечает самое левое из всех возможных положений ступенек, т. е. 24-мерное пространство матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>Т. е. самый левый ненулевой элемент каждой строки равен единице, располагается строго правее, чем в предыдущей строке, и является единственным ненулевым элементом в своём столбце.

<sup>2</sup>Т. е. выровненных по левому краю горизонтальных клетчатых полосочек, длины которых образуют невозрастающую сверху вниз последовательность  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$ .

представляющее собою стандартную аффинную карту  $U_{(1,2,3,4)} \subset \text{Gr}(4, 10)$ ). Самая большая диаграмма — прямоугольник  $(6, 6, 6, 6)$  — описывает нульмерное аффинное пространство, ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с самым правым из возможных расположением ступенек. Над конечным полем  $\mathbb{k}$  из  $q$  элементов разбиение  $\text{Gr}(m, d) = \bigsqcup \overset{\circ}{\sigma}_\lambda$  влечёт формулу

$$\binom{d}{m}_q = q^m (d - m) \sum_{\lambda} q^{-|\lambda|},$$

где суммирование происходит по всем диаграммам Юнга, уместяющимся в прямоугольнике  $m \times (d - m)$ , а

$$\binom{d}{m}_q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(q^d - 1)(q^d - q) \cdots (q^d - q^{m-1})}{(q^m - 1)(q^d - q) \cdots (q^m - q^{m-1})}$$

обозначает Гауссов  $q$ -биномиальный коэффициент.

**3.3. Рабочий пример: квадратика Плюккера в  $\mathbb{P}_5$  и прямые в  $\mathbb{P}_3$ .** Первым отличным от проективного пространства грассманианом является  $\text{Gr}(2, 4)$ , точками которого служат двумерные векторные подпространства  $U$  в  $V = \mathbb{k}^4$  или, что то же самое, проективные прямые  $\ell = \mathbb{P}(U)$  в  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ . Грассманиан  $\text{Gr}(2, 4)$  вкладывается в  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$  отображением Плюккера

$$p : \text{Gr}(2, 4) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V), \quad U \mapsto \Lambda^2 U, \quad (3-30)$$

которое переводит прямую  $(ab) \subset \mathbb{P}_3$ , являющуюся проективизацией двумерного векторного подпространства  $U \subset V$  с базисом  $a, b$ , в одномерное подпространство  $\Lambda^2 U \subset \Lambda^2 V$ , порождённое грассмановым произведением  $a \wedge b$ . Согласно предл. 3.4 на стр. 46, разложимость грассмановой квадратичной формы  $\omega \in \Lambda^2 V$  на два линейных множителя равносильна тому, что  $\omega \wedge \omega = 0$ . Это соотношение задаёт в пространстве  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$  квадратика Плюккера

$$P = V(q) = \{ \omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0 \}, \quad (3-31)$$

Симметричная билинейная форма  $\tilde{q} : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \rightarrow \mathbb{k}$ , которая является поляризацией уравнения этой квадратика, однозначно с точностью до пропорциональности определяется тем, что для всех  $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^2 V$  в одномерном векторном пространстве  $\Lambda^4 V$  выполняется равенство

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{q}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad (3-32)$$

где  $e_1, e_2, e_3, e_4$  — произвольный базис в  $V$ .

Упражнение 3.9. Убедитесь, что задаваемая равенством (3-32) форма  $\tilde{q}$  билинейна, симметрична, невырождена и при выборе другого базиса в  $V$  умножается на ненулевую константу.

Напишите её матрицу Грама в стандартном базисе из мономов  $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ .

В координатах  $x_{ij}$  относительно стандартного базиса  $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ , равенство  $\omega \wedge \omega = 0$  для формы  $\omega = \sum_{ij} x_{ij} e_{ij}$  имеет вид<sup>1</sup>  $x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0$ , а отображение (3-30) переводит прямую  $(ab)$ , порождённую векторами  $a, b$ , строки координат которых в базисе  $e_1, \dots, e_4$

<sup>1</sup>См. прим. 3.3 на стр. 45.

составляют  $2 \times 4$  матрицу  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ , в грассманову квадратичную форму  $a \wedge b$  с координатами  $x_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$ .

ЛЕММА 3.1

Две прямые  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$  пересекаются если и только если их плюккеровы образы ортогональны относительно квадратичной формы (3-32).

Доказательство. Если  $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ , то в  $V$  существует такой базис  $e_1, e_2, e_3, e_4$ , что  $\ell_1 = (e_1 e_2)$ , а  $\ell_2 = (e_3 e_4)$ . Тогда  $p(\ell_1) \wedge p(\ell_2) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$ . Если  $\ell_1$  и  $\ell_2$  пересекаются в точке  $a$ , то  $\ell_1 = (ab)$ , а  $\ell_2 = (ac)$  для некоторых  $b, c \in V$ , и  $p(\ell_1) \wedge p(\ell_2) = a \wedge b \wedge a \wedge c = 0$ .  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3.1

$P \cap T_p P = \{p(\ell') \mid \ell' \cap \ell \neq \emptyset\}$  для любой точки  $p = p(\ell) \in P$ .

**3.3.1. Связки и пучки прямых в  $\mathbb{P}_3$ .** Множество прямых в  $\mathbb{P}_3$  называется *связкой*, если его плюккеров образ является двумерной плоскостью. Каждая такая плоскость  $\pi \subset P$  линейно порождается тройкой неколлинеарных точек  $a_i = p(\ell_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . При этом

$$\pi = T_{a_1} P \cap T_{a_2} P \cap T_{a_3} P \subset P.$$

По лем. 3.1 и сл. 3.1 соответствующая связка прямых состоит из всех прямых, пересекающих каждую из трёх попарно пересекающихся прямых  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  в  $\mathbb{P}_3$ . Три прямые в  $\mathbb{P}_3$  попарно пересекаются ровно в двух случаях: когда они лежат в одной плоскости или когда они проходят через одну точку. Таким образом, есть два геометрически разных типа связок прямых на  $\mathbb{P}_3$ :

$\alpha$ -плоскость  $\pi_\alpha(c) \subset P$ , состоящая из всех прямых, проходящих через данную точку  $c \in \mathbb{P}_3$

$\beta$ -плоскость  $\pi_\beta(\Pi) \subset P$ , состоящая из всех прямых, лежащих в данной плоскости  $\Pi \subset \mathbb{P}_3$ .

Эти два семейства плоскостей на квадрике  $P$  таковы, что любые две плоскости одного типа пересекаются по точке:  $\pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) = p(\Pi_1 \cap \Pi_2)$ ,  $\pi_\alpha(c_1) \cap \pi_\alpha(c_2) = p((c_1 c_2))$ , а две плоскости  $\pi_\beta(\Pi)$ ,  $\pi_\alpha(c)$  разных типов не пересекаются при  $c \notin \Pi$ , а при  $c \in \Pi$  пересекаются по прямой

$$\lambda(c, \Pi) = \{p(\ell) \in P \mid c \in \ell \subset \Pi\}, \quad (3-33)$$

которая является плюккеровым образом пучка прямых, лежащих в плоскости  $\Pi$  и проходящих через точку  $c \in \Pi$ . Покажем, что все лежащие на квадрике  $P$  прямые имеют вид (3-33). Для этого рассмотрим конус  $C = P \cap T_a P$  с вершиной в точке  $a \in P$ , образованный всеми проходящими через  $a$  прямыми, лежащими на  $P$ , и зафиксируем любое не проходящее через  $a$  трёхмерное проективное подпространство  $H \subset T_a P$ , см. рис. 3◊1 на стр. 52. Пересечение  $G = C \cap H$  является гладкой 1-планарной квадратикой в  $H$ , и любая проходящая через  $a$  прямая на  $P$  имеет вид  $(ab) = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$  для некоторой точки  $b \in G$  и плоскостей  $\pi_\alpha, \pi_\beta$  натянутых на точку  $p$  и пару проходящих через  $b$  прямолинейных образующих квадрики  $G$ .

**3.3.2. Клеточное разбиение плюккеровой квадратки.** Зафиксируем какую-нибудь дополнительную к точке  $p \in P$  трёхмерную гиперплоскость  $H \subset T_p P$  в четырёхмерном касательном пространстве  $T_p P$  к квадратке Плюккера  $P \subset \mathbb{P}_5$ . Особая квадратка  $C = P \cap T_p P$  представляет собой простой конус с вершиной  $p$  над неособой квадратикой  $G = H \cap P$ , изоморфной квадратке Сегре в  $\mathbb{P}_3$ . Это приводит к следующей стратификации плюккеровой квадратки замкнутыми подмножествами:

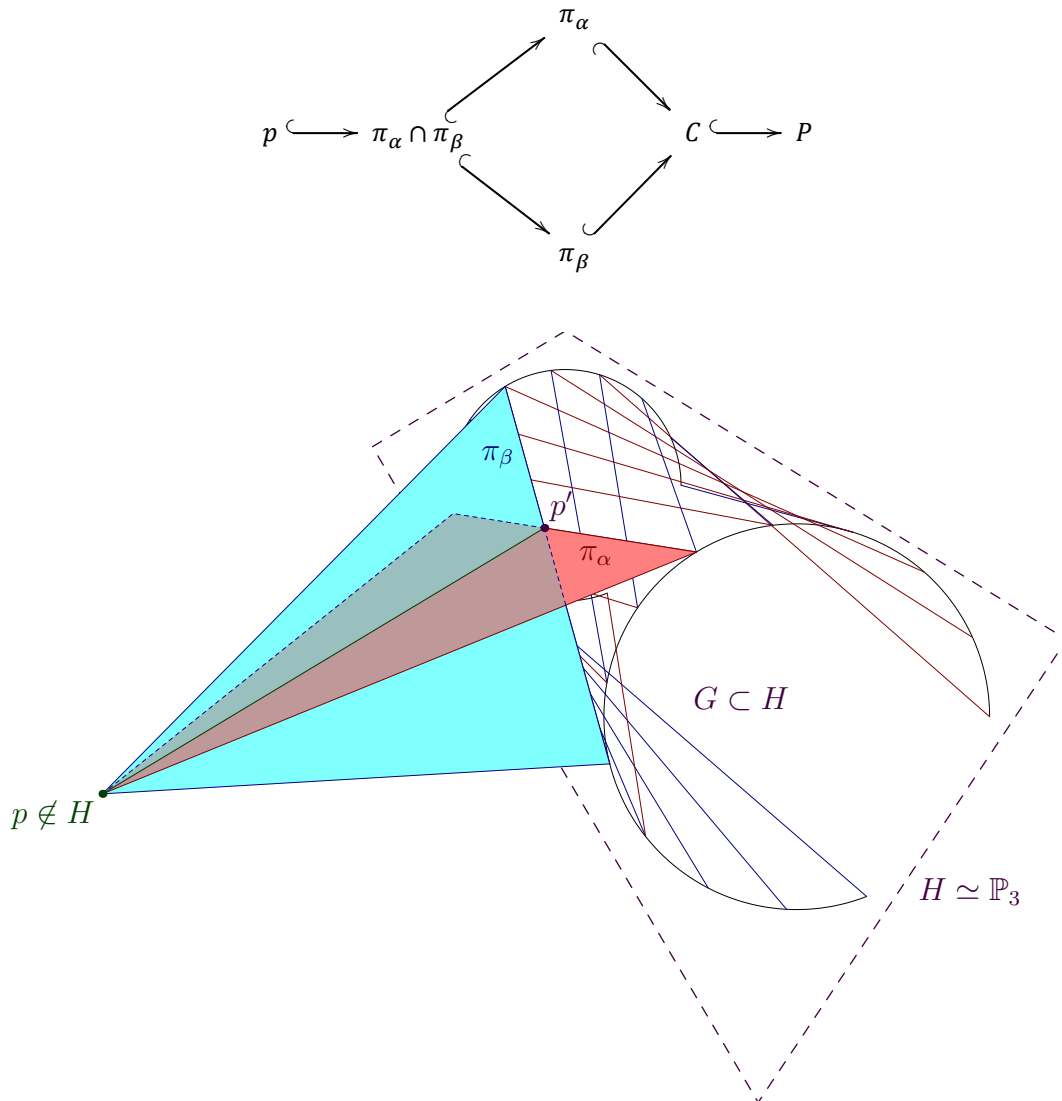


Рис. 3◊1. Конус  $C = P \cap T_p P$ .

Открытые подмножества этих стратов, дополнительные к объединению стратов меньшей размерности, задают дизъюнктное разбиение плюккеровой квадратки  $P$  на открытые клетки, естественно изоморфные аффинным пространствам:

$$\text{Gr}(2, 4) = \mathbb{A}^0 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \left( \begin{array}{c} \mathbb{A}^2 \\ \sqcup \\ \mathbb{A}^2 \end{array} \right) \sqcup \mathbb{A}^3 \sqcup \mathbb{A}^4.$$

В самом деле, сначала мы имеем проективную прямую без точки:  $(\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \setminus p \simeq \mathbb{A}^1$ . Затем возникает пара проективных плоскостей без проективной прямой:

$$\pi_\alpha \setminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \simeq \pi_\beta \setminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \simeq \mathbb{A}^2.$$

Далее идут аффинный конус над дополнением квадратика Сегре до пары прямых, высекаемых из неё касательной плоскостью

$$C \setminus (\pi_\alpha \cup \pi_\beta) \simeq \mathbb{A}^1 \times (G \setminus (G \cap T_p, G)),$$

и открытое плотное подмножество  $P \setminus T_p P \simeq \mathbb{A}^4$  квадратика  $P$ , дополнительное к её пересечению с касательной гиперплоскостью в точке  $p$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.10. Покажите, что проекция гладкой квадратика  $Q \subset \mathbb{P}_n$  из любой точки  $p \in Q$  на произвольную гиперплоскость  $H \not\ni p$  задаёт бирациональную биекцию между дополнением  $Q \setminus T_p Q$  и аффинным пространством  $H \setminus T_p Q \simeq \mathbb{A}^{n-1}$ .

**3.3.3. Исчисление Шуберта на грассманиане  $\text{Gr}(2, 4)$ .** Аффинные пространства из построенного в § 3.3.2 разбиения плюккеровой квадратика, являются плюккеровыми образами шести аффинных клеток Шуберта  $\sigma_\lambda \subset \text{Gr}(2, 4)$ . Их замыкания называются (замкнутыми) *циклами Шуберта* и обозначаются  $\sigma_\lambda$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.11. Убедитесь, что в терминах плюккеровой квадратика  $P \subset \mathbb{P}_5$  циклы Шуберта грассманиана  $\text{Gr}(2, 4)$  суть

$$\begin{aligned} \sigma_{00} &= P \\ \sigma_{22} &= \text{точка } p = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \text{ в } \mathbb{P}_5 \\ \sigma_{10} &= P \cap T_p P \\ \sigma_{11} &= \pi_\alpha(O), \text{ где } O = (0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}_3 \\ \sigma_{20} &= \pi_\beta(\Pi), \text{ где } \Pi = \text{Ann}(x_0) \subset \mathbb{P}_3 \\ \sigma_{21} &= \pi_\alpha(O) \cap \pi_\beta(\Pi). \end{aligned}$$

Над полем  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  циклы Шуберта  $\sigma_\lambda$  образуют свободный базис  $\mathbb{Z}$ -модуля целочисленных гомологий  $H_*(\text{Gr}(m, \mathbb{C}^d), \mathbb{Z})$ , поскольку построенный по разбиению на клетки Шуберта клеточный цепной комплекс для вычисления гомологий не содержит клеток нечётной (вещественной) размерности и, стало быть, имеет нулевые дифференциалы.

УПРАЖНЕНИЕ 3.12\*. Опишите из каких клеток  $\sigma_\mu$  состоит замыкание каждой клетки  $\sigma_\lambda$  и вычислите граничный оператор клеточного цепного комплекса на вещественном грассманиане  $\text{Gr}(m, \mathbb{R}^d)$ .

Топологическое пересечение циклов задаёт на  $\mathbb{Z}$ -модуле  $H_*(\text{Gr}(m, \mathbb{C}^d), \mathbb{Z})$  структуру коммутативного кольца, и гомологические классы пересечений циклов Шуберта могут выражаться в виде целочисленных линейных комбинаций таких же циклов. Рецепты для получения таких выражений известны как *исчисление Шуберта* и тесно связаны с комбинаторикой разбиений<sup>1</sup>. На простейшем грассманиане  $\text{Gr}(2, 4)$  исчисление Шуберта описывается вполне наглядно.

<sup>1</sup>См. книги: У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к...* (МЦНМО, 2006), *Теория пересечений* (Мир, 1989); Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии, I* (Мир, 1982); И. Макдоналд, *Симметрические функции и многочлены Холла* (Мир, 1985)

Очевидно, что циклы, суммарная коразмерность которых меньше четырёх, имеют нулевые пересечения. Пересечения циклов дополнительной размерности уже были вычислены нами в н° 3.3.1:

$$\sigma_{10}\sigma_{21} = \sigma_{20}^2 = \sigma_{11}^2 = \sigma_{22} \quad \text{и} \quad \sigma_{20}\sigma_{11} = 0.$$

По тем же причинам  $\sigma_{10}\sigma_{20} = \sigma_{10}\sigma_{11} = \sigma_{21}$ . Для вычисления  $\sigma_{10}^2$  реализуем цикл  $\sigma_{10}$  в виде

$$\sigma_{10}(\ell) = P \cap T_{u(\ell)}P = \{\ell'' \subset \mathbb{P}_3 \mid \ell \cap \ell'' \neq \emptyset\}.$$

Тогда  $\sigma_{10}^2$  гомологичен пересечению  $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell')$ , которое при общем положении пары прямых  $\ell, \ell'$  представляет собой неособую квадрику Сегре с рис. 3♦1. Если продеформировать прямую  $\ell'$  так, чтобы она стала пересекаться с прямой  $\ell$ , эта квадрика продеформируется в своём классе гомологий в пару пересекающихся плоскостей:  $\alpha$ -связку с центром  $O = \ell \cap \ell'$  и  $\beta$ -связку в плоскости  $\Pi$ , натянутой на  $\ell$  и  $\ell'$ :  $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell') = \pi_\alpha(O) \cup \pi_\beta(\Pi)$ . Таким образом,

$$\sigma_{10}^2 = \sigma_{20} + \sigma_{11}.$$

В качестве приложения мы получаем грубое (топологическое) решение такой задачи:

**Упражнение 3.13.** Сколько прямых пересекает все четыре заданные попарно непересекающихся прямые в  $\mathbb{P}_3$  над полем  $\mathbb{C}$ ? Перечислите все возможные ответы в зависимости от расположения данных четырёх прямых и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям данных прямых.

Если заданные прямые находятся в достаточно общем положении, то ответ даётся коэффициентом при  $\sigma_{22}$  в четырёхкратном самопересечении  $\sigma_{10}^4$ . Согласно предыдущему,

$$\sigma_{10}^4 = (\sigma_{20} + \sigma_{11})^2 = \sigma_{20}^2 + \sigma_{11}^2 = 2\sigma_{22},$$

т. е. в общем случае есть ровно две такие прямые.

**3.4. Многообразия Веронезе и Сегре.** Многообразии Веронезе  $V(n, k)$  является образом проективного пространства  $\mathbb{P}_k = \mathbb{P}(V^*)$  при отображении Веронезе  $n$ -той степени

$$v_n : \mathbb{P}(V^*) \rightarrow \mathbb{P}(S^n V^*), \quad \varphi \mapsto \varphi^n, \quad (3-34)$$

и состоит из рассматриваемых с точностью до пропорциональности однородных многочленов степени  $n$  от  $k + 1$  переменных, пропорциональных чистым  $n$ -м степеням линейных форм. Согласно предл. 3.2 на стр. 44 многообразии Веронезе задаётся системой квадратных уравнений, констатирующей обращение в нуль всех  $2 \times 2$  миноров  $(k + 1) \times \binom{n+k-1}{k}$  матрицы, составленной из коэффициентов линейных форм из форм. (3-24) на стр. 44. Согласно принципу Аронгольда<sup>1</sup> многообразии Веронезе не содержится ни в какой гиперплоскости, хотя его размерность обычно много меньше размерности охватывающего пространства.

Многообразии Сегре  $S(m_1, \dots, m_n)$  представляет собой образ вложения Сегре

$$s : \mathbb{P}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{m_n} \rightarrow \mathbb{P}_m,$$

переводящего произведение проективных пространств  $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$  в пространство  $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n)$ , отправляя набор одномерных подпространств, порождённых ненулевыми векторами  $v_i \in V_i$ , в их тензорное произведение, порождённое вектором

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n.$$

<sup>1</sup>См. предл. 3.1 на стр. 43.

УПРАЖНЕНИЕ 3.14. Проверьте, что это отображение корректно определено<sup>1</sup> и является вложением.

Так как разложимые тензоры линейно порождают всё пространство  $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ , многообразие Сегре не лежит ни в какой гиперплоскости, хотя его размерность обычно тоже сильно меньше размерности объемлющего пространства. По построению, многообразию Сегре замечается  $n$  семействами проективных подпространств размерностей  $m_1, \dots, m_n$ , где  $m_i = d_i - 1$ . Квадрика Сегре из п° 2.3 на стр. 28 является простейшим примером такого многообразия.

ПРИМЕР 3.5 (ОПЕРАТОРЫ РАНГА 1)

Для конечномерных векторных пространств  $U, W$  каноническое отображение

$$U^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(U, W),$$

сопоставляющее разложимому тензору  $\xi \otimes u$  линейное отображение ранга 1

$$\xi \otimes u : U \rightarrow W, \quad u \mapsto \xi(u) \cdot w, \quad (3-35)$$

является изоморфизмом. Таким образом, проективизация множества операторов ранга 1 представляет собою многообразие Сегре  $S(m, n) \subset \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\text{Hom}(U, W))$ . Если зафиксировать в пространствах  $U, W$  какие-нибудь базисы, записать все линейные отображения  $U \rightarrow W$  матрицами в этих базисах и использовать матричные элементы  $a_{ij}$  в качестве однородных координат на  $\mathbb{P}(\text{Hom}(U, W))$ , многообразию Сегре будет задаваться в этих координатах системой квадратичных уравнений

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij}a_{\ell k} - a_{ik}a_{\ell j} = 0,$$

констатирующих зануление всех миноров второго порядка. В этих координатах отображение Сегре переводит пару точек с однородными координатами

$$(x_1 : x_2 : \dots : x_n) \quad \text{и} \quad (y_1 : y_2 : \dots : y_n)$$

в точку, однородными координатами которой являются  $mn$  всевозможных произведений  $x_j y_i$  — матричные элементы произведения  $y^t \cdot x$  столбца  $y$  на строку  $x$ . Два семейства «координатных плоскостей»  $\xi \times \mathbb{P}_{m-1}$  и  $\mathbb{P}_{n-1} \times w$  при этом перейдут в два семейства проективных пространств, замещающих многообразию Сегре. При  $\dim U = \dim W = 2$  мы получаем в точности обсуждавшуюся в п° 2.3 на стр. 28 биекцию между  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$  и детерминантной квадрикой Сегре в  $\mathbb{P}_3$ .

**3.4.1. Многообразие Сегре как линейное сечение грассманиана.** Рассмотрим сумму

$$W = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$$

конечномерных векторных пространств  $V_i$  и для каждого  $k \in \mathbb{N}$  и таких целых неотрицательных  $m_1, \dots, m_n$ , что  $0 \leq m_i \leq \dim V_i$  и  $\sum_v m_v = k$ , обозначим через  $W_{m_1, \dots, m_n} \subset \Lambda^k W$  линейную оболочку всевозможных произведений  $w_1 \wedge \dots \wedge w_k$  содержащих  $m_1$  сомножителей из пространства  $V_1$ ,  $m_2$  сомножителей из пространства  $V_2$ , и т. д.

<sup>1</sup>Т. е. тензор  $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$  отличен от нуля и заменяется на пропорциональный при замене векторов  $v_i$  на пропорциональные.

УПРАЖНЕНИЕ 3.15. Убедитесь, что правило  $\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_n \mapsto \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$  корректно задаёт изоморфизм векторных пространств  $\Lambda^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_n} V_n \simeq W_{m_1, \dots, m_n}$ , и докажите, что

$$\Lambda^k W = \bigoplus_{m_1, \dots, m_n} W_{m_1, \dots, m_n} \simeq \bigoplus_{m_1, \dots, m_n} \Lambda^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_n} V_n.$$

Таким образом тензорное произведение  $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$  канонически отождествляется с векторным подпространством  $W_{1, \dots, 1} \subset \Lambda^n W$ . Разложимые тензоры  $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$  переходят при этом отождествлении в разложимые поливекторы  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ , что позволяет отождествить многообразие Сегре  $S(m_1, \dots, m_n)$  с сечением грассманиана  $\text{Gr}(n, W) \subset \mathbb{P}(\Lambda^n W)$  проективным подпространством  $\mathbb{P}(W_{1, \dots, 1}) \subset \mathbb{P}(\Lambda^n W)$ . Таким образом, многообразие Сегре задаётся в проективном пространстве  $\mathbb{P}(W_{1, \dots, 1})$  системой однородных квадратных уравнений — ограничениями соотношений Плюккера [предл. 3.3](#) на стр. 45 для пространства  $\Lambda^n W$  на подпространство  $W_{1, \dots, 1} \subset \Lambda^n W$ .

**3.4.2. Многообразие Сегре как линейное сечение Веронезе.** Аналогичную предыдущей конструкцию можно осуществить заменяя внешние степени симметрическими. Пусть, как и выше,  $W = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ . Обозначим через  $U_{m_1, \dots, m_n} \subset S^k W$  линейную оболочку всевозможных произведений  $w_1 \dots w_k$  содержащих  $m_1$  сомножителей из пространства  $V_1$ ,  $m_2$  сомножителей из пространства  $V_2$ , и т. д.

УПРАЖНЕНИЕ 3.16. Убедитесь, что правило  $v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto v_1 \dots v_n$  корректно задаёт изоморфизм векторных пространств  $S^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes S^{m_n} V_n \simeq U_{m_1, \dots, m_n}$ , и докажите, что

$$S^k W = \bigoplus_{m_1, \dots, m_n} U_{m_1, \dots, m_n} \simeq \bigoplus_{m_1, \dots, m_n} S^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes S^{m_n} V_n.$$

Тем самым, тензорное произведение  $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$  канонически отождествляется с векторным подпространством  $U_{1, \dots, 1} \subset S^n W$ . Разложимые тензоры  $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$  переходят при этом отождествлении в разложимые на линейные множители многочлены  $v_1 \dots v_n$ , что позволяет отождествить многообразие Сегре  $S(m_1, \dots, m_n)$  с сечением многообразия  $V(n, W) \subset \mathbb{P}(S^n W)$  подпространством  $\mathbb{P}(U_{1, \dots, 1}) \subset \mathbb{P}(S^n W)$ . В частности, многообразие Сегре задаётся в проективном пространстве  $\mathbb{P}(U_{1, \dots, 1})$  системой однородных квадратных уравнений — ограничений описанных в [н° 3.1.5](#) на стр. 44 условий на ранг матрицы линейных форм (3-24) со стр. 44.

#### §4. Порция коммутативной алгебры

Всюду в этом параграфе слово «кольцо» означает по умолчанию *коммутативное кольцо с единицей*, а гомоморфизмы колец всегда предполагаются отображающими единицу в единицу.

**4.1. Нётеровы кольца.** Любое множество элементов  $M \subset A$  коммутативного кольца  $A$  порождает в  $A$  идеал  $(M)$ , состоящий из всевозможных конечных сумм

$$g_1 f_1 + \dots + g_m f_m,$$

в которых  $g_\nu \in A$ , а  $f_\nu \in M$ . Как  $A$ -модуль, идеал  $(M)$  представляет собою  $A$ -линейную оболочку элементов множества  $M$ . Элементы  $f_1, \dots, f_m$  из какого-либо идеала  $I \subset A$  называются *образующими* этого идеала, если  $I = (f_1, \dots, f_m)$ , т. е.  $f_1, \dots, f_m$  линейно порождают  $I$  как  $A$ -модуль. Коммутативное кольцо  $A$  называется *нётеровым*, если каждый его идеал допускает конечное множество образующих. Условие нётеровости имеет несколько эквивалентных переформулировок.

ЛЕММА 4.1

Следующие свойства коммутативного кольца  $A$  попарно эквивалентны:

- (1) любое множество элементов  $M \subset A$  содержит некоторое конечное подмножество, порождающее тот же идеал, что и  $M$
- (2) любой идеал в  $A$  допускает конечное множество образующих
- (3) для любой бесконечной цепочки вложенных идеалов  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$  существует  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $I_\nu = I_n$  для всех  $\nu \geq n$ .

Доказательство. Ясно, что (1)  $\Rightarrow$  (2). Для доказательства импликации (2)  $\Rightarrow$  (3) заметим, что объединение  $I = \bigcup_\nu I_\nu$  всех идеалов возрастающей цепочки также является идеалом, и стало быть, линейно порождается над  $A$  конечным числом элементов  $f_1, \dots, f_m \in I$ . Все эти элементы содержатся в некотором идеале  $I_n$  из цепочки. Следовательно,  $I_\nu = I_n = I$  для всех  $\nu \geq n$ . Чтобы вывести (1) из (3), рассмотрим цепочку идеалов  $I_n = (f_1, \dots, f_n)$ , которая строится по индукции следующим образом: в качестве  $f_1$  возьмём произвольный элемент множества  $M$ . При  $i > 1$  и  $(M) \neq (f_1, \dots, f_{i-1})$  в качестве  $f_i$  возьмём любой элемент из  $M$ , не лежащий в  $(f_1, \dots, f_{i-1})$ . Тогда идеалы  $I_{i-1} \subsetneq I_i$  будут строго возрастать, что в силу (3) не может продолжаться бесконечно, т. е. на каком-то шагу мы придём к равенству  $(M) = (f_1, \dots, f_i)$ .  $\square$

ТЕОРЕМА 4.1 (ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА О БАЗИСЕ)

Если  $A$  нётерово, то кольцо многочленов  $A[x]$  также нётерово.

Доказательство. Рассмотрим произвольный идеал  $I \subset A[x]$  и обозначим через  $L_d \subset A$  множество старших коэффициентов всех многочленов степени  $\leq d$  из  $I$ , а через  $L_\infty = \bigcup_d L_d$  — множество старших коэффициентов вообще всех многочленов из  $I$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.1. Убедитесь, что все  $L_d$  (включая  $L_\infty$ ) являются идеалами в  $A$ .

Поскольку кольцо  $A$  нётерово, все идеалы  $L_d$  конечно порождены. Для каждого  $d$  (включая  $d = \infty$ ) обозначим через  $f_1^{(d)}, \dots, f_{m_d}^{(d)} \in A[x]$  многочлены, старшие коэффициенты которых порождают соответствующий идеал  $L_d$  в  $A$ . Пусть наибольшая из степеней многочленов  $f_i^{(\infty)}$ , старшие коэффициенты которых порождают идеал  $L_\infty \subset A$ , равна  $D \in \mathbb{N}$ . Покажем, что идеал  $I$  порождается многочленами  $f_i^\infty$  и многочленами  $f_j^{(d)}$  с  $0 \leq d < D$ .

Произвольный многочлен  $g \in I$  сравним по модулю многочленов  $f_1^{(\infty)}, \dots, f_{m_\infty}^{(\infty)}$  с многочленом, степень которого строго меньше  $D$ . В самом деле, поскольку старший коэффициент многочлена  $g$  лежит в идеале  $L_\infty$ , он имеет вид  $\sum \lambda_i a_i$ , где  $\lambda_i \in A$ , а  $a_i$  — старшие коэффициенты многочленов  $f_i^{(\infty)}$ . При  $\deg g \geq D$  все разности  $m_i = \deg g - \deg f_i^{(\infty)}$  неотрицательны, и мы можем образовать многочлен  $h = g - \sum \lambda_i f_i(x) x^{m_i}$ , сравнимый с  $g$  по модулю  $I$  и имеющий строго меньшую, чем  $g$  степень. Заменяем  $g$  на  $h$  и повторим эту процедуру, пока не получим многочлен  $h \equiv g \pmod{(f_1^{(\infty)}, \dots, f_{m_\infty}^{(\infty)})}$  степени  $\deg h < D$ . Теперь старший коэффициент многочлена  $h$  находится в идеале  $L_d$  с  $d < D$ . Тем же способом вычитая из него подходящие комбинации многочленов  $f_j^{(d)}$  с  $0 \leq d < D$ , мы сможем сокращать его старший моном, строго уменьшая степень, до тех пор, пока не получим нуль.  $\square$

Следствие 4.1

Если кольцо  $A$  нётерово, то кольцо многочленов  $A[x_1, \dots, x_n]$  тоже нётерово.

УПРАЖНЕНИЕ 4.2. Покажите, что все факторкольца нётерова кольца нётеровы.

УПРАЖНЕНИЕ 4.3. Заменяя в доказательстве теор. 4.1 старшие коэффициенты младшими, покажите, что кольцо формальных степенных рядов  $A[[t]]$  над нётеровым кольцом  $A$  тоже нётерово.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Подкольцо нётерова кольца не обязательно является нётеровым. Например, кольцо  $\mathbb{C}[[t]]$  нётерово по упр. 4.3, однако, его подкольцо, образованное рядами, сходящимися всюду в  $\mathbb{C}$ , нётеровым не является.

УПРАЖНЕНИЕ 4.4. Покажите, что идеалы  $I_k$ , состоящие из аналитических функций  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , обращающихся в нуль на множествах  $\mathbb{Z} \setminus \{1, \dots, k\}$ , образуют бесконечную цепочку строго увеличивающихся идеалов.

**4.2. Целые элементы.** Пусть имеется расширение колец  $A \subset B$ . Элемент  $b \in B$  называется *целым* над  $A$ , если он удовлетворяет условиям лем. 4.2.

ЛЕММА 4.2

Следующие три свойства элемента  $b \in B$  попарно эквивалентны:

- (1)  $b^m = a_1 b^{m-1} + \dots + a_{m-1} b + a_m$  для некоторых  $m \in \mathbb{N}$  и  $a_1, \dots, a_m \in A$
- (2)  $A$ -линейная оболочка всех целых неотрицательных степеней  $b^m$  линейно порождается над  $A$  конечным числом элементов
- (3) существует такой конечно порождённый  $A$ -подмодуль  $M \subset B$ , что  $bM \subset M$  и для каждого  $b' \in B$  из  $b'M = 0$  вытекает, что  $b' = 0$ .

Доказательство. Импликации (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3) очевидны. Покажем, что (3)  $\Rightarrow$  (1). Пусть элементы  $e_1, \dots, e_m$  линейно порождают  $M$  над  $A$ , и  $A$ -линейный оператор  $M \rightarrow M$ ,  $t \mapsto bt$ , умножения на  $b$  имеет в этих образующих матрицу  $Y \in \text{Mat}_{m \times m}(A)$ , т. е.

$$(be_1, be_2, \dots, be_m) = (e_1, \dots, e_m) \cdot Y. \quad (4-1)$$

Матричное тождество  $\det X \cdot E = X \cdot X^V$ , где  $X \in \text{Mat}_m(B)$  — произвольная квадратная матрица,  $X^V$  — присоединённая к ней матрица<sup>2</sup>, а  $E$  — единичная матрица того же размера, показывает,

<sup>1</sup>Последнее условие в (3) иногда называют *B-точностью* подмодуля  $M$ .

<sup>2</sup>Т. е. транспонированная к матрице алгебраических дополнений к элементам матрицы  $X$ .

что образ оператора умножения на  $\det X$  в  $B^m$  содержится в линейной оболочке столбцов матрицы  $X$ . Поэтому образ оператора умножения всех элементов модуля  $M$  на число  $\det(bE - Y) \in B$  лежит в линейной оболочке векторов  $(e_1, \dots, e_m) \cdot (bE - Y)$ , а она нулевая в силу (4-1). Тем самым,  $\det(bE - Y) \cdot M = 0$ , а значит,  $\det(bE - Y) = 0$  в силу  $B$ -точности модуля  $M$ . Так как элементы матрицы  $Y$  лежат в  $A$ , равенство  $\det(bE - Y) = 0$  имеет вид, требуемый в условии (1).  $\square$

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1

Множество всех элементов  $b \in B$ , целых над подкольцом  $A \subset B$ , называется *целым замыканием*  $A$  в  $B$  и обозначается  $\bar{A}_B$ . Если  $\bar{A}_B = A$ , кольцо  $A$  называется *целозамкнутым* в  $B$ . Если  $\bar{A}_B = B$ , кольцо  $B$  называется *целым расширением* кольца  $A$  или *целой  $A$ -алгеброй*.

#### ПРИМЕР 4.1 ( $\mathbb{Z}$ ЦЕЛОЗАМКНУТО В $\mathbb{Q}$ )

Если дробь  $p/q$  с взаимно простыми  $p, q \in \mathbb{Z}$  удовлетворяет приведённому уравнению

$$\frac{p^m}{q^m} = a_1 \frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + \dots + a_{m-1} \frac{p}{q} + a_m, \quad \text{где } a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z},$$

то  $p^m = a_1 q p^{m-1} + \dots + a_{m-1} q^{m-1} p + a_m q^m$  делится на  $q$ , что возможно только при  $q = \pm 1$ .

#### ПРИМЕР 4.2 (ИНВАРИАНТЫ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ)

Пусть конечная группа  $G$  действует на кольце  $B$  кольцевыми автоморфизмами

$$g : B \xrightarrow{\simeq} B, \quad g \in G.$$

Подкольцо  $B^G \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in B \mid ga = a \ \forall g \in G\}$  называется *кольцом инвариантов* этого действия. Пусть  $G$ -орбита элемента  $b \in B$  состоит из элементов  $b_1, \dots, b_n$ , где  $b_1 = b$ . Тогда  $b$  является корнем приведённого многочлена  $B(t) = \prod (t - b_i) \in B^G[t]$ . Поэтому  $B$  цело над  $B^G$ .

#### ПРИМЕР 4.3 (ЦЕЛЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА)

Пусть  $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$  — поле, конечномерное<sup>1</sup> как векторное пространство над  $\mathbb{Q}$ . Элементы  $z \in \mathbb{K}$  называются *алгебраическими числами*. Условие (3) из лем. 4.2 на стр. 58 утверждает, что алгебраическое число  $\zeta \in K$  цело над  $\mathbb{Z}$ , если и только если существует такое инвариантное относительно умножения на  $\zeta$  векторное подпространство  $W \subset \mathbb{K}$  над полем  $\mathbb{Q}$ , что оператор умножения на  $\zeta: W \rightarrow W, x \mapsto \zeta x$ , записывается в некотором базисе целочисленной матрицей. Именно таким образом *целые алгебраические числа* и были впервые определены в XIX веке Дедекиндом. Отметим, что каждое алгебраическое число  $\xi \in \mathbb{K}$  становится целым после умножения на подходящее число из  $\mathbb{Z}$ . В частности, у  $\mathbb{K}$  существует базис над  $\mathbb{Q}$ , состоящий из целых алгебраических чисел.

УПРАЖНЕНИЕ 4.5\*. Покажите, что целые алгебраические числа в расширении  $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$  составляют свободный  $\mathbb{Z}$ -модуль ранга  $\deg \mathbb{K}/\mathbb{Q}$ .

#### ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1

Целое замыкание  $\bar{A}_B \subset B$  любого подкольца  $A \subset B$  является подкольцом в  $B$ . Для любого кольца  $C \supset B$  всякий элемент  $c \in C$ , целый над  $\bar{A}_B$ , цел и над  $A$ .

<sup>1</sup>Размерность  $\mathbb{K}$  как векторного пространства над  $\mathbb{Q}$  обычно обозначается  $\deg \mathbb{K}/\mathbb{Q}$  и называется *степенью расширения*  $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ .

Доказательство. Если элементы  $p, q \in B$  таковы, что

$$p^m = x_{m-1} p^{m-1} + \dots + x_1 p + x_0, \quad q^n = y_{n-1} q^{n-1} + \dots + y_1 q + y_0$$

для некоторых  $x_\nu, y_\mu \in A$ , то  $A$ -модуль, порождённый произведениями  $p^i q^j$  с  $0 \leq i < m, 0 \leq j < n$ , является  $B$ -точным (ибо содержит 1) и переходит в себя при умножении и на  $p$ , и на  $q$ , а значит, и при умножении на  $p + q$  и  $pq$ . Аналогично, если

$$c^r = z_{r-1} c^{r-1} + \dots + z_1 c + z_0, \quad z_k^{m_k} = a_{k,m_k-1} z_k^{m_k-1} + \dots + a_{k,1} z_k + a_{k,0}$$

где  $0 \leq k \leq (r-1)$  и все  $a_{k,\ell} \in A$ , то умножение на  $c$  сохраняет  $B$ -точный  $A$ -подмодуль, порождённый произведениями  $c^i z_1^{j_1} z_2^{j_2} \dots z_r^{j_r}$  с  $0 \leq i < r$  и  $0 \leq j_k < m_k$ .  $\square$

Предложение 4.2 (лемма Гаусса–Кронекера–Дедекинда)

Пусть  $A \subset B$  — произвольное расширение коммутативных колец, и  $f, g \in B[x]$  — приведённые<sup>1</sup> многочлены положительной степени. Тогда все коэффициенты произведения  $h(x) = f(x)g(x)$  целы над  $A$ , если и только если все коэффициенты как  $f$ , так и  $g$  целы над  $A$ .

Доказательство. Рассмотрим любое кольцо  $C \supset B$ , над которым  $f$  и  $g$  полностью разлагаются на линейные множители<sup>2</sup>, т. е. в кольце  $C[x]$  выполняются равенства

$$f(x) = \prod_{\nu} (x - \alpha_{\nu}), \quad g(x) = \prod_{\mu} (x - \beta_{\mu}), \quad h(x) = \prod_{\mu, \nu} (x - \alpha_{\nu})(x - \beta_{\mu}).$$

Целость над  $A$  всех коэффициентов многочлена  $h$  равносильна тому, что все корни  $\alpha_{\nu}, \beta_{\mu} \in C$  многочлена  $h$  целы над целым замыканием  $A$  в  $C$ , а значит, и над самим  $A$ . Это, в свою очередь, эквивалентно одновременной целости над  $A$  всех коэффициентов как  $f$ , так и  $g$ .  $\square$

Предложение 4.3

Пусть кольцо  $B$  цело над подкольцом  $A \subset B$ . Если  $B$  — поле, то  $A$  также является полем. Наоборот, если  $A$  — поле, и в  $B$  нет делителей нуля, то  $B$  — поле.

Доказательство. Если  $B$  — поле, целое над  $A$ , то обратный элемент  $a^{-1} \in B$  к произвольному ненулевому  $a \in A$  удовлетворяет уравнению  $a^{-m} = \alpha_1 a^{1-m} + \dots + \alpha_{m-1} a^{-1} + \alpha_0$ , где все  $\alpha_\nu \in A$ . Умножая обе части на  $a^{m-1}$ , получаем  $a^{-1} = \alpha_1 + \dots + \alpha_{m-1} a^{m-2} + \alpha_0 a^{m-1} \in A$ .

Обратно, если  $A$  — поле, и  $B$  — целая  $A$ -алгебра, то все неотрицательные целые степени  $b^i$  любого  $b \in B$  порождают конечномерное векторное пространство  $V$  над  $A$ . Если  $b \neq 0$ , и в  $B$  нет делителей нуля, то линейный оператор умножения на  $b: V \rightarrow V, x \mapsto bx$ , имеет нулевое ядро и, тем самым, биективен. Прообраз  $1 \in V$  относительно этого оператора и есть  $b^{-1}$ .  $\square$

Следствие 4.2

Если поле  $\mathbb{F}$  является конечномерным векторным пространством над своим подполем  $\mathbb{k} \subset \mathbb{F}$ , то все элементы  $\mathbb{F}$  алгебраичны над  $\mathbb{k}$ , и  $\mathbb{k}$ -подалгебра в  $\mathbb{F}$ , порождённая любым набором элементов  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$ , является полем.  $\square$

<sup>1</sup>Т. е. со старшим коэффициентом единица.

<sup>2</sup>Такое кольцо  $C$  можно построить индукцией по  $\deg h$ . Если  $\deg h > 0$ , то  $B$  вкладывается в фактор кольцо  $F = B[x]/(h)$  как подкольцо классов констант. Поскольку класс  $\vartheta = x \pmod{h} \in F$  является корнем  $h$ , то  $h(x) = (x - \vartheta) \cdot h_1(x)$  в  $F[x]$ . По индукции  $h_1 = \prod (x - c_\nu)$  над некоторым кольцом  $C \supset F \supset B$ .

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2 (НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЬЦА)

Коммутативное кольцо  $A$  без делителей нуля называется *нормальным*, если оно целозамкнуто в своём поле частных  $Q_A$ . Отметим, что любое поле нормально.

## ПРИМЕР 4.4 (НОРМАЛЬНОСТЬ ФАКТОРИАЛЬНЫХ КОЛЕЦ)

Напомним, что кольцо  $A$  называется *факториальным*, если в нём нет делителей нуля, и каждый необратимый элемент  $a \in A$  является произведением конечного числа неприводимых, причём для любых двух таких разложений  $a = p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_m$  выполняются равенства  $m = n$  и (возможно, после надлежащей перенумерации сомножителей)  $p_i = s_i q_i$  для некоторых обратимых  $s_i \in A$ . Например, факториальными являются<sup>1</sup> все кольца главных идеалов и кольца многочленов  $K[x_1, \dots, x_n]$  над факториальными кольцами  $K$ . Каждое факториальное кольцо  $A$  нормально. Это устанавливается дословно тем же рассуждением, что и в [прим. 4.1](#) на стр. 59.

УПРАЖНЕНИЕ 4.6. Убедитесь, что приведённый многочлен  $t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_m$  с коэффициентами в факториальном кольце  $A$  не может аннулировать дробь  $p/q \in Q_A$  с необратимым знаменателем  $q$  и  $\text{нод}(p, q) = 1$ .

## ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4 (ЛЕММА ГАУССА)

Пусть  $A$  — нормальное кольцо с полем частных  $Q_A$ . Если многочлен  $f \in A[x]$  раскладывается в  $Q_A[x]$  в произведение приведённых множителей, то эти множители лежат в  $A[x]$ .  $\square$

Доказательство. Это вытекает прямо из определений и [предл. 4.2](#).  $\square$

## СЛЕДСТВИЕ 4.3

Пусть  $A$  — нормальное кольцо с полем частных  $Q_A$ , и  $B$  — произвольная  $Q_A$ -алгебра. Если элемент  $b \in B$  цел над  $A$ , то его минимальный многочлен<sup>2</sup>  $\mu_b$  над полем  $Q_A$  лежит в  $A[x]$ .

Доказательство. Поскольку элемент  $b$  цел над  $A$ , он является корнем приведённого многочлена  $f \in A[x]$ . Тогда  $f = \mu_b \cdot q$  в кольце  $Q_A[x]$ . По [предл. 4.4](#) все коэффициенты  $\mu_b$  лежат в  $A$ .  $\square$

**4.3. Конечно порождённые алгебры над полем.** Если кольцо  $A = \mathbb{k}$  является полем, то содержащие его кольца  $B \supset \mathbb{k}$  называются *коммутативными  $\mathbb{k}$ -алгебрами*. Факторкольца алгебры многочленов  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  называются *конечно порождёнными  $\mathbb{k}$ -алгебрами*. Каждая такая алгебра  $B$  является образом эпиморфизма  $\pi : \mathbb{k}[x_1, \dots, x_m] \twoheadrightarrow B$ , который называется *представлением* алгебры  $B$  образующими и соотношениями: элементы  $b_i = \pi(x_i) \in B$  называются *образующими* алгебры  $B$ , а ядро  $\ker \pi \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_m]$  называется *идеалом соотношений* между ними. Отметим, что по [сл. 4.1](#) и [упр. 4.2](#) все конечно порождённые  $\mathbb{k}$ -алгебры нётеровы, и идеал соотношений между образующими конечно порождённой  $\mathbb{k}$ -алгебры всегда конечно порождён.

**4.3.1. Алгебраичность элементов.** Каждый элемент  $b$  любой  $\mathbb{k}$ -алгебры  $B$  задаёт *гомоморфизм вычисления*

$$\text{ev}_b : \mathbb{k}[x] \rightarrow B, \quad f \mapsto f(b), \quad (4-2)$$

образ которого обозначается через  $\mathbb{k}[b] \subset B$  и представляет собой наименьшую  $\mathbb{k}$ -подалгебру с единицей в  $B$ , содержащую  $b$ , т. е. всё, что можно получить из  $b$  и элементов поля  $\mathbb{k}$  конечным числом сложений и умножений.

<sup>1</sup>См. лекцию .

<sup>2</sup>Т. е. такой приведённый многочлен  $\mu_b \in Q_A[x]$  наименьшей положительной степени, что  $\mu_b(b) = 0$ .

Элемент  $b$  называется *трансцендентным* над  $\mathbb{k}$ , если гомоморфизм вычисления (4-2) инъективен. В этом случае алгебра  $\mathbb{k}[b] \simeq \mathbb{k}[x]$  не является полем и бесконечномерна как векторное пространство над  $\mathbb{k}$ .

Элемент  $b$  называется *алгебраическим* над  $\mathbb{k}$ , если гомоморфизм вычисления (4-2) имеет ненулевое ядро. В этом случае  $\ker(\text{ev}_b) = (\mu_b) \subset \mathbb{k}[x]$  является главным идеалом<sup>1</sup>, порождённым аннулирующим  $b$  приведённым многочленом  $\mu_b$  наименьшей положительной степени. Многочлен  $\mu_b \in \mathbb{k}[x]$  однозначно определяется этим свойством и называется *минимальным многочленом* элемента  $b$  над  $\mathbb{k}$ . Отметим, что алгебраичность элемента  $b \in B$  означает, что он цел над подполем  $\mathbb{k} \subset B$ . В этом случае подалгебра  $\mathbb{k}[b] \simeq \mathbb{k}[x]/(\mu_b)$  как векторное пространство над  $\mathbb{k}$  имеет конечную размерность  $\dim_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[b] = \deg \mu_b$ , и по [предл. 4.3](#) является полем, если и только если в ней нет делителей нуля.

#### ТЕОРЕМА 4.2

Конечно порождённая  $\mathbb{k}$ -алгебра  $B$  может быть полем лишь при условии, что все её элементы алгебраичны над  $\mathbb{k}$ , и в этом случае она конечномерна как векторное пространство над  $\mathbb{k}$ .

*Доказательство.* Пусть алгебра  $B$  порождается над  $\mathbb{k}$  элементами  $b_1, \dots, b_m$  и является полем. Доказывать её алгебраичность над  $\mathbb{k}$  мы будем индукцией по  $m$ . Случай  $m = 1$ ,  $B = \mathbb{k}[b_1]$  уже был разобран выше. Пусть  $m > 1$ . Если элемент  $b_m$  алгебраичен над  $\mathbb{k}$ , то  $\mathbb{k}[b_m]$  — поле, и по предположению индукции поле  $B$  алгебраично над  $\mathbb{k}[b_m]$  и конечномерно как векторное пространство над  $\mathbb{k}[b_m]$ . По [предл. 4.1](#) поле  $B$  тогда алгебраично и над  $\mathbb{k}$ . Его конечномерность как векторного пространства над  $\mathbb{k}$  вытекает из следующего упражнения.

*УПРАЖНЕНИЕ 4.7 (мультипликативность степени конечного расширения).* Пусть в расширении полей  $\mathbb{F} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{L}$  элементы  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  составляют базис  $\mathbb{K}$  как векторного пространства над  $\mathbb{F}$ , а элементы  $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{L}$  — базис  $\mathbb{L}$  как векторного пространства над  $\mathbb{K}$ . Покажите, что  $mn$  произведений  $x_i y_j$  образуют базис  $\mathbb{L}$  как векторного пространства над  $\mathbb{F}$ .

Для завершения доказательства остаётся убедиться, что элемент  $b_m$  не может быть трансцендентен над  $\mathbb{k}$ . Допустим противное. Тогда по универсальному свойству поля частных инъективный гомоморфизм вычисления  $\text{ev}_{b_m} : \mathbb{k}[x] \rightarrow B, f \mapsto f(b_m)$ , продолжается до изоморфизма поля рациональных функций  $\mathbb{k}(x)$  с наименьшим содержащим элемент  $b_m$  подполем  $\mathbb{k}(b_m) \subset B$ . По предположению индукции поле  $B$  алгебраично над  $\mathbb{k}(b_m)$ . Поэтому каждая из образующих  $b_1, \dots, b_{m-1}$  поля  $B$  как алгебры над  $\mathbb{k}$  удовлетворяет некоторому полиномиальному уравнению с коэффициентами из  $\mathbb{k}(b_m)$ . Умножая эти уравнения на подходящие многочлены от  $b_m$ , сделаем так, чтобы все их коэффициенты лежали в  $\mathbb{k}[b_m]$ , а все старшие коэффициенты стали равны друг другу. Обозначая этот общий для всех уравнений старший коэффициент через  $p(b_m) \in \mathbb{k}[b_m]$ , заключаем, что поле  $B$  цело над подалгеброй  $F = \mathbb{k}[b_m, 1/p(b_m)] \subset B$ , порождённой над  $\mathbb{k}$  элементами  $b_m$  и  $1/p(b_m)$ . По [предл. 4.3](#) подалгебра  $F$  является полем. В частности, элемент  $1 + p(b_m)$  обратим в  $F$ , т. е. существует такой многочлен  $g \in \mathbb{k}[x_1, x_2]$ , что

$$g(b_m, 1/p(b_m)) \cdot (1 + p(b_m)) = 1. \quad (4-3)$$

Записывая рациональную функцию  $g(x, 1/p(x))$  в виде  $h(x)/p^k(x)$ , где  $h \in \mathbb{k}[x]$  не делится на  $p$ , и умножая обе части (4-3) на  $p^k(b_m)$ , получаем на  $b_m$  полиномиальное уравнение

$$h(b_m) \cdot (p(b_m) + 1) = p^{k+1}(b_m).$$

<sup>1</sup>Поскольку кольцо  $\mathbb{k}[x]$  является областью главных идеалов.

Оно нетривиально, так как  $h(x)(1 + p(x))$  не делится в  $\mathbb{k}[x]$  на  $p(x)$ , и противоречит трансцендентности элемента  $b_m$ .  $\square$

**4.3.2. Базисы трансцендентности.** Пусть  $\mathbb{k}$ -алгебра  $A$  не имеет делителей нуля. Обозначим через  $Q_A$  её поле частных. С каждым набором элементов  $a_1, \dots, a_m \in A$  связан гомоморфизм вычисления

$$\text{ev}_{a_1, \dots, a_m} : \mathbb{k}[x_1, \dots, x_m] \rightarrow A, \quad f \mapsto f(a_1, \dots, a_m), \quad (4-4)$$

образ которого обозначается через  $\mathbb{k}[a_1, \dots, a_m] \subset A$  и состоит из всех элементов, что можно получить из  $a_1, \dots, a_m$  и элементов поля  $\mathbb{k}$  при помощи конечного числа сложений и умножений. Это наименьшая по включению  $\mathbb{k}$ -подалгебра в  $A$ , содержащая поле  $\mathbb{k}$  и все элементы  $a_i$ . Через  $\mathbb{k}(a_1, \dots, a_m) \subset Q_A$  мы обозначим наименьшее подполе, содержащее поле  $\mathbb{k}$  и заданные элементы  $a_1, \dots, a_m \in A$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.8. Покажите, что  $\mathbb{k}(a_1, \dots, a_m) \simeq Q_{\mathbb{k}[a_1, \dots, a_m]}$ .

Элементы  $a_1, \dots, a_m \in A$  называются *алгебраически независимыми* над  $\mathbb{k}$ , если между ними нет никаких полиномиальных соотношений вида  $f(a_1, \dots, a_m) = 0$ , где  $f \in A[x_1, \dots, x_m]$ , т. е. гомоморфизм вычисления (4-4) инъективен. В этом случае вложение (4-4) продолжается до изоморфизма полей  $\mathbb{k}(x_1, \dots, x_m) \simeq \mathbb{k}(a_1, \dots, a_m) \subset Q_A$ , переводящего рациональную функцию  $f(x_1, \dots, x_m)$  в её значение  $f(a_1, \dots, a_m)$  на элементах  $a_i$ .

Элементы  $a_1, \dots, a_m \in A$  называются *алгебраически порождающими*  $Q_A$ , если поле  $Q_A$  алгебраично<sup>1</sup> над подполем  $\mathbb{k}(a_1, \dots, a_m) \subset Q_A$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.9. Убедитесь, что если все элементы  $a \in A \subset Q_A$  алгебраичны над полем  $\mathbb{k}(a_1, \dots, a_m) \subset Q_A$ , то элементы  $a_1, \dots, a_m \in A$  алгебраически порождают  $Q_A$ .

Алгебраически независимый набор элементов  $a_1, \dots, a_m \in A$ , алгебраически порождающий  $Q_A$ , называется *базисом трансцендентности* алгебры  $A$  над  $\mathbb{k}$ . Любое собственное подмножество базиса трансцендентности алгебраически независимо, однако, не является базисом трансцендентности. Поэтому базис трансцендентности можно иначе определить либо как минимальный по включению набор  $a_1, \dots, a_m \in A$ , алгебраически порождающий  $Q_A$ , либо как максимальный по включению алгебраически независимый набор  $a_1, \dots, a_m \in A$ .

ЛЕММА 4.3 (ЛЕММА О ЗАМЕНЕ)

Если  $a_1, \dots, a_m \in A$  алгебраически порождают  $Q_A$ , а  $u_1, \dots, u_k \in A$  алгебраически независимы, то  $t \geq k$  и  $a_i$  можно перенумеровать так, что набор элементов

$$u_1, \dots, u_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_m$$

(полученный заменой первых  $k$  элементов  $a_i$  на элементы  $u_i$ ) также будет алгебраически порождать  $Q_A$ .

Доказательство. Так как элемент  $u_1$  алгебраичен над  $\mathbb{k}(a_1, \dots, a_m)$ , имеется полиномиальное соотношение  $f(u_1, a_1, \dots, a_m) = 0$ , в которое входит  $u_1$ . Поскольку  $u_1$  трансцендентен над  $\mathbb{k}$ , в это соотношение входит и какой-нибудь из элементов  $a_i$ . Перенумеруем их так, чтобы это был  $a_1$ . Тогда  $a_1$  алгебраичен над  $\mathbb{k}(u_1, a_2, \dots, a_m)$ , и  $u_1, a_2, \dots, a_m$  алгебраически порождают  $Q_A$ . Далее действуем по индукции. Пусть для очередного  $i$  в пределах  $1 \leq i < k$  элементы  $u_1, \dots, u_i, a_{i+1}, \dots, a_m$  алгебраически порождают  $Q_A$ . Так как  $u_{i+1}$  алгебраичен над

$$\mathbb{k}(u_1, \dots, u_i, a_{i+1}, \dots, a_m),$$

<sup>1</sup>Или, что то же самое, цело.

имеется содержащее  $u_{i+1}$  полиномиальное соотношение  $f(u_1, \dots, u_{i+1}, a_{i+1}, \dots, a_m) = 0$ . Поскольку  $u_1, \dots, u_k$  алгебраически независимы, в этом соотношении присутствует один из элементов  $a_j$ . Тем самым,  $m > i$ , и мы можем занумеровать оставшиеся  $a_j$  так, чтобы  $a_{i+1}$  был алгебраичен над  $\mathbb{k}(u_1, \dots, u_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_m)$ . Следовательно  $u_1, \dots, u_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_m$  алгебраически порождают  $Q_A$ , что воспроизводит индуктивное предположение.  $\square$

#### Следствие 4.4

В конечно порождённой  $\mathbb{k}$ -алгебре  $A$  без делителей нуля любой алгебраически порождающий  $Q_A$  набор элементов содержит в себе некоторый базис трансцендентности для  $A$ , а любой набор алгебраически независимых элементов можно дополнить до базиса трансцендентности, причём все базисы трансцендентности состоят из одинакового числа элементов.  $\square$

#### Определение 4.3 (степень трансцендентности)

Число элементов в базисе трансцендентности конечно порождённой  $\mathbb{k}$ -алгебры  $A$  называется *степенью трансцендентности* алгебры  $A$  над  $\mathbb{k}$  и обозначается  $\text{tr deg}_{\mathbb{k}} A$

Упражнение 4.10. Покажите, что следующие условия на конечно порождённую  $\mathbb{k}$ -алгебру  $A$  без делителей нуля эквивалентны друг другу: а)  $\text{tr deg } A = 0$  б)  $A = Q_A$  в)  $A$  — поле г)  $\dim_{\mathbb{k}} A < \infty$ .

#### 4.4. Нули многочленов. Любая система полиномиальных уравнений

$$f_v(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad f_v \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n], \quad (4-5)$$

эквивалентна системе, левые части которой образуют в  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  идеал  $J = (f_v)$ , порождённый многочленами  $f_v$ . Эта большая система получается добавлением к уравнениям (4-5) всех уравнений, которые можно получить умножая уравнения (4-5) на произвольные полиномы и складывая их друг с другом. В силу нётеровости кольца многочленов такая большая система, в свою очередь, эквивалентна конечной системе уравнений, левые части которых порождают идеал  $J$ , причём этот конечный набор уравнений может быть выбран из уравнений первоначальной системы (4-5). Таким образом, любая (в том числе бесконечная) система полиномиальных уравнений равносильна, с одной стороны, некоторой своей конечной подсистеме, а с другой стороны, системе, левые части которой образуют в кольце многочленов идеал.

Множество  $V(J) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{A}^n \mid f(a) = 0 \quad \forall f \in J\}$  всех решений системы (4-5), левые части  $f_v$  которой пробегают идеал  $J \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , называется *аффинным алгебраическим многообразием*, задаваемым идеалом  $J$ . Отметим, что это множество может оказаться пустым: например, когда  $J = (1) = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  содержит уравнение  $1 = 0$ .

Для произвольной фигуры  $\Phi \subset \mathbb{A}^n$  множество всех многочленов, тождественно зануляющихся на  $\Phi$ , образует в кольце многочленов идеал, который обозначается

$$I(\Phi) = \{f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \quad \forall p \in \Phi\}.$$

Множество нулей  $V(I(\Phi))$  этого идеала — это наименьшее аффинное алгебраическое многообразие, содержащее  $\Phi$ .

Для любого идеала  $J \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  имеется тавтологическое включение  $J \subset I(V(J))$ . Вообще говоря, это включение строгое. Например, при  $n = 1$  для идеала  $J = (x^2)$  многообразие  $V(J) = \{0\}$ , а идеал  $I(V(J)) = (x) \supsetneq (x^2) = J$ .

ТЕОРЕМА 4.3 (NULLSTELLENSATZ, или ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА О НУЛЯХ)

Для любого идеала  $J \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  над произвольным алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  справедливы следующие два утверждения:

- (1) слабая теорема о нулях:  $V(J) = \emptyset \iff 1 \in J$
- (2) сильная теорема о нулях:  $f \in I(V(J)) \iff f^m \in J$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ .

Доказательство. Чтобы доказать первое утверждение, достаточно для каждого собственного<sup>1</sup> идеала  $J \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  указать точку  $p \in \mathbb{A}^n$ , в которой зануляются все многочлены из  $J$ . Поскольку увеличение идеала  $J$  только усложняет эту задачу, мы без ограничения общности можем считать, что идеал  $J$  максимален, т. е. любой многочлен  $g \notin J$  обратим по модулю  $J$ . Действительно, если существует необратимый по модулю  $J$  многочлен  $g \notin J$ , то уравнение  $gh + f = 1$  неразрешимо относительно  $h \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  и  $f \in J$ , а значит, идеал  $J' = (J, g)$  не содержит 1, т. е. является строго большим, чем  $J$  собственным идеалом, и мы можем расширить  $J$  до  $J' \supsetneq J$ . В силу нётеровости кольца многочленов после конечного числа таких расширений мы получим такой собственный идеал  $J$ , что  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/J$  является полем, что мы и будем далее предполагать.

Так как поле  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/J \supset \mathbb{k}$  конечно порождено как  $\mathbb{k}$ -алгебра, каждый элемент  $\vartheta$  этого поля по теор. 4.2 алгебраичен над  $\mathbb{k}$ , т. е. является корнем некоторого неприводимого приведённого многочлена из  $\mathbb{k}[x]$ . Поскольку для алгебраически замкнутого поля  $\mathbb{k}$  все такие многочлены линейны,  $\vartheta \in \mathbb{k}$ . Таким образом,  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/J \simeq \mathbb{k}$ , т. е. каждый многочлен

$$f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$$

сравним по модулю идеала  $J$  с некоторой константой. Рассмотрим точку  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n$ , каждая координата  $p_i \in \mathbb{k}$  которой сравнима по модулю  $J$  с одночленом  $x_i$ . Тогда произвольный многочлен  $f(x_1, \dots, x_n)$  будет сравним по модулю  $J$  с константой  $f(p) \in \mathbb{k}$ . Тем самым,  $f(p) = 0$  для всех  $f \in J$ , что и требовалось.

Докажем теперь второе утверждение. Поскольку при  $J = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  и  $V(J) = \emptyset$  оно тривиально, мы будем считать, что  $V(J) \neq \emptyset$  и  $J \neq (1)$ . Вложим  $\mathbb{A}^n$  в большее пространство  $\mathbb{A}^{n+1}$  с координатами  $(t, x_1, \dots, x_n)$  в качестве гиперплоскости  $t = 0$ . Если многочлен

$$f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \subset \mathbb{k}[t, x_1, \dots, x_n]$$

тождественно обращается в нуль на  $V(J)$ , то идеал  $J' \subset \mathbb{k}[t, x_1, \dots, x_n]$ , порождённый  $J$  и многочленом  $g(t, x) = 1 - tf(x)$ , имеет пустое множество нулей в  $\mathbb{A}^{n+1}$ , поскольку  $g(x, t) \equiv 1$  вдоль цилиндра  $V(J) \subset \mathbb{A}^{n+1}$ . Тем самым, по слабой теореме о нулях, идеал  $J'$  содержит единицу, т. е. существуют  $q_0, q_1, \dots, q_s \in \mathbb{k}[t, x_1, \dots, x_n]$  и  $f_1, \dots, f_s \in J$ , такие что

$$q_0(x, t) \cdot (1 - tf(x)) + q_1(t, x) \cdot f_1(x) + \dots + q_s(x, t) \cdot f_s(x) = 1.$$

Применим к этому равенству гомоморфизм  $\mathbb{k}[t, x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{k}(x_1, \dots, x_n)$ , заданный правилами  $t \mapsto 1/f(x)$ ,  $x_v \mapsto x_v$ . Получим равенство

$$q_1(1/f(x), x) \cdot f_1(x) + \dots + q_s(1/f(x), x) \cdot f_s(x) = 1$$

<sup>1</sup>Т. е. отличного от всего кольца многочленов

в поле рациональных функций  $\mathbb{k}(x_1, \dots, x_n)$ . Так как идеал  $J$  не содержит единицы, среди рациональных функций  $q_\nu(1/f(x), x)$  есть функции с нетривиальными знаменателями, причём все их можно сократить умножением на некоторую степень  $f^m$ . После умножения обеих частей равенства на эту степень получаем искомое выражение  $f^m(x) = \tilde{q}_1(x) \cdot f_1(x) + \dots + \tilde{q}_s(x) \cdot f_s(x)$  с  $\tilde{q}_\nu \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ .  $\square$

**4.5. Системы результатнтов.** Рассматриваемые с точностью до пропорциональности ненулевые решения системы однородных полиномиальных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_m(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (4-6)$$

где каждый  $f_i \in \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  однороден степени  $d_i$ , образуют проективное многообразие — пересечение проективных гиперповерхностей  $S_i = V(f_i) \subset \mathbb{P}(V)$ . Проективные гиперповерхности степени  $d$  являются точками проективного пространства  $\mathbb{P}(S^d V^*)$ . Наборы гиперповерхностей  $(S_1, \dots, S_m)$  заданных степеней  $d_1, \dots, d_m$  с непустым пересечением  $\bigcap_i S_i \neq \emptyset$ , составляют фигуру

$$\mathcal{R}(n+1; d_1, \dots, d_m) \subset \mathbb{P}(S^{d_1} V^*) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{d_m} V^*), \quad (4-7)$$

которая называется *результантным множеством* системы (4-6). Например, когда число уравнений равно числу переменных и все уравнения линейны, система (4-6) превращается в систему однородных линейных уравнений  $Ax = 0$  с квадратной матрицей  $A = (a_{ij})$  и имеет ненулевое решение если и только если  $\det(a_{ij}) = 0$ . Поэтому для  $m = n + 1$  и  $d_1 = \dots = d_{n+1} = 1$  результатнтное множество является проективным алгебраическим многообразием, заданным одним полиномиальным уравнением на коэффициенты  $a_{i,j}$  линейных форм  $f_1, \dots, f_{n+1}$ .

Покажем, что результатнтное множество (4-7) всегда является проективным алгебраическим многообразием, т. е. задаётся конечной системой полиномиальных уравнений на коэффициенты многочленов  $f_i$ , однородных по коэффициентам каждого из многочленов и зависящих только от числа переменных и набора степеней. Для этого рассмотрим идеал

$$J = (f_1, \dots, f_m) \subset \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

Отсутствие у системы (4-6) ненулевых решений означает, что аффинное алгебраическое многообразие  $V(J) \subset \mathbb{A}(V)$  пусто или совпадает с началом координат. В обоих случаях каждая из координатных функций  $x_i$  тождественно зануляется на  $V(J)$ , и по теореме Гильберта о нулях существует такое  $m \in \mathbb{N}$ , что  $x_i^m \in J$  для все  $i$ . Наоборот, если  $J$  содержит некоторую степень каждой из переменных, то система уравнений с левыми частями из идеала  $J$  включает в себя уравнения  $x_0^m = x_1^m = \dots = x_n^m = 0$ , имеющие только нулевое решение. Таким образом, отсутствие ненулевых решений у системы (4-6) равносильно тому, что для некоторого  $m$  идеал  $J$  содержит все  $x_i^m$ . Последнее означает, что любой многочлен, степень которого больше  $(n+1)(m-1)$ , лежит в  $J$ , т. е.  $J$  содержит все  $S^d V^*$  с  $d \gg 0$ . Пересечение  $J \cap S^d V^*$  является образом линейного отображения

$$\mu_d : S^{d-d_1} V^* \oplus \dots \oplus S^{d-d_m} V^* \rightarrow S^d, \quad (g_1, \dots, g_m) \mapsto \sum g_\nu f_\nu, \quad (4-8)$$



В самом деле, линейное отображение (4-8) для векторного пространства  $V^*$  с базисом  $t_0, t_1$  переводит пару однородных многочленов  $(h_1, h_2)$  в  $Ah_1 + Bh_2$ . При  $d = m + n - 1$  оно имеет вид  $\mu_{m+n-1} : S^{m-1}V^* \oplus S^{n-1}V^* \rightarrow S^{m+n-1}V^*$  и в стандартных базисах из мономов задаётся квадратной матрицей, транспонированной к матрице Сильвестра (4-9).

УПРАЖНЕНИЕ 4.11. Убедитесь в этом.

Если точка  $(\alpha, \beta)$  лежит на квадрик  $\alpha'_i \beta''_j - \alpha''_i \beta'_j = 0$ , то с точностью до постоянного множителя  $(\alpha''_i t_0 - \alpha'_i t_1) = (\beta''_i t_0 - \beta'_i t_1)$ . Так как эта линейная форма делит все многочлены вида  $Ah_1 + Bh_2$ , образ  $\text{im } \mu_{m+n-1} \neq S^{m+n-1}V^*$ . Поэтому определитель Сильвестра (4-8) зануляется на каждой квадрик  $\alpha'_i \beta''_j - \alpha''_i \beta'_j = 0$ . По теореме о нулях, некоторая степень многочлена  $R_{A,B}$  делится на произведение уравнений квадрик. В силу неприводимости этих уравнений и факториальности кольца многочленов такое возможно только когда  $R_{A,B}$  делится на произведение уравнений квадрик. Сравнение степеней и коэффициента при старшем мономе показывает, что частное равно 1.

УПРАЖНЕНИЕ 4.12. Убедитесь в этом.

Таким образом, для пары бинарных форм результатное многообразие задаётся одним уравнением<sup>1</sup>  $R_{AB} = 0$  на коэффициенты многочленов  $A, B$ . Многочлен  $R_{A,B}$  называется *результантом* форм  $A$  и  $B$ . Если положить  $t_0 = 1, t_1 = x$ , мы получим результат двух неоднородных многочленов  $A(x)$  и  $B(x)$ . В предположении, что  $a_0 b_0 \neq 0$ , такой результат обращается в нуль если и только если неоднородные многочлены  $A$  и  $B$  имеют общий корень в  $\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}_1 \setminus \{(0 : 1)\}$ .

<sup>1</sup>В прим. 6.9 на стр. 99 ниже мы обобщим этот результат на случай произвольной системы однородных полиномиальных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных.

## §5. Аффинная алгебраическая геометрия

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что основное поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто.

**5.1. Аффинный алгебро-геометрический словарь.** Аффинные алгебраические многообразия<sup>1</sup>, определённые над полем  $\mathbb{k}$ , образуют категорию  $\mathcal{A}ff_{\mathbb{k}}$ , морфизмами в которой являются *регулярные*<sup>2</sup> отображения, т. е. теоретико-множественные отображение  $\varphi : X \rightarrow Y$  из многообразия  $X \subset \mathbb{A}^n$  в многообразие  $Y \subset \mathbb{A}^m$ , переводящие точку  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$  в точку  $y = (y_1, \dots, y_m) \in Y$ , все координаты которой  $y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  являются многочленами от координат точки  $x$ . Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{k}$  на аффинном алгебраическом многообразии  $X \subset \mathbb{A}^n$  называется *регулярной*, если она является ограничением на  $X$  какого-нибудь многочлена  $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  на объёмлющем аффинном пространстве или, что то же самое, задаёт регулярное отображение  $f : X \rightarrow \mathbb{A}^1$ . Регулярные функции на  $X$  образуют конечно порождённую *приведённую*<sup>3</sup>  $\mathbb{k}$ -алгебру, которая обозначается

$$\mathbb{k}[X] \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{A}ff_{\mathbb{k}}}(X, \mathbb{k}) \simeq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X), \quad (5-1)$$

где  $I(X) = \{f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \mid f|_X \equiv 0\}$  обозначает идеал всех многочленов, тождественно исчезающих на  $X$ .

**Лемма 5.1**

Всякая конечно порождённая приведённая алгебра  $A$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  является координатной алгеброй  $A = \mathbb{k}[X]$  некоторого аффинного алгебраического многообразия  $X$ .

**Доказательство.** Зададим алгебру  $A$  образующими и соотношениями<sup>4</sup>, т. е. представим её как фактор  $A = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I$ . Приведённость алгебры  $A$  означает, что идеал соотношений  $I$  *радикален*<sup>5</sup>, т. е. для всех  $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  и  $n \in \mathbb{N}$  равенство  $f^n \in I$  возможно только при  $f \in I$ . Поэтому по сильной теореме о нулях  $I = I(V(I))$  является идеалом аффинного алгебраического многообразия  $X = V(I) \subset \mathbb{A}^n$ .  $\square$

**5.1.1. Гомоморфизм поднятия.** Со каждым отображением множеств  $\varphi : X \rightarrow Y$  связан *гомоморфизм поднятия*

$$\varphi^* : \mathbb{k}^Y \rightarrow \mathbb{k}^X, \quad f \mapsto f \circ \varphi, \quad (5-2)$$

действующий из алгебры  $\mathbb{k}^Y$  всех функций  $Y \rightarrow \mathbb{k}$  в алгебру  $\mathbb{k}^X$  всех функций  $X \rightarrow \mathbb{k}$  и переводящий функцию  $f : Y \rightarrow \mathbb{k}$  в её композицию с отображением  $\varphi$ . Если множества  $X \subset \mathbb{A}^n$  и  $Y \subset \mathbb{A}^m$  являются алгебраическими многообразиями, а отображение  $\varphi : X \rightarrow Y$  действует

<sup>1</sup>См. п. 1.4.1 на стр. 12.

<sup>2</sup>Или *полиномиальные*.

<sup>3</sup>Напомню, что ненулевой элемент  $a$  в кольце называется *нильпотентом*, если  $a^n = 0$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . Кольцо называется *приведённым*, если в нём нет ненулевых nilпотентов. Поскольку любая степень ненулевой функции со значениями в поле также является ненулевой функцией, в алгебре регулярных функций на аффинном алгебраическом многообразии нет nilпотентов.

<sup>4</sup>См. п. 4.3 на стр. 61.

<sup>5</sup>Напомню, что *радикалом* идеала  $I$  в коммутативном кольце  $K$  называется идеал  $\sqrt{I} = \{a \in K \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in I\}$ . Если  $\sqrt{I} = I$ , то идеал  $I$  называется *радикальным*.

на координаты точек по правилу  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n))$ , то его гомоморфизм поднятия переводит каждую образующую  $y_i \pmod{I(Y)}$  координатной алгебры  $\mathbb{k}[Y]$  в функцию  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)|_X : X \rightarrow \mathbb{k}$ . Таким образом регулярность теоретико-множественного отображения  $\varphi : X \rightarrow Y$  означает, что гомоморфизм поднятия  $\varphi^* : \mathbb{k}^Y \rightarrow \mathbb{k}^X$  переводит подалгебру  $\mathbb{k}[Y] \subset \mathbb{k}^Y$  регулярных функций на  $Y$  в алгебру  $\mathbb{k}[X] \subset \mathbb{k}^X$  регулярных функций на  $X$ , т. е. корректно задаёт гомоморфизм  $\mathbb{k}$ -алгебр  $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ . Аналогичная характеристика регулярных отображений имеется и для других геометрических теорий.

**Упражнение 5.1.** Проверьте, что теоретико-множественное отображение топологических (соотв. гладких или аналитических) многообразий  $X \rightarrow Y$  является непрерывным (соотв. гладким или аналитическим), если и только если его гомоморфизм поднятия переводит подалгебру  $C^0(Y) \subset \mathbb{R}^Y$  непрерывных (соотв. гладких или аналитических) функций на  $Y$  в алгебру непрерывных (соотв. гладких или аналитических) функций на  $X$ .

Обратите внимание, что вложение  $\varphi(X) \subset Y$  влечёт вложение идеалов  $\varphi^*(I(Y)) \subset I(X)$ . Поэтому гомоморфизм алгебр многочленов  $\mathbb{k}[y_1, \dots, y_m] \rightarrow \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ ,  $y_i \mapsto \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ , корректно факторизуется до гомоморфизма  $\mathbb{k}[Y] = \mathbb{k}[y_1, \dots, y_m]/I(Y) \rightarrow \mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X) = \mathbb{k}[X]$  координатных алгебр.

**5.1.2. Максимальный спектр.** С каждой точкой  $p \in X$  аффинного алгебраического многообразия  $X$  связан гомоморфизм вычисления<sup>1</sup>  $ev_p : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}$ ,  $f \mapsto f(p)$ . Он эпиморфен, поскольку переводит единицу в единицу, и значит, является гомоморфизмом факторизации по модулю своего ядра

$$\mathfrak{m}_p \stackrel{\text{def}}{=} \ker ev_p = I(\{p\}) = \{f \in \mathbb{k}[X] \mid f(p) = 0\}, \quad (5-3)$$

которое является максимальным идеалом в  $\mathbb{k}[X]$ , ибо фактор  $\mathbb{k}[X]/\mathfrak{m}_p \simeq \mathbb{k}$  является полем. Идеал (5-3) называется *максимальным идеалом точки*  $p \in X$ . Таким образом, значение каждого многочлена  $f \in \mathbb{k}[X]$  в точке  $p \in X$  совпадает с классом  $f \pmod{\mathfrak{m}_p} \in \mathbb{k}[X]/\mathfrak{m}_p \simeq \mathbb{k}$ .

Множество всех максимальных идеалов произвольной  $\mathbb{k}$ -алгебры  $A$  называется её *максимальным спектром* и обозначается  $\text{Spec}_m(A)$ . Каждой точке спектра  $\mathfrak{m} \in \text{Spec}_m A$  отвечает гомоморфизм факторизации  $\pi_{\mathfrak{m}} : A \rightarrow A/\mathfrak{m}$ ,  $a \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}}$ , принимающий значения в поле  $A/\mathfrak{m} \supset \mathbb{k}$ , которое конечно порождено как алгебра над  $\mathbb{k}$ . По [теор. 4.2](#) на стр. 62 такое поле является конечным алгебраическим расширением поля  $\mathbb{k}$ , а значит, совпадает с  $\mathbb{k}$ , когда поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто. Это позволяет интерпретировать элементы произвольной конечно порождённой алгебры  $A$  над таким полем как функции  $\text{Spec}_m A \rightarrow \mathbb{k}$ .

**Лемма 5.2**

На каждом аффинном алгебраическом многообразии  $X$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  соответствия  $p \longleftrightarrow ev_p \longleftrightarrow \mathfrak{m}_p = \ker(ev_p)$  задают биекции между точками  $p \in X$ , гомоморфизмами  $\mathbb{k}$ -алгебр  $f : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}$ , и максимальными идеалами  $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[X]$ .

**Доказательство.** Биективность второго соответствия мы уже проверили выше<sup>2</sup>. Сопоставление

<sup>1</sup>Это специальный случай гомоморфизма поднятия, отвечающий вложению  $p \hookrightarrow X$  одноточечного множества  $p$  в многообразии  $X$ .

<sup>2</sup>Сопоставление гомоморфизму его ядра инъективно вкладывает алгебру гомоморфизмов  $\mathbb{k}$ -алгебр  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(A, \mathbb{k})$  в множество  $\text{Spec}_m A$  над любым, не обязательно алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$ , но над незамкнутым полем не все максимальные идеалы являются ядрами гомоморфизмов вычисления со значениями в самом этом поле. Например, ядро гомоморфизма вычисления  $ev_i : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \mapsto f(i)$ , где  $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ , представляет собою главный максимальный идеал  $(x^2 + 1) \subset \mathbb{R}[x]$ , который не является

точке  $p \in X \subset \mathbb{A}^n$  её максимального идеала  $\mathfrak{m}_p = \ker \text{ev}_p$  вкладывает<sup>1</sup> множество точек в множество максимальных идеалов, поскольку для  $p \neq q$  всегда можно указать аффинно линейную функцию  $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{k}$  зануляющуюся в  $p$  и отличную от нуля в  $q$ . Чтобы показать, что над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  любой максимальный идеал  $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$  имеет вид  $\mathfrak{m}_p = \ker \text{ev}_p$  для некоторой точки  $p \in X$ , обозначим через  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  полный прообраз идеала  $\mathfrak{m}$  относительно отображения факторизации  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ . Так как  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/\tilde{\mathfrak{m}} = \mathbb{k}[X]/\mathfrak{m} = \mathbb{k}$ , идеал  $\tilde{\mathfrak{m}}$  является собственным, максимальным и по построению содержит  $I(X)$ . По слабой теореме о нулях все многочлены  $f \in \tilde{\mathfrak{m}}$  обращаются в нуль в некоторой точке  $p \in \mathbb{A}^n$ , которая лежит на  $X$ , так как  $I(X) \subset \tilde{\mathfrak{m}}$ . Следовательно,  $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_p$ , что в силу максимальности идеала  $\mathfrak{m}$  означает равенство  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$ .  $\square$

**Соглашение 5.1.** Всюду далее обозначение  $\text{Spec}_{\mathfrak{m}} A$  используется как для множества гомоморфизмов  $\mathbb{k}$ -алгебр  $A \rightarrow \mathbb{k}$ , так и для множества максимальных идеалов в  $A$ , поскольку любой гомоморфизм факторизации  $A \rightarrow \mathbb{k}$  однозначно задаётся своим ядром  $\mathfrak{m} \subset A$ .

**ПРИМЕР 5.1** ( $\text{Spec}_{\mathfrak{m}} \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \simeq \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\mathbb{k}^n)$ )

Каждый гомоморфизм  $\mathbb{k}$ -алгебр  $\varphi : \text{Spec}_{\mathfrak{m}} \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{k}$  однозначно определяется образами свободных образующих полиномиальной алгебры, т. е. набором чисел  $p_i = \varphi(x_i) \in \mathbb{k}$ . Сопоставление  $\varphi \mapsto (p_1, \dots, p_n)$  устанавливает биекцию между такими гомоморфизмами и точками аффинного координатного пространства  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\mathbb{k}^n)$ . Ядро гомоморфизма

$$\text{ev}_p : \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{k}$$

порождается линейными двучленами  $x_i - p_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**5.1.3. Нильрадикал и радикал Джекобсона.** Для произвольного коммутативного кольца  $A$  радикал  $\mathfrak{n}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{0} = \{a \in A \mid a^n = 0 \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}\}$  нулевого идеала<sup>2</sup> в  $A$  называется *нильрадикалом* кольца  $A$ . Пересечение  $\mathfrak{r}(A)$  всех максимальных идеалов кольца  $A$  называется *радикалом Джекобсона*.

**УПРАЖНЕНИЕ 5.2.** Убедитесь, что  $\mathfrak{n}(A)$  является идеалом в  $A$ .

**Предложение 5.1**

Для любой (не обязательно приведённой) конечно порождённой алгебры  $A$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  ядро гомоморфизма  $A \rightarrow \mathbb{k}^{\text{Spec}_{\mathfrak{m}} A}$ , сопоставляющего элементу  $a \in A$  функцию  $a : \text{Spec}_{\mathfrak{m}} A \rightarrow \mathbb{k}$ ,  $\mathfrak{m} \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}} \in A/\mathfrak{m} = \mathbb{k}$ , совпадает с нильрадикалом алгебры  $A$ , т. е.  $\mathfrak{n}(A) = \mathfrak{r}(A)$ .

**Доказательство.** Поскольку для любого  $\mathfrak{m} \in \text{Spec}_{\mathfrak{m}} A$  фактор алгебра  $A/\mathfrak{m}$  является полем и не содержит ненулевых нильпотентов, каждый нильпотентный элемент кольца задаёт нулевую функцию на спектре, ибо аннулируется всеми гомоморфизмами вычисления  $A \rightarrow A/\mathfrak{m}$ . Тем самым,  $\mathfrak{n}(A) \subset \mathfrak{r}(A)$ . Чтобы доказать обратное включение, рассмотрим приведённую конечно порождённую  $\mathbb{k}$ -алгебру  $A_{\text{red}} \stackrel{\text{def}}{=} A/\mathfrak{n}(A)$  и существующее по **лем. 5.1** на стр. 69 алгебраическое многообразие  $X \subset \mathbb{A}^n$  с координатной алгеброй  $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X) \simeq A_{\text{red}}$ . Если  $a \in \mathfrak{r}(A)$ ,

ядром никакого гомоморфизма  $\mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ , поскольку как векторное пространство над  $\mathbb{R}$  имеет в  $\mathbb{R}[x]$  коразмерность 2.

<sup>1</sup>Опять таки над любым, в том числе, не алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$ .

<sup>2</sup>Т. е. множество всех нильпотентных элементов кольца.

то класс элемента  $a$  в  $A_{\text{red}}$  лежит в  $\mathfrak{r}(A_{\text{red}})$ . Поэтому  $a(p) = 0$  для всех точек  $p \in X$ , т. е.  $a = 0$  в  $\mathbb{k}[X] = A_{\text{red}}$ . Следовательно,  $a \in \mathfrak{n}(A)$ .  $\square$

Упражнение 5.3. Покажите, что для произвольного коммутативного кольца  $A$  с единицей нильрадикал  $\mathfrak{n}(A)$  совпадает с пересечением всех простых<sup>1</sup> идеалов кольца  $A$ .

**5.1.4. Эквивалентность категорий.** Обозначим через  $\mathcal{A}lg_{\mathbb{k}}$  категорию конечно порождённых приведённых алгебр с единицей над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$ . Сопоставление аффинному алгебраическому многообразию  $X$  его координатной алгебры  $\mathbb{k}[X]$ , а регулярному морфизму аффинных многообразий  $\varphi : X \rightarrow Y$  гомоморфизма поднятия  $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$  задаёт контравариантный функтор<sup>2</sup>

$$h_{\mathbb{A}^1} : \mathcal{A}ff_{\mathbb{k}}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}lg_{\mathbb{k}}, \quad X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}ff_{\mathbb{k}}}(X, \mathbb{A}^1) = \mathbb{k}[X], \quad (5-4)$$

из категории аффинных алгебраических многообразий над полем  $\mathbb{k}$  в категорию конечно порождённых приведённых  $\mathbb{k}$ -алгебр с единицей. Проверим, что этот функтор является оборачивающей стрелки эквивалентностью категорий, т. е. *по-сути сюръективен* и *вполне строг*<sup>3</sup>. Первое означает, что каждая конечно порождённая приведённая  $\mathbb{k}$ -алгебра изоморфна координатной алгебре некоторого аффинного алгебраического многообразия, и было установлено нами в лем. 5.1 на стр. 69. Второе означает, что сопоставление регулярному морфизму многообразий его гомоморфизма подъёма задаёт биекцию

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}ff_{\mathbb{k}}}(X, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{A}lg_{\mathbb{k}}}(\mathbb{k}[Y], \mathbb{k}[X]), \quad \varphi \mapsto \varphi^*. \quad (5-5)$$

Чтобы построить обратную биекцию, рассмотрим функтор из категории конечно порождённых приведённых  $\mathbb{k}$ -алгебр с единицей в категорию множеств, сопоставляющий алгебре её максимальный спектр

$$h_{\mathbb{k}} : \mathcal{A}lg_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Set}, \quad A \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}lg_{\mathbb{k}}}(A, \mathbb{k}) = \text{Spec}_{\mathbb{m}} A, \quad (5-6)$$

а гомоморфизму  $\mathbb{k}$ -алгебр  $\psi : A \rightarrow B$  — отображение подъёма  $\psi^* : \text{Spec}_{\mathbb{m}} B \rightarrow \text{Spec}_{\mathbb{m}} A$ , переводящее сюръекцию  $\text{ev}_{\mathbb{m}} : B \rightarrow \mathbb{k}$  с ядром  $\mathfrak{m} \in \text{Spec}_{\mathbb{m}} B$  в сюръекцию  $\psi^*(\text{ev}_{\mathbb{m}}) = \text{ev}_{\mathbb{m}} \circ \psi$  с ядром  $\psi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \text{Spec}_{\mathbb{m}} \mathbb{k}[X]$ . Сравнение определений показывает, что отображения множеств

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}ff_{\mathbb{k}}}(X, Y) \begin{array}{c} \xleftarrow{\varphi \mapsto \varphi^*} \\ \xrightarrow{\psi^* \leftarrow \psi} \end{array} \text{Hom}_{\mathcal{A}lg_{\mathbb{k}}}(\mathbb{k}[Y], \mathbb{k}[X])$$

обратны друг другу. В самом деле, если регулярный морфизм из алгебраического многообразия  $X \subset \mathbb{A}^n$  в алгебраическое многообразие  $Y \subset \mathbb{A}^m$  действует по правилу

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)), \quad \text{где } \varphi_i(x) \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n],$$

то его гомоморфизм подъёма  $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$  действует на образующие по правилу

$$y_i \mapsto \varphi_i \pmod{I(X)},$$

<sup>1</sup>Напомним, что идеал  $\mathfrak{p} \subset A$  называется *простым*, если в фактор кольце  $A/\mathfrak{p}$  нет делителей нуля.

<sup>2</sup>Необходимые предварительные сведения о категориях и функторах можно почерпнуть из курса алгебры, см. например лекцию [http://vyshka.math.ru/pspdf/1011/algebra-2/lec\\_10.pdf](http://vyshka.math.ru/pspdf/1011/algebra-2/lec_10.pdf)

<sup>3</sup>См. цитированную выше лекцию.

а подъём  $\varphi^{**} : \text{Spec}_m \mathbb{k}[X] \rightarrow \text{Spec}_m \mathbb{k}[Y]$  этого гомоморфизма подъёма переводит вычисление

$$\text{ev}_p : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}, \quad f(x) \mapsto f(p),$$

в заданной точке  $p = (p_1, \dots, p_n) \in X$  в композицию  $\text{ev}_p \circ \varphi^*$ , которая отправляет каждую образующую  $y_i \in \mathbb{k}[Y]$  в число  $\varphi_i(p) \in \mathbb{k}$  и является таким образом вычислением в точке  $\varphi(p) \in Y$ . Стало быть,  $\varphi^{**} = \varphi$ .

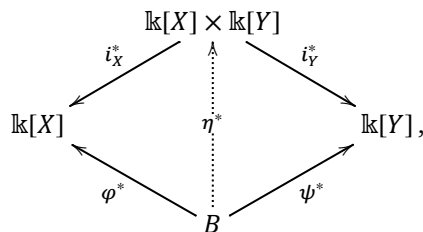
УПРАЖНЕНИЕ 5.4. Установите для любого гомоморфизма  $\mathbb{k}$ -алгебр  $\psi : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$  равенство  $\psi^{**} = \psi$ .

Тем самым, отображение (5-5) биективно, и значит, функтор (5-5) является оборачивающей стрелки эквивалентностью категорий. Функтор (5-6) не является квазиобратным<sup>1</sup> к функтору (5-4) лишь потому, что принимает значения не в категории аффинных алгебраических многообразий, а в категории множеств. Для любой конечно порождённой приведённой  $\mathbb{k}$  алгебры  $A$  с единицей, множество  $\text{Spec}_m A$  допускает много различных, но изоморфных друг другу структур аффинного алгебраического многообразия, если понимать под таковой структурой вложение множеств  $\varphi : \text{Spec}_m A \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ , биективно отображающее  $\text{Spec}_m A$  на аффинное алгебраическое многообразие  $V(\ker \varphi^*) \subset \mathbb{A}^n$ , где  $\varphi^* : \mathbb{k}[\mathbb{A}^n] \rightarrow A$  это гомоморфизм подъёма вложения  $\varphi$ . Задание такой структуры равносильно выбору представления алгебры  $A$  образующими и соотношениями, т. е. фиксации изоморфизма  $A \simeq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I$ .

Пример 5.2 (прямая и гипербола)

В прим. 5.1 на стр. 71 мы видели, что точки спектра  $\text{Spec}_m \mathbb{k}[t]$  биективно соответствуют точкам аффинной прямой  $\mathbb{A}^1 = \mathbb{k}$ : каждый гомоморфизм  $\text{ev} : \mathbb{k}[t] \rightarrow \mathbb{k}$  однозначно определяется своим значением  $\text{ev}(t) = \lambda \in \mathbb{k}$  на образующей алгебры  $\mathbb{k}[t]$ , и это значение может быть любым. Аналогично, спектр алгебры полиномов Лорана  $\text{Spec}_m \mathbb{k}[t, t^{-1}]$  находится в естественной биекции с точками аффинной прямой с выколотым нулём, т. е. с открытым множеством  $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = \mathbb{k}^*$ , ибо значение  $\lambda = \text{ev}(t) = 1 / \text{ev}(t^{-1})$  может быть любым обратимым элементом поля  $\mathbb{k}$ . Если же представить алгебру полиномов Лорана образующими и соотношениями — например, посредством изоморфизма  $\varphi^* : \mathbb{k}[t, t^{-1}] \simeq \mathbb{k}[x, y]/(xy - 1)$ , переводящего  $t$  в  $x$ , а  $t^{-1}$  — в  $y$ , то её спектр отождествится с множеством точек гиперболы  $xy = 1$  в  $\mathbb{A}^2$ . При этом отображение поднятия  $\varphi = \varphi^{**} : V(xy - 1) \rightarrow \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$  будет проекцией гиперболы на координатную ось.

**5.1.5. Дизъюнктные объединения (копроизведения) многообразий.** Для аффинных алгебраических многообразий  $X$  и  $Y$  прямое произведение алгебр  $\mathbb{k}[X] \times \mathbb{k}[Y]$  конечно порождено, приведено, содержит единицу и обладает следующим универсальным свойством: для любой пары гомоморфизмов  $\varphi^* : B \rightarrow \mathbb{k}[X]$ ,  $\psi^* : B \rightarrow \mathbb{k}[Y]$  из произвольной  $\mathbb{k}$ -алгебры  $B$  существует единственный гомоморфизм  $\eta^* : B \rightarrow \mathbb{k}[X] \times \mathbb{k}[Y]$ , делающий коммутативной диаграмму



<sup>1</sup>В смысле цитированной выше лекции.

в которой  $i_X^* : \mathbb{k}[X] \times \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$  и  $i_Y^* : \mathbb{k}[X] \times \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[Y]$  суть проекции произведения на сомножители, переводящие  $(f, g) \in \mathbb{k}[X] \times \mathbb{k}[Y]$  в  $f \in \mathbb{k}[X]$  и  $g \in \mathbb{k}[Y]$  соответственно.

УПРАЖНЕНИЕ 5.5. Проверьте это, и покажите любая алгебра  $A$  с парой гомоморфизмов

$$i_X^* : A \rightarrow \mathbb{k}[X] \quad \text{и} \quad i_Y^* : A \rightarrow \mathbb{k}[Y],$$

удовлетворяющих предыдущему универсальному свойству, канонически изоморфна алгебре  $\mathbb{k}[X] \times \mathbb{k}[Y]$  посредством единственного изоморфизма, перестановочного с гомоморфизмами  $i_X^*$  и  $i_Y^*$ .

Из установленной в н° 5.1.4 эквивалентности категорий вытекает, что аффинное алгебраическое многообразие  $X \sqcup Y \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spec}_m(\mathbb{k}[X] \times \mathbb{k}[Y])$  обладает двойственным универсальным свойством: для любой пары регулярных морфизмов  $\varphi : X \rightarrow Z$ ,  $\psi : Y \rightarrow Z$  в любое аффинное алгебраическое многообразие  $Z$  существует единственный регулярный морфизм  $\eta : X \sqcup Y \rightarrow Z$ , делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & X \sqcup Y & \\ i_X \nearrow & \vdots & \nwarrow i_Y^* \\ X & \eta^* & Y \\ \varphi \searrow & \vdots & \swarrow \psi^* \\ & Z & \end{array}$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.6. Проверьте, что для любых объектов  $X, Y$  произвольной категории объект  $X \sqcup Y$  и обладающие предыдущим универсальным свойством морфизмы

$$i_X : X \rightarrow X \sqcup Y, \quad i_Y : Y \rightarrow X \sqcup Y,$$

если существуют, то единственны точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с  $i_X$  и  $i_Y$ . Убедитесь также, что в категории множеств таким объектом является дизъюнктное объединение множеств  $X$  и  $Y$ .

Таким образом дизъюнктное объединение аффинных алгебраических многообразий тоже является аффинным алгебраическим многообразием.

УПРАЖНЕНИЕ 5.7. Пусть аффинное алгебраическое многообразие  $X$  является теоретико-множественным объединением двух непустых непересекающихся аффинных алгебраических многообразий  $Y$  и  $Z$ . Покажите, что  $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[Y] \times \mathbb{k}[Z]$ .

**5.1.6. Прямые произведения многообразий.** Для коммутативных  $\mathbb{k}$ -алгебр  $A$  и  $B$  и единицами тензорное произведение векторных пространств  $A \otimes B$  имеет естественную структуру коммутативной  $\mathbb{k}$ -алгебры с единицей  $1 \otimes 1$  и умножением, которое на разложимых тензорах задаётся формулой  $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 5.8. Убедитесь в этом.

Из универсального свойства тензорного произведения вытекает, что гомоморфизмы  $\mathbb{k}$ -алгебр

$$\begin{aligned} \alpha : A &\rightarrow A \otimes B & a &\mapsto a \otimes 1, \\ \beta : B &\rightarrow A \otimes B & b &\mapsto 1 \otimes b, \end{aligned} \tag{5-7}$$

обладают универсальными свойствами *копроизведения*, т. е. для любой пары гомоморфизмов  $\varphi : A \rightarrow C, \psi : B \rightarrow C$  существует единственный гомоморфизм  $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \rightarrow C$  со свойствами  $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ \alpha$  и  $\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \beta$ , и этот гомоморфизм действует на разложимые тензоры по правилу  $\varphi \otimes \psi : a \otimes b \mapsto \varphi(a)\psi(b)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 5.9. Убедитесь в этом.

Например, тензорное произведение алгебр  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \otimes \mathbb{k}[y_1, \dots, y_m]$  изоморфно алгебре многочленов  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$  посредством отображения

$$x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n} \otimes y_1^{r_1} \dots y_m^{r_m} \mapsto x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n} y_1^{r_1} \dots y_m^{r_m}.$$

Эквивалентность категорий из п° 5.1.4 превращает этот изоморфизм в изоморфизм аффинных алгебраических многообразий  $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \simeq \mathbb{A}^{n+m}$ .

Предложение 5.2

Тензорное произведение конечно порождённых приведённых  $\mathbb{k}$ -алгебр  $A \otimes B$  тоже является конечно порождённой приведённой  $\mathbb{k}$ -алгеброй с максимальным спектром

$$\text{Spec}_m(A \otimes B) = \text{Spec}_m(A) \times \text{Spec}_m(B).$$

В частности, теоретико множественное произведение аффинных алгебраических многообразий тоже является аффинным алгебраическим многообразием.

Доказательство. Биекция  $\text{Spec}_m(A) \times \text{Spec}_m(B) \simeq \text{Spec}_m(A \otimes B)$  переводит точку  $(p, q)$ , представленную парой эпиморфизмов вычисления  $ev_p : A \rightarrow \mathbb{k}, ev_q : B \rightarrow \mathbb{k}$  в эпиморфизм вычисления

$$A \otimes B \rightarrow \mathbb{k}, \quad a \otimes b \mapsto ev_p(a) ev_q(b),$$

существующий в силу универсального свойства тензорного произведения. Алгебра  $A \otimes B$  порождается над  $\mathbb{k}$  всевозможными попарными тензорными произведениями образующих алгебр  $A$  и  $B$ , коих имеется конечное число. Чтобы показать, что  $A \otimes B$  приведена, достаточно согласно предл. 5.1 на стр. 71 убедиться в том, что всякий элемент  $h \in A \otimes B$ , задающий нулевую функцию на  $\text{Spec}_m(A \otimes B)$ , равен нулю. Для этого запишем такой элемент  $h$  в виде  $\sum f_v \otimes g_v$  с линейно независимыми над  $\mathbb{k}$  элементами  $g_v \in B$ . Из равенства  $(ev_p \otimes ev_q)h = 0$ , справедливо для всех  $(p, q) \in \text{Spec}_m(A \otimes B)$ , вытекает, что при произвольно зафиксированном  $p \in \text{Spec}_m A$  линейная комбинация  $\sum f_v(p) \cdot g_v \in B$  является тождественно нулевой функцией на  $\text{Spec}_m B$  и тем самым равна нулю в  $B$ , ибо алгебра  $B$  приведена. Это означает, что все константы  $f_v(p)$  нулевые для любого  $p \in \text{Spec}_m A$ , т. е. элементы  $f_v \in A$  задают тождественно нулевые функции  $\text{Spec}_m A \rightarrow \mathbb{k}$ . Поскольку алгебра  $A$  приведена, все  $f_v = 0$ , а значит и  $h = 0$ .  $\square$

**5.2. Топология Зарисского.** На множестве  $X = \text{Spec}_m A$  имеется каноническая топология, отражающая алгебраические свойства алгебры  $A$ . Эта топология называется *топологией Зарисского* и имеет в качестве замкнутых подмножеств алгебраические подмногообразия в  $X$ , т. е. множества вида  $V(I) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \forall f \in I\} = \{m \in \text{Spec}_m A \mid I \subset m\}$  для всевозможных идеалов  $I \subset A$ .

УПРАЖНЕНИЕ 5.10. Убедитесь, что а)  $\emptyset = V(1)$  б)  $X = V(0)$  в)  $\bigcap_v V(I_v) = V\left(\sum_v I_v\right)$ , где  $\sum_v I_v$  означает идеал, образованный всевозможными конечными суммами  $\sum_v f_v$  с  $f_v \in I_v$

г)  $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(IJ)$ , где  $IJ$  означает идеал, представляющий собою  $\mathbb{k}$ -линейную оболочку всевозможных произведений<sup>1</sup>  $ab$  с  $a \in I, b \in J$ .

Топология Зарисского имеет чисто алгебраическую природу: окрестности Зарисского отражают скорее отношения делимости, нежели «близости», и многие её свойства довольно далеки от интуитивно привычных свойств метрической топологии. Скажем, топология Зарисского на произведении  $X \times Y$  обычно тоньше произведения топологий Зарисского на  $X$  и  $Y$ , поскольку замкнутые подмножества  $Z \subset X \times Y$  не исчерпываются произведениями замкнутых подмножеств в  $X, Y$ . Например, при  $X = Y = \mathbb{A}^1$  гипербола  $V(xy - 1)$  замкнута в топологии Зарисского на  $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2$ , а отличные от всей плоскости произведения замкнутых подмножеств в  $\mathbb{A}^1$  исчерпываются конечными объединениями изолированных точек и прямых, параллельных координатным осям.

Предложение 5.3 (база открытых множеств и компактность)

Каждое открытое подмножество аффинного алгебраического многообразия  $X$  является объединением конечного числа *главных* открытых множеств  $\mathcal{D}(f) \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus V(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ , где  $f \in \mathbb{k}[X]$ , и *компактно* в том смысле, что в каждое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Доказательство. Пусть  $U = X \setminus V(I)$ . Так как алгебра  $\mathbb{k}[X]$  нётерова, идеал  $I = (f_1, \dots, f_m)$  конечно порождён. Поэтому  $V(I) = \bigcap V(f_i)$  и  $U = \bigcup (X \setminus V(f_i)) = \bigcup_v \mathcal{D}(f_i)$ . Это доказывает первое утверждение. Для доказательства второго заметим, что семейство главных открытых множеств  $\mathcal{D}(f_v)$  покрывает открытое множество  $U$  если и только если общие нули всех функций  $f_v$  лежат вне  $U$ , т. е.  $V(I) \subset X \setminus U$ , где  $I$  — идеал, порождённый функциями  $f_v$ . Поскольку  $I = (f_1, \dots, f_m)$  для некоего конечного набора функций  $f_1, \dots, f_m$ , множество  $U$  покрывается множествами  $\mathcal{D}(f_i)$ , на которых отличны от нуля функции из этого набора.  $\square$

Предложение 5.4 (непрерывность регулярных морфизмов)

Всякий регулярный морфизм алгебраических многообразий  $\varphi : X \rightarrow Y$  непрерывен в топологии Зарисского.

Доказательство. Прообраз  $\varphi^{-1}(V(I))$  замкнутого подмножества  $V(I) \subset Y$  состоит из всех таких точек  $x \in X$ , что  $f(\varphi(x)) = 0$  для всех  $f \in I$ . Тем самым, он является множеством нулей идеала, порождённого в  $\mathbb{k}[X]$  образом  $\varphi^*(I)$  идеала  $I$  при гомоморфизме поднятия  $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ .  $\square$

**5.2.1. Неприводимые компоненты.** Топологическое пространство  $X$ , представимое в виде объединения  $X = X_1 \cup X_2$  своих собственных замкнутых подмножеств  $X_1, X_2 \subsetneq X$ , называется *приводимым*. В обычной метрической топологии практически все пространства приводимы. В топологии Зарисского приводимость многообразия  $X$  равносильна наличию делителей нуля в алгебре  $\mathbb{k}[X]$ , и неприводимые алгебраические многообразия являются грубыми аналогами степеней простых чисел в арифметике.

Предложение 5.5

Аффинное алгебраическое многообразие неприводимо если и только если в его координатной алгебре  $\mathbb{k}[X]$  нет ненулевых делителей нуля.

<sup>1</sup>Обратите внимание, что последнее равенство равносильно равенству  $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{IJ}$ .

Доказательство. Разложение  $X = X_1 \cup X_2$ , где каждое  $X_i$  замкнуто, непусто и отлично от  $X$ , означает наличие таких ненулевых функций  $f_1 \in I(X_1)$ ,  $f_2 \in I(X_2)$ , что произведение  $f_1 f_2$  тождественно зануляется на всём  $X$ . Последнее означает, что  $f_1 f_2 = 0$  в  $\mathbb{k}[X]$ . Наоборот, если  $f_1 f_2 = 0$  в  $\mathbb{k}[X]$  для ненулевых  $f_1, f_2 \in \mathbb{k}[X]$ , то  $f_1$  и  $f_2$  необратимы в  $\mathbb{k}[X]$ , а значит, замкнутые подмножества  $V(f_1)$  и  $V(f_2)$  непусты и отличны от  $X$ . При этом  $X = V(f_1) \cup V(f_2)$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 5.1. Убедитесь, что  $V(f)$  непусто и отлично от  $X$  для всякого ненулевого необратимого многочлена  $f \in \mathbb{k}[X]$ .

Следствие 5.1

Аффинная гиперповерхность  $V(g) \subset \mathbb{A}^n$ , где  $g \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , неприводима тогда и только тогда, когда  $g$  является степенью неприводимого многочлена.

Доказательство. Поскольку алгебра  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  факториальна, радикал  $\sqrt{(f)}$  любого главного идеала  $(f)$  тоже является главным идеалом, порождённым произведением всех попарно неассоциированных неприводимых делителей многочлена  $f$ . Алгебра  $\mathbb{k}[V(f)] = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/\sqrt{(f)}$  не имеет делителей нуля если и только если  $f$  имеет ровно один неприводимый делитель с точностью до умножения на константы.  $\square$

ТЕОРЕМА 5.1

Каждое аффинное алгебраическое многообразие  $X$  является конечным объединением

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_k$$

таких неприводимых замкнутых подмножеств  $X_i \subset X$ , что  $X_i \not\subset X_j$  при  $i \neq j$ , и это разложение единственно с точностью до перестановки его элементов.

Доказательство. Сначала докажем существование разложения. Если  $X$  неприводимо, доказывать нечего. Если  $X$  приводимо, представим его в виде  $X = Z_1 \cup Z_2$ , где  $Z_{1,2}$  — собственные замкнутые подмножества. Каждую приводимую компоненту этого разложения снова разложим в объединение двух собственных замкнутых подмножеств, и так далее. Если на каком-то шаге получится разложение  $X = \bigcup Z_\nu$  в котором все  $Z_\nu$  неприводимы, мы выкинем из этого объединения все неприводимые компоненты, которые содержатся в других неприводимых компонентах, и получим требуемое разложение. Если процесс не остановится через конечное число шагов, мы сможем построить бесконечную цепочку строго вложенных замкнутых подмножеств  $X \supsetneq Y_1 \supsetneq Y_2 \supsetneq \dots$ , идеалы которых  $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$  образуют бесконечную возрастающую цепочку, противоречащую нётеровости алгебры  $\mathbb{k}[X]$ .

Единственность доказывается индукцией по  $k$ . При  $k = 1$  многообразие  $X$  неприводимо и является единственной своей неприводимой компонентой. Пусть  $X$  раскладывается в объединение  $k \geq 2$  неприводимых компонент и для всех многообразий, раскладывающихся на меньшее число компонент, разложение в объединение неприводимых компонент единственно. Если неприводимое замкнутое подмножество  $Y \subset X$  лежит в объединении замкнутых подмножеств  $Z_1 \cup Z_2$ , то  $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$ , а значит,  $Y \subset Z_1$  или  $Y \subset Z_2$ . Поэтому равенство двух разложений на неприводимые компоненты  $X_1 \cup \dots \cup X_k = Y_1 \cup \dots \cup Y_m$  влечёт включение  $X_1 \subset Y_\alpha \subset X_\beta$  для некоторых  $\alpha, \beta$ , что означает равенство  $X_1 = Y_\alpha = X_\beta$ . Выкинем из обоих разложений компоненты  $X_1$  и  $Y_\alpha$  и применим предположение индукции к объединению замыканий оставшихся компонент.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 5.12. Пусть  $Z \subsetneq Y \subset X$  замкнуты и  $Y$  неприводимо. Убедитесь, что  $Y = \overline{Y \setminus Z}$ , где замыкание берётся в  $X$ , и что неприводимость  $Y$  для этого существенна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1

Неприводимые замкнутые подмножества  $X_i \subset X$  из теор. 5.1, называются *неприводимыми компонентами* многообразия  $X$ .

СЛЕДСТВИЕ 5.2

Элемент  $f \in \mathbb{k}[X]$  является делителем нуля если и только если он обращается в нуль на некоторой неприводимой компоненте многообразия  $X$ .

ПРИМЕР 5.3 («большие» открытые множества)

Топология Зарисского нехаусдорфова. Если  $X$  неприводимо, любые два непустых открытых подмножества  $U_1, U_2 \subset X$  имеют непустое пересечение, поскольку в противном случае возникает разложение  $X = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$ . Иначе говоря, каждое непустое открытое подмножество неприводимого многообразия всюду плотно в нём.

УПРАЖНЕНИЕ 5.13. Пусть  $X$  неприводимо и  $f, g \in \mathbb{k}[X]$ . Докажите, что если  $f|_U = g|_U$  для некоторого непустого открытого  $U \subset X$ , то  $f = g$  в  $\mathbb{k}[X]$ .

**5.3. Рациональные функции.** Не являющиеся делителями нуля элементы алгебры  $\mathbb{k}[X]$  образуют мультипликативную систему<sup>1</sup>  $S_X \subset \mathbb{k}[X]$ . Кольцо частных  $S_X^{-1}\mathbb{k}[X]$  называется *кольцом рациональных функций* на  $X$  и обозначается  $\mathbb{k}(X)$ . Если  $X$  неприводимо, то  $\mathbb{k}(X) = Q_{\mathbb{k}[X]}$  — это поле частных целостного кольца  $\mathbb{k}[X]$ . Скажем, что рациональная функция  $f \in \mathbb{k}(X)$  *определена* в точке  $x \in X$ , если существует такое её представление дробью  $f = p/q$ , где  $p, q \in \mathbb{k}[X]$  и  $q$  не делит нуль, что  $q(x) \neq 0$ . Число  $f(x) = p(x)/q(x) \in \mathbb{k}$  называется *значением  $f$*  в точке  $x$ .

УПРАЖНЕНИЕ 5.14. Убедитесь, что  $f(x)$  не зависит от способа записи  $f$  в виде дроби  $f = p/q$ , где  $p, q \in \mathbb{k}[X]$ ,  $q$  не делит нуль, и  $q(x) \neq 0$ .

Множество точек  $x$ , в которых определена рациональная функция  $f$ , называется *областью определения* функции  $f$  и обозначается  $\text{Dom}(f)$ . Из сл. 5.2 и прим. 5.3 вытекает, что  $\text{Dom}(f)$  является плотным открытым подмножеством в  $X$ .

УПРАЖНЕНИЕ 5.15. Убедитесь, что для совпадения двух рациональных функций как элементов кольца  $\mathbb{k}(X)$  достаточно поточечного совпадения их значений на каком-нибудь плотном открытом подмножестве в  $X$ .

Для открытого  $U \subset X$  положим  $\mathbb{k}[U] \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathbb{k}(X) \mid \text{Dom}(f) \supset U\}$  и будем называть его *кольцом рациональных функций, регулярных в  $U$* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6

Если  $h \in \mathbb{k}[X]$  не делит нуль, то  $\mathbb{k}[\mathcal{D}(h)] = \mathbb{k}[X][h^{-1}]$  является кольцом частных  $\mathbb{k}[X]$  со знаменателями из мультипликативной системы  $\{h^k\}_{k \geq 0}$ .

Доказательство. Для рациональной функции  $f \in \mathbb{k}(X)$  положим

$$(f^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in \mathbb{k}[X] \mid gf \in \mathbb{k}[X]\}. \quad (5-8)$$

<sup>1</sup>Подробнее про мультипликативные системы и кольца дробей со знаменателями в таких системах см. в разделе 3.1 на стр. 53 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2526/lec\\_03.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2526/lec_03.pdf).

Это идеал в  $\mathbb{k}[X]$ , и лежащие в нём делители нуля суть все возможные знаменатели, встречающиеся в разнообразных представлениях  $f$  в виде дроби. Множество делителей нуля в  $(f^{-1})$  представляет собою пересечение этого идеала с объединением идеалов  $I(X_i)$  неприводимых компонент  $X_i$  многообразия  $X$ . Так как делители нуля в  $(f^{-1})$  по определению имеются, каждое пересечение  $(f^{-1}) \cap I(X_i) \subsetneq (f^{-1})$  является собственным векторным подпространством в  $(f^{-1})$ , и весь идеал  $(f^{-1})$  является объединением этих подпространств и подпространства, порождённого делителем нуля. Если последнее подпространство тоже собственное, пространство  $(f^{-1})$  оказалось бы объединением конечного набора собственных подпространств, что невозможно над бесконечным полем<sup>1</sup>.

УПРАЖНЕНИЕ 5.16. Убедитесь в этом.

Мы заключаем, что делители нуля линейно порождают  $(f^{-1})$  как векторное пространство над  $\mathbb{k}$ , и  $X \setminus \text{Dom}(f) = V((f^{-1}))$ . Включение  $\mathcal{D}(h) \subset \text{Dom}(f)$  означает, что  $V(h) \supset V((f^{-1}))$ , т. е. функция  $h$  зануляется на  $V((f^{-1}))$ . По теореме Гильберта о нулях  $h^d \in (f^{-1})$  для некоторого  $d \in \mathbb{N}$ . Тем самым,  $f = p/h^d$ , где  $p \in \mathbb{k}[X]$ .  $\square$

**5.3.1. Аффинность главных открытых множеств.** Если  $h \in \mathbb{k}[X]$  не делит нуля, то главное открытое подмножество  $\mathcal{D}(h) = \text{Spec}_m \mathbb{k}[X][h^{-1}] = \text{Spec}_m \mathbb{k}[X][t]/(1 - ht)$  всюду плотно в  $X$  и является аффинным алгебраическим многообразием: например, его можно реализовать замкнутой гиперповерхностью  $V(1 - ht) \subset X \times \mathbb{A}^1$ . Вложение  $i: \mathcal{D} \hookrightarrow X$  является регулярным морфизмом аффинных многообразий: его гомоморфизм подъёма задаёт каноническое вложение  $i^*: \mathbb{k}[X] \hookrightarrow \mathbb{k}[X][h^{-1}] \simeq \mathbb{k}[\mathcal{D}(h)]$  и продолжается до изоморфизма колец частных  $i^*: \mathbb{k}(X) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{k}(\mathcal{D}(h))$ .

Замечание 5.1. Два разных толкования обозначения  $\mathbb{k}[\mathcal{D}(h)]$  — как координатной алгебры аффинного алгебраического многообразия  $\mathcal{D}(h)$  и как алгебры рациональных функций, регулярных на открытом множестве  $\mathcal{D}(h) \subset X$ , — согласованы друг с другом. В частности, согласованы друг с другом и два разных толкования обозначения  $\mathbb{k}[X]$  — как координатной алгебры аффинного многообразия  $X$  и как алгебры рациональных функций, регулярных всюду на  $X$ , т. е.  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X) = \{f \in \mathbb{k}(X) \mid \text{Dom}(f) = X\}$ . Это вытекает из предл. 5.6 при  $h = 1$ , что отвечает несобственному главному открытому множеству  $\mathcal{D}(h) = X$ .

Предостережение 5.1. Неглавное открытое подмножество  $U \subset X$ , вообще говоря, не является аффинным подмногообразием: каноническое вложение  $U \hookrightarrow \text{Spec}_m \mathbb{k}[U]$ , сопоставляющее точке  $u \in U$  её максимальный идеал  $\mathfrak{m}_u = \ker \text{ev}_u \subset \mathbb{k}[U]$ , может быть не биективно.

УПРАЖНЕНИЕ 5.17. Пусть  $n \geq 2$  и  $U = \mathbb{A}^n \setminus O$  — дополнение к началу координат в аффинном пространстве. Покажите, что  $\mathbb{k}[U] = \mathbb{k}[\mathbb{A}^n]$  и, тем самым,  $\text{Spec}_m \mathbb{k}[U] = \mathbb{A}^n \neq U$ .

Предложение 5.7

Пусть разложение аффинного алгебраического многообразия  $X$  на неприводимые компоненты имеет вид  $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$ . Тогда  $\mathbb{k}(X) = \mathbb{k}(X_1) \times \dots \times \mathbb{k}(X_k)$ .

Доказательство. Объединение  $Z = \bigcup_{i \neq j} (X_i \cap X_j)$  попарных пересечений неприводимых компонент замкнуто в  $X$ . Выберем в его идеале  $I(Z) \subset \mathbb{k}[X]$  какую-нибудь ненулевую функцию  $f \in I(Z)$ , не делящую нуля в  $\mathbb{k}[X]$ .

<sup>1</sup>А алгебраически замкнутое поле бесконечно.

УПРАЖНЕНИЕ 5.18. Убедитесь, что  $I(Z)$  линейно порождается такими функциями как векторное пространство над  $\mathbb{k}$ .

Главное открытое подмножество  $W = \mathcal{D}(f) = \text{Spec}_m \mathbb{k}[X][f^{-1}] \subset X$  аффинно и является дизъюнктым объединением подмножеств  $W_i = W \cap X_i \subset X_i$ . Каждое  $W_i$  является главным открытым подмножеством многообразия  $X_i$  и тоже аффинно:  $W_i = \mathcal{D}(f_i) = \text{Spec}_m \mathbb{k}[X_i][f_i^{-1}] \subset X_i$ , где  $f_i = f \pmod{I(X_i)} \in \mathbb{k}[X_i]$ . Тем самым,  $\mathbb{k}[W] \simeq \mathbb{k}[W_1] \times \cdots \times \mathbb{k}[W_k]$ , как мы видели в н° 5.1.5.

УПРАЖНЕНИЕ 5.19. Проверьте, что кольцо частных прямого произведения коммутативных колец с единицами изоморфно прямому произведению колец частных сомножителей:

$$(K_1 \times \dots \times K_k)S_{K_1 \times \dots \times K_k}^{-1} \simeq K_1 S_{K_1}^{-1} \times \dots \times K_k S_{K_k}^{-1}.$$

Таким образом,  $\mathbb{k}(X) \simeq \mathbb{k}(W) \simeq \prod \mathbb{k}(W_i) \simeq \prod \mathbb{k}(X_i)$ . □

**5.4. Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр.** Всякий гомоморфизм  $\mathbb{k}$ -алгебр

$$\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$$

канонически разлагается в композицию эпиморфизма и вложения:

$$\mathbb{k}[Y] \xrightarrow{\varphi_1^*} \mathbb{k}[Y]/\ker(\varphi^*) = \text{im}(\varphi^*) \xrightarrow{\varphi_2^*} \mathbb{k}[X]. \quad (5-9)$$

Поскольку алгебра  $\mathbb{k}[Y]$  конечно порождена, а алгебра  $\mathbb{k}[X]$  приведена, алгебра

$$\mathbb{k}[Y]/\ker(\varphi^*) = \text{im}(\varphi^*) \subset \mathbb{k}[X]$$

тоже конечно порождена и приведена. Она является координатной алгеброй аффинного алгебраического многообразия  $Z = \text{Spec}_m(\text{im}(\varphi^*)) \simeq V(\ker(\varphi^*)) \subset Y$ . Инъективность гомоморфизма  $\varphi_1^* : \mathbb{k}[Z] \rightarrow \mathbb{k}[X]$  означает отсутствие ненулевых функций  $f \in \mathbb{k}[Z]$ , заноляющихся на  $\varphi_1(X) \subset Z$ , т. е. *всюду плотность* образа  $\varphi_1(X)$  в многообразии  $Z$ . Тем самым,  $Z = \varphi(X) \subset Y$  есть замыкание образа  $\varphi(X)$  в многообразии  $Y$ , вложенное в  $Y$  как замкнутое подмножество  $V(\ker \varphi^*)$  нулей идеала  $\ker \varphi^*$ . Иначе говоря, алгебраическое разложение (5-9) на геометрическом языке означает разложение регулярного морфизма многообразий  $\varphi : X \rightarrow Y$  в композицию регулярного морфизма  $\varphi_1 : X \rightarrow Z$  с плотным образом и регулярного вложения  $\varphi_2 : Z \hookrightarrow Y$  в качестве замкнутого подмногообразия.

**5.4.1. Замкнутые вложения.** Морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  называется *замкнутым вложением*, если его гомоморфизм поднятия  $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$  сюръективен. Это означает, что  $\varphi$  является изоморфизмом между  $X$  и замкнутым подмногообразием  $V(\ker \varphi^*) \subset Y$ . Если замкнутое подмножество  $Z \subset X$  неприводимо, гомоморфизм поднятия  $i^* : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}[Z]$ , отвечающий замкнутому вложению  $i : Z \hookrightarrow X$ , принимает значения в целостном кольце  $\mathbb{k}[Z]$ , которое канонически вложено в своё поле частных  $\mathbb{k}(Z)$ . По универсальному свойству кольца частных эпиморфизм  $i^*$  однозначно продолжается до эпиморфизма  $\text{ev}_Z : \mathbb{k}(X) \twoheadrightarrow \mathbb{k}(Z)$ , который ограничивает рациональные функции с  $X$  на  $Z$  и может интуитивно восприниматься как гомоморфизм вычисления рациональных функций на  $X$  в «в общей точке» неприводимого подмногообразия  $Z \subset X$ , где вычисляемая функция всегда определена, а результат такого вычисления лежит в поле  $\mathbb{k}(Z)$ .

В частности, когда  $Z \subset X$  является неприводимой компонентой приводимого аффинного многообразия  $X$ , из сюръективности гомоморфизма  $\text{ev}_Z : \mathbb{k}(X) \twoheadrightarrow \mathbb{k}(Z)$  вытекает, что всякая

рациональная функция на  $Z$  является ограничением некоторой рациональной функции на  $X$ , т. е. записывается дробью вида  $p/q$ , знаменатель которой  $q \pmod{I(X_i)} \in \mathbb{k}[X_i] = \mathbb{k}[X]/I(X_i)$  представляется не делящим нуль в  $\mathbb{k}[X]$  элементом  $q \in \mathbb{k}[X]$ .

УПРАЖНЕНИЕ 5.20. Укажите такого представителя для функции  $1/x \in \mathbb{k}(\text{Spec}_m \mathbb{k}[x])$  на прямой  $Z = \text{Spec}_m \mathbb{k}[x] = V(y)$  координатного креста  $X = \text{Spec}_m \mathbb{k}[x, y]/(xy)$  на плоскости  $\mathbb{A}^2 = \text{Spec}_m \mathbb{k}[x, y]$ .

**5.4.2. Доминантные морфизмы.** Регулярный морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  неприводимого многообразия  $X$  называется *доминантным*, если гомоморфизм алгебр  $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$  инъективен. Как мы уже видели выше, инъективность гомоморфизма поднятия означает, что  $\overline{\varphi(X)} = Y$ . Если  $X$  приводимо, то морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  называется *доминантным*, если доминантно его ограничение на *каждую* неприводимую компоненту многообразия  $X$ . В этом случае каждое из ограничений  $\varphi_i = \varphi|_{X_i}$  задаёт вложение  $\varphi_i^* : \mathbb{k}[Y] \hookrightarrow \mathbb{k}[X_i] \subset \mathbb{k}(X_i)$  координатной алгебры многообразия  $Y$  в *поле* рациональных функций на  $X_i$ . По универсальному свойству кольца частных такое вложение однозначно продолжается до вложения  $\mathbb{k}(Y) \hookrightarrow \mathbb{k}(X_i)$  кольца рациональных функций на  $Y$ . Поэтому каждый доминантный морфизм  $X \rightarrow Y$  задаёт вложение  $\mathbb{k}(Y) \hookrightarrow \prod \mathbb{k}(X_i) = \mathbb{k}(X)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 5.21. Покажите, что любой доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий  $\varphi : X \rightarrow Y$  является композицией некоторого (не единственного) замкнутого вложения  $\psi : X \hookrightarrow Y \times \mathbb{A}^m$  и проекции  $\pi : Y \times \mathbb{A}^m \rightarrow Y$  вдоль  $\mathbb{A}^m$ .

**5.4.3. Конечные морфизмы.** Морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  называется *конечным*, если алгебра  $\mathbb{k}[X]$  цела над подалгеброй  $\varphi^*(\mathbb{k}[Y]) \subset \mathbb{k}[X]$ . Это означает, что  $\mathbb{k}[X]$  линейно порождается над  $\varphi^*(\mathbb{k}[Y])$  конечным набором функций  $f_1, \dots, f_m$ , т. е. любая функция  $h \in \mathbb{k}[X]$  может быть записана как  $h = \sum \varphi^*(g_i) f_i$  с подходящими  $g_i \in \mathbb{k}[Y]$ .

ЛЕММА 5.3

Любой конечный морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  аффинных алгебраических многообразий переводит каждое замкнутое подмножество  $Z \subset X$  в замкнутое подмножество  $\varphi(Z) \subset Y$ , причём индуцированный морфизм  $\varphi|_Z : Z \rightarrow \varphi(Z)$  тоже конечен. Если  $X$  неприводимо и  $Z \neq X$ , то  $\varphi(Z) \neq Y$ .

Доказательство. обозначим через  $I = I(Z) \subset \mathbb{k}[X]$  идеал замкнутого подмножества  $Z \subset X$ . Ограничение  $\varphi|_Z : Z \rightarrow Y$  отвечает сквозному гомоморфизму алгебр  $f_Z^* : \mathbb{k}[Y] \xrightarrow{\varphi^*} \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}[X]/I$ . Поскольку алгебра  $\mathbb{k}[X]$  конечно порождена как  $\varphi^*(\mathbb{k}[Y])$ -модуль, алгебра  $\mathbb{k}[Z] = \mathbb{k}[X]/I$  тоже конечно порождена как модуль над  $\varphi|_Z^*(\mathbb{k}[Y]) = \varphi^*(\mathbb{k}[Y])/(I \cap \varphi^*(\mathbb{k}[Y]))$ . Тем самым, морфизм  $\overline{\varphi|_Z} : Z \rightarrow Y$  конечен. Индуцированный морфизм  $f|_Z : Z \rightarrow \overline{\varphi(Z)}$  тоже конечен, поскольку  $\mathbb{k}[\overline{\varphi(Z)}] = \overline{\varphi^*(\mathbb{k}[Y])}$ . Поэтому при доказательстве первого утверждения можно считать, что  $Z = X$  и  $Y = \overline{\varphi(X)}$ . Так как равенство  $\varphi(X) = \overline{\varphi(X)}$  достаточно проверить отдельно для каждой неприводимой компоненты многообразия  $X$ , мы можем считать  $X$  неприводимым. Таким образом, достаточно доказать, что каждый конечный доминантный морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  из неприводимого аффинного многообразия  $X$  сюръективен. На алгебраическом языке это означает, что если в расширении алгебр  $\mathbb{k}[Y] \subset \mathbb{k}[X]$  большая алгебра не имеет делителей нуля и линейно порождается над меньшей конечным набором элементов  $f_1, \dots, f_m$ , то каждый максимальный идеал  $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[Y]$  имеет вид  $\tilde{\mathfrak{m}} \cap \mathbb{k}[Y]$  для некоторого максимального идеала  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathbb{k}[X]$ . Если идеал  $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[Y]$ , порождённый  $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[X]$ , является собственным в  $\mathbb{k}[X]$ , то в качестве  $\tilde{\mathfrak{m}}$  можно взять любой максимальный идеал, содержащий  $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[X]$ . Таким образом, достаточно показать, что  $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[X] \neq \mathbb{k}[X]$  ни для какого максимального идеала  $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[Y]$ . Предположим противное:

пусть  $\mathfrak{m} \mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[X]$ . Тогда каждая из образующих  $f_i$ , линейно порождающих  $\mathbb{k}[X]$  над  $\mathbb{k}[Y]$ , запишется в виде  $f_i = \sum_{\nu} f_{\nu} \beta_{\nu i}$  с  $\beta_{\nu i} \in \mathfrak{m}$ . Мы получаем матричное равенство

$$(f_1, \dots, f_m)(E - B) = 0,$$

где  $B = (\beta_{\nu i}) \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathfrak{m})$ , а  $E$  — единичная матрица. Следовательно<sup>1</sup>

$$(f_1, \dots, f_m) \cdot \det(E - B) = (f_1, \dots, f_m)(E - B)(E - B)^{\vee} = 0.$$

Так как в  $\mathbb{k}[Z]$  нет делителей нуля,  $\det(E - B) = 0$ . Раскрывая этот определитель, заключаем, что  $1 \in \mathfrak{m}$ , т. е. идеал  $\mathfrak{m} = \mathbb{k}[Y]$  не является собственным.

Чтобы доказать, что  $\varphi(Z) \neq Y$  при  $Z \subsetneq X$  рассмотрим какую-нибудь ненулевую функцию  $f \in \mathbb{k}[X]$ , тождественно зануляющуюся на  $Z$ . Поскольку она цела над  $\varphi^*(\mathbb{k}[Y])$

$$f^m + \varphi^*(g_1) f^{m-1} + \dots + \varphi^*(g_{m-1}) f + \varphi^*(g_m) = 0$$

для некоторых  $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{k}[Y]$ . Рассмотрим такое соотношение с наименьшим возможным  $m$ . В нём  $g_m \neq 0$ , иначе его можно было бы сократить на  $f$ , ибо в  $\mathbb{k}[X]$  нет делителей нуля. Вычисляя левую часть в точках  $z \in Z$ , видим, что  $\varphi^*(g_m)|_Z = g_m|_{\varphi(Z)} \equiv 0$ . Поэтому  $\varphi(Z) \subset V(g_m) \subsetneq Y$  является собственным замкнутым подмножеством.  $\square$

**5.4.4. Нормальные многообразия.** Аффинное алгебраическое многообразие  $Y$  называется *нормальным*, если оно неприводимо и его координатная алгебра  $\mathbb{k}[Y]$  целозамкнута в поле рациональных функций  $\mathbb{k}(Y) = Q_{\mathbb{k}[Y]}$ , т. е. является *нормальным кольцом* в смысле [опр. 4.2](#) на стр. 61. Например, все аффинные многообразия с факториальными координатными алгебрами, в частности, все аффинные пространства<sup>2</sup>  $\mathbb{A}^n$  нормальны.

Лемма 5.4

Всякий сюръективный конечный морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  в нормальное многообразие  $Y$  открыт<sup>3</sup> и сюръективно отображает каждую неприводимую компоненту  $X$  на  $Y$ .

Доказательство. Вложение  $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \hookrightarrow \mathbb{k}[X]$  позволяет рассматривать  $\mathbb{k}[Y]$  как подалгебру в  $\mathbb{k}[X]$ . Открытость морфизма  $\varphi$  означает, что образ каждого главного открытого множества из  $X$  содержит вместе с каждой точкой какую-нибудь её главную открытую окрестность в  $Y$ , т. е. для любой функции  $f \in \mathbb{k}[X]$  и каждой точки  $p \in X$ , в которой  $f(p) \neq 0$ , мы должны указать такую функцию  $a \in \mathbb{k}[Y]$ , что  $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$ . Для этого рассмотрим отображение

$$\psi = \varphi \times f : X \rightarrow Y \times \mathbb{A}^1, \quad p \mapsto (\varphi(p), f(p)).$$

Его гомоморфизм поднятия  $\psi^* : \mathbb{k}[Y \times \mathbb{A}^1] = \mathbb{k}[Y][t] \rightarrow \mathbb{k}[X]$  вычисляет полиномы от  $t$  с коэффициентами в  $\mathbb{k}[Y]$  на элементе  $f \in \mathbb{k}[X]$ . По [сл. 4.3](#) на стр. 61 минимальный многочлен  $\mu_f$  элемента  $f$  над полем  $\mathbb{k}(Y)$  лежит в  $\mathbb{k}[Y]$ . Поэтому гомоморфизм  $\psi^*$  представляет собою факторизацию по главному идеалу  $(\mu_f) = \ker \psi^*$ . Мы заключаем, что морфизм  $\psi$  конечен и сюръективно отображает  $X$  на гиперповерхность, заданную в  $Y \times \mathbb{A}^1$  уравнением

$$\mu_f(y; t) = t^m + a_1(y) t^{m-1} + \dots + a_m(y) = 0,$$

<sup>1</sup>Ср. с доказательством [лем. 4.2](#) на стр. 58.

<sup>2</sup>Включая точку  $\mathbb{A}^0 = \text{Spec}_m \mathbb{k}$ .

<sup>3</sup>Т. е.  $\varphi(U)$  открыто в  $Y$  для любого открытого  $U \subset X$ .

а морфизм  $\varphi$  является композицией  $\psi$  и проекции  $Y \times \mathbb{A}^1 \rightarrow Y$ . Образ  $\varphi(\mathcal{D}(f)) \subset Y$  состоит из всех таких точек  $y \in Y$ , что у многочлена  $\mu_f(y; t) \in \mathbb{k}[t]$  есть ненулевой корень. Поскольку над точкой  $\varphi(p) \in Y$  многочлен  $\mu_f(\varphi(p); t) \in \mathbb{k}[t]$  имеет ненулевой корень  $t = f(p)$ , хоть один из коэффициентов, пусть это будет  $a_i$ , отличен от нуля в точке  $\varphi(p)$ . Тогда над всеми точками  $q \in \mathcal{D}(a_i) \subset Y$  коэффициент  $a_i(q)$  тоже отличен от нуля, и у многочлена  $\mu_f(q; t) \in \mathbb{k}[t]$  также есть ненулевой корень. Поэтому все такие точки  $q$  лежат в образе множества  $\mathcal{D}(f)$ , а значит,  $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a_i) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$ , как и требовалось.

Что касается ограничения  $\varphi$  на неприводимые компоненты  $X_i \subset X$ , то для каждого  $i$  множество  $U_i = X \setminus \bigcup_{v \neq i} X_v = X_i \setminus \bigcup_{v \neq i} (X_i \cap X_v)$  открыто в  $X$  и плотно в  $X_i$ . Поскольку  $\varphi(U_i)$  открыто, а  $Y$  неприводимо,  $\varphi(U_i)$  плотно в  $Y$ , откуда  $\varphi(X_i) = \overline{\varphi(U_i)} = Y$ .  $\square$

## §6. Алгебраические многообразия

Всюду в этом параграфе мы продолжаем по умолчанию считать, что основное поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто.

**6.1. Определения и примеры.** Алгебраическое многообразие определяется по той же схеме, что и гладкие или аналитические многообразия в дифференциальной геометрии, т. е. как топологическое пространство, каждая точка которого обладает открытой окрестностью, гомеоморфной некой стандартной «локальной модели», и любые две таких модели, происходящие из разных окрестностей, регулярным образом согласованы на пересечении этих окрестностей. В качестве локальных моделей в алгебраической геометрии допускаются *произвольные*<sup>1</sup> аффинные алгебраические многообразия, а регулярная согласованность двух таких моделей на их пересечении означает, что переход от одной модели к другой задаётся рациональными функциями, регулярными на рассматриваемом пересечении. Точные определения таковы.

Алгебраической аффинной картой на топологическом пространстве  $X$  называется гомеоморфизм  $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\cong} U$  какого-нибудь аффинного алгебраического многообразия  $X_U$  с топологией Зарисского на открытое подмножество  $U \subset X$  с индуцированной из  $X$  топологией. Две алгебраические аффинные карты  $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\cong} U$  и  $\varphi_W : X_W \xrightarrow{\cong} W$  на  $X$  называются *совместимыми*, если *гомеоморфизм склейки* между прообразами пересечения  $U \cap W$  в  $X_U$  и  $X_W$

$$\varphi_{WU} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_W^{-1} \circ \varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(U \cap W)} : \varphi_U^{-1}(U \cap W) \xrightarrow{\cong} \varphi_W^{-1}(U \cap W)$$

регулярен в том смысле, что его гомоморфизм поднятия  $\varphi_{WU}^* : f \mapsto f \circ \varphi_{WU}$  является изоморфизмом алгебры рациональных функций на  $X_U$ , регулярных на  $\varphi_U^{-1}(U \cap W)$ , с алгеброй рациональных функций на  $X_W$ , регулярных на  $\varphi_W^{-1}(U \cap W)$ , т. е.

$$\varphi_{WU}^* : \mathbb{k}[\varphi_W^{-1}(U \cap W)] \xrightarrow{\cong} \mathbb{k}[\varphi_U^{-1}(U \cap W)].$$

Открытое покрытие  $X = \bigcup U_\nu$  попарно совместимыми алгебраическими картами называется *алгебраическим атласом* на  $X$ . Два алгебраических атласа называются *эквивалентными*, если их объединение также представляет собой алгебраический атлас. Топологическое пространство  $X$ , с зафиксированным на нём классом эквивалентных алгебраических атласов называется *алгебраическим многообразием*. Алгебраические многообразия, обладающие конечным атласом, называются многообразиями *конечного типа*.

**Пример 6.1 (ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА)**

Проективное пространство  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1})$  с однородными координатами

$$x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$$

обладает алгебраическим атласом из  $(n + 1)$  стандартных аффинных карт

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mid x_i \neq 0\}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Обозначим через  $X_i \simeq \mathbb{A}^n$  аффинное пространство с координатами<sup>2</sup>

$$t_i = (t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}).$$

<sup>1</sup>В том числе не гладкие — такие, как крест  $\text{Spec}_m(\mathbb{k}[x, y]/(xy))$ .

<sup>2</sup>первый индекс  $i$  является номером карты, а сами координаты  $t_{i,\nu}$  в  $i$ -той карте нумеруются вторым индексом  $\nu \neq i, 0 \leq \nu \leq n$

Отображение  $\varphi_i : t_i \mapsto (t_{i,0} : \dots : t_{i,i-1} : 1 : t_{i,i+1} : \dots : t_{i,n})$  задаёт биекцию

$$\varphi_i : X_i \xrightarrow{\simeq} U_i, \quad (6-1)$$

в которой прообразом пересечения  $U_i \cap U_j$  является главное открытое множество  $\mathcal{D}(t_{i,j}) \subset X_i$ .  
Отображение склейки

$$\varphi_{ji} = \varphi_j^{-1} \varphi_i : X_i \supset \mathcal{D}(t_{i,j}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{D}(t_{j,i}) \subset X_j$$

действует по формуле  $t_i \mapsto t_{i,j}^{-1} \cdot t_j$  и устанавливает изоморфизм между аффинными алгебраическими многообразиями

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(t_{i,j}) &= \text{Spec}_m \mathbb{k}[t_{i,j}^{-1}, t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}], \\ \mathcal{D}(t_{j,i}) &= \text{Spec}_m \mathbb{k}[t_{j,i}^{-1}, t_{j,0}, \dots, t_{j,j-1}, t_{j,j+1}, \dots, t_{j,n}]. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.1. Убедитесь в этом.

Поэтому перенос топологии Зарисского с  $X_i \simeq \mathbb{A}^n$  на  $U_i$  при помощи биекции (6-1) определяет согласованные индуцированные топологии на пересечениях  $U_i \cap U_j$  и корректно наделяет  $\mathbb{P}_n$  топологией, в которой все отображения (6-1) являются гомеоморфизмами.

ПРИМЕР 6.2 (ГРАССМАНИАНЫ)

Точками грассманова многообразия  $\text{Gr}(k, m)$  являются  $k$ -мерные векторные подпространства в координатном векторном пространстве  $\mathbb{k}^m$  или, что то же самое, орбиты действия полной линейной группы  $\text{GL}_k(\mathbb{k})$  левыми умножениями на матрицах  $x \in \text{Mat}_{k \times m}(\mathbb{k})$  ранга  $k$ . При этом орбите матрицы  $x$  отвечает линейная оболочка её строк, а подпространству  $W \subset \mathbb{k}^m$  — орбита матрицы, по строкам которой записаны координаты относительно стандартного базиса  $e_1, \dots, e_m$  в  $\mathbb{k}^m$  каких-нибудь  $k$  базисных векторов пространства  $W$ . Грассманиан  $\text{Gr}(k, m)$  покрывается  $\binom{m}{k}$  стандартными аффинными картами  $U_I$ , занумерованными строго возрастающими наборами индексов  $I = (i_1, \dots, i_k)$ , где  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$ . Если обозначить через  $s_I(x) \subset x$  квадратную подматрицу, образованную столбцами с номерами из  $I$ , то карта

$$U_I \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \text{Mat}_{k \times m}(\mathbb{k}) \mid \det s_I(x) \neq 0\}$$

состоит из всех  $k$ -мерных подпространств  $W \subset \mathbb{k}^m$ , которые изоморфно проектируются на  $k$ -мерную координатную плоскость  $E_I$ , натянутую на стандартные базисные векторы  $e_i$  с  $i \in I$ , вдоль дополнительной  $(m - k)$ -мерной координатной плоскости  $E_{\bar{I}}$ , натянутой на остальные базисные векторы  $e_\ell$  с  $\ell \notin I$ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.2. Убедитесь в этом.

Обозначим через  $X_I \simeq \text{Mat}_{k \times (m-k)}(\mathbb{k}) \simeq \mathbb{A}^{k(m-k)}$  аффинное пространство всех матриц из  $k$  строк ширины  $m - k$ , столбцы которых занумерованы индексами  $v \in \bar{I}$  из дополнительного к  $I$  набора  $\bar{I} = \{1, 2, \dots, m\} \setminus I$ . Отображение

$$\varphi_I : X_I \xrightarrow{\simeq} U_I, \quad (6-2)$$

превращающее  $k \times (m - k)$ -матрицу  $t \in X_I$  в  $k \times m$ -матрицу  $\varphi_I(t)$  дописыванием к ней единичной  $k \times k$ -матрицы в столбцы с номерами из  $I$ , биективно, и

$$\varphi_I^{-1}(U_I \cap U_J) = \mathcal{D}(\det s_J(\varphi_I(t))) \subset X_I.$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.3. Убедитесь, что отображение склейки

$$\varphi_{JI} = \varphi_J^{-1} \varphi_I : X_I \supset \mathcal{D}(\det s_J(\varphi_I(t))) \rightarrow \mathcal{D}(\det s_I(\varphi_J(t))) \subset X_J$$

действует по формуле  $t \mapsto s_J^{-1}(s_J^{-1}(\varphi_I(t)) \cdot \varphi_I(t))$  и является изоморфизмом аффинных алгебраических многообразий.

Отсюда мы как и в предыдущем примере [прим. 6.1](#) мы заключаем, что грассманиан  $\text{Gr}(k, n)$  является алгебраическим многообразием конечного типа. При  $k = 1, m = n+1$  эта конструкция превращается в конструкцию из [прим. 6.1](#).

ПРИМЕР 6.3 (ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОГООБРАЗИЙ)

Структура алгебраического многообразия на прямом произведении алгебраических многообразий  $X$  и  $Y$  задаётся атласом, состоящим из всех попарных произведений  $U \times W$  аффинных карт  $U \subset X$  и  $W \subset Y$  на  $X, Y$ .

**6.1.1. Структурный пучок и регулярные морфизмы.** Заданная на открытом подмножестве  $W$  алгебраического многообразия  $X$  функция  $f : U \rightarrow \mathbb{k}$  называется *регулярной* в точке  $x \in U$ , если существуют покрывающая  $x$  аффинная карта  $\varphi_W : X_W \xrightarrow{\simeq} W$  и такая определённая в точке  $\varphi_W^{-1}(x) \in X_W$  рациональная функция  $\tilde{f} \in \mathbb{k}(X_W)$ , что  $\varphi_W^* f(z) = \tilde{f}(z)$  для всех  $z \in \varphi_W^{-1}(U \cap W) \cap \text{Dom } \tilde{f}$ . Регулярные в каждой точке открытого подмножества  $U \subset X$  функции  $U \rightarrow \mathbb{k}$  образуют коммутативное кольцо, которое обозначается  $\mathcal{O}_X(U)$  и называется *кольцом локальных регулярных функций* на  $U$ . Сопоставление  $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$  задаёт пучок  $\mathbb{k}$ -алгебр на топологическом пространстве  $X$ . Он называется *структурным пучком* алгебраического многообразия  $X$ . Отображение алгебраических многообразий  $\varphi : X \rightarrow Y$  называется *регулярным*, если для каждого открытого подмножества  $U \subset Y$  гомоморфизм подъёма  $\varphi^* : \mathbb{k}^U \rightarrow \mathbb{k}^{\varphi^{-1}U}$  переводит локальные регулярные функции на  $U$  в локальные регулярные функции на  $\varphi^{-1}(U)$ , т. е. является гомоморфизмом  $\varphi^* : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.4. Убедитесь, что элементы алгебры  $\mathcal{O}_X(X)$  — это в точности регулярные морфизмы  $X \rightarrow \mathbb{A}^1$ , и для каждой аффинной карты  $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\simeq} U$  гомоморфизм подъёма

$$\varphi_U^* : \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{k}[X_U]$$

отождествляет кольцо локальных регулярных на  $U$  функций с координатной алгеброй аффинного многообразия  $X_U$ .

**6.1.2. Замкнутые подмногообразия.** Всякое замкнутое подмножество  $Z$  алгебраического многообразия  $X$  имеет естественную структуру алгебраического многообразия. А именно, для каждой аффинной карты  $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\simeq} U$  прообраз пересечения  $\varphi_U^{-1}(Z \cap U)$  является замкнутым подмножеством в  $X_U$ , т. е. аффинным алгебраическим многообразием с координатным кольцом

$$\mathbb{k}[X_U]/\varphi_U^* I(Z \cap U) \simeq \mathcal{O}_X(U)/I(Z \cap U),$$

где идеал  $I(Z \cap U) \subset \mathcal{O}_X(U)$  состоит из всех локальных регулярных на  $U$  функций<sup>1</sup>, тождественно зануляющихся на  $Z \cap U$ . Аффинные карты  $\varphi_U^{-1}(Z \cap U) \xrightarrow{\simeq} Z \cap U \subset X_U$  образуют алгебраический атлас на  $Z$ . Сопоставление  $U \mapsto I(Z \cap U)$  является подпучком идеалов в структурном пучке  $\mathbb{k}$ -

<sup>1</sup>Ср. с [упр. 6.4](#).

алгебр  $\mathcal{O}_X$ . Он называется *пучком идеалов* замкнутого подмногообразия  $Z \subset X$  и обозначается  $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_X$ . В этой ситуации пишут  $Z = V(\mathcal{I}_Z)$ .

Регулярный морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  называется *замкнутым вложением*, если  $\varphi(X)$  является замкнутым подмногообразием в  $Y$  и  $\varphi$  задаёт изоморфизм между  $X$  и  $\varphi(X)$ . В частности, алгебраическое многообразие  $X$  тогда и только тогда допускает замкнутое вложение в аффинное пространство, когда оно является аффинным алгебраическим многообразием в смысле п° 4.4 на стр. 64, т. е. является множеством нулей системы полиномиальных уравнений в аффинном пространстве.

**Пример 6.4 (семейства подмногообразий)**

Каждый регулярный морфизм  $\pi : X \rightarrow Y$  может восприниматься как семейство замкнутых подмногообразий  $X_y = \pi^{-1}(y) \subset X$ , параметризованное точками  $y \in Y$ . Если  $\pi : X \rightarrow Y$ ,  $\pi' : X' \rightarrow Y$  — два семейства с одной и той же базой, то регулярный морфизм  $\varphi : X \rightarrow X'$  называется *морфизмом семейств*<sup>1</sup>, если он переводит  $X_y$  в  $X'_y$  для каждого  $y \in Y$ , т. е. если  $\pi = \pi' \circ \varphi$ . Семейство  $\pi : X \rightarrow Y$  называется *постоянным* или *тривиальным*, если оно изоморфно над  $Y$  прямому произведению  $\pi_Y : X_0 \times Y \rightarrow Y$  для некоторого многообразия  $X_0$ .

**6.1.3. Отделимость.** Стандартный атлас на  $\mathbb{P}_1$  состоит из двух карт  $\varphi_i : \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} U_i \subset \mathbb{P}_1$ , где  $i = 0, 1$ . Их пересечение видно внутри каждой из них как дополнение к началу координат:

$$\varphi_0^{-1}(U_0 \cap U_1) = \varphi_1^{-1}(U_0 \cap U_1) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = \{t \in \mathbb{A}^1 \mid t \neq 0\}.$$

Карты склеены по этому пересечению посредством отображения склейки

$$\varphi_{01} : t \mapsto 1/t. \quad (6-3)$$

Если вместо этого отображения воспользоваться тождественным отображением

$$\tilde{\varphi}_{01} : t \mapsto t, \quad (6-4)$$

получится другое многообразие — прямая с «раздвоенной» точкой: ————:—————. Такого рода патология называется *неотделимостью*. Причина её возникновения в том, что правило склейки (6-4) не замкнуто и допускает продолжение с  $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$  на всё  $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ .

В общем случае отделимость формализуется так. Включения  $U_0 \leftrightarrow U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_1$  задают вложение  $U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_0 \times U_1$ , образ которого — пересечение аффинной карты  $U_0 \times U_1 \subset X \times X$  с диагональю  $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ . В рассмотренном выше примере правило (6-3) задаёт вложение  $(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \hookrightarrow \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2$  по формуле  $t \mapsto (t, t^{-1})$  и отождествляет пересечение  $U_0 \cap U_1 \simeq (U_0 \times U_1) \cap \Delta_{\mathbb{P}_1}$  с замкнутым подмножеством  $V(xy - 1) \subset \mathbb{A}^2$ , а правило (6-4) задаёт вложение  $(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$  по формуле  $t \mapsto (t, t)$ , образ которого не замкнут в  $\mathbb{A}^2$  и представляет собою прямую  $V(x - y) \subset \mathbb{A}^2$  без начала координат. Алгебраическое многообразие  $X$  называется *отделимым*, если для любой пары аффинных карт  $U, W$  на  $X$  образ канонического вложения  $U \cap W \hookrightarrow U \times W$  замкнут, или, что то же самое, если диагональ  $\Delta_X \subset X \times X$  замкнута в  $X \times X$ .

Например,  $\mathbb{A}^n$  и  $\mathbb{P}_n$  отделимы, поскольку диагонали в  $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$  и в  $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$  задаются, соответственно, уравнениями  $x_i = y_i$  и  $x_i y_j = x_j y_i$ . Замкнутое подмногообразие  $X \subset Y$  отделимого многообразия  $Y$  тоже отделимо, ибо диагональ в  $X \times X$  является прообразом диагонали в  $Y \times Y$  при вложении  $X \times X \hookrightarrow Y \times Y$ . В частности, всякое аффинное или проективное многообразие отделимо и имеет конечный тип.

<sup>1</sup>Или *морфизмом над  $Y$* .

ПРИМЕР 6.5 (ГРАФИК МОРФИЗМА)

Пусть  $\varphi : X \rightarrow Y$  — регулярный морфизм. Прообраз диагонали  $\Delta \subset Y \times Y$  при индуцированном морфизме  $\varphi \times \text{Id}_Y : X \times Y \rightarrow Y \times Y$ ,  $(x, y) \mapsto (\varphi(x), y)$  называется *графиком* морфизма  $\varphi$  и обозначается  $\Gamma_\varphi = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ . Если  $Y$  отделимо, то график любого морфизма  $X \rightarrow Y$  замкнут в  $X \times Y$ . Например, если  $X$  и  $Y$  аффинны, то график регулярного морфизма  $\varphi$  задаётся в  $X \times Y = \text{Spec}_m(\mathbb{k}[X] \otimes \mathbb{k}[Y])$  системой уравнений  $1 \otimes f = \varphi^*(f) \otimes 1$ , где  $f$  пробегает  $\mathbb{k}[Y]$ , а  $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$  — гомоморфизм подъёма.

**6.1.4. Рациональные отображения.** Регулярный морфизм  $\varphi : U \rightarrow Y$ , определённый на некотором открытом плотном подмножестве  $U$  алгебраического многообразия  $X$ , называется *рациональным отображением* из  $X$  в  $Y$ . Рациональное отображение  $\psi : W \rightarrow Y$ , заданное на открытом множестве  $W \supset U$  и совпадающее с  $\varphi$  на  $U$ , называется *продолжением* рационального отображения  $\varphi : U \rightarrow Y$ . Объединение всех открытых множеств  $W \supset U$ , на которые продолжается  $\varphi$ , называется *областью определения* рационального отображения  $\varphi : X \dashrightarrow Y$ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.5 (квадратичная инволюция Кремоны). Покажите, что правило

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^{-1} : x_1^{-1} : x_2^{-1})$$

задаёт рациональное отображение  $\mathbb{P}_2 \dashrightarrow \mathbb{P}_2$ , определённое всюду, кроме трёх точек, найдите эти точки и опишите образ  $\mathbb{P}_2$ .

Рациональные отображения  $\varphi : X \dashrightarrow Y$  не являются отображениями «из  $X$ » в теоретико-множественном смысле, ибо определены не везде. В частности, композиция рациональных отображений не определена, когда образ первого отображения оказывается целиком вне области определения второго. Тем не менее, рациональные отображения часто возникают и играют важную роль в алгебраической геометрии. Например, естественная проекция  $\mathbb{A}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$ , переводящая точку пространства  $\mathbb{A}(V)$ , представленную вектором  $v \in V$ , в точку пространства  $\mathbb{P}(V)$ , представленную тем же самым вектором  $v$ , является сюръективным рациональным отображением определённым всюду, кроме нуля.

**6.2. Проективные многообразия.** Алгебраическое многообразие  $X$  называется *проективным*, если оно допускает замкнутое вложение в проективное пространство, т. е. изоморфно замкнутому подмногообразию в  $\mathbb{P}_n$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.6. Покажите, что множество решений системы однородных полиномиальных уравнений на однородные координаты пространства  $\mathbb{P}_n$  является замкнутым подмногообразием в  $\mathbb{P}_n$ .

В частности, проективными алгебраическими многообразиями являются грассманианы  $\text{Gr}(k, V)$ , задаваемые квадратичными соотношениями Плюккера в  $\mathbb{P}(\wedge^k V)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.7. Покажите, что прямое произведение проективных многообразий проективно, и выведите из этого, что подмножество в  $\mathbb{P}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{n_m}$ , задаваемое набором однородных по координатам каждого сомножителя полиномиальных уравнений на однородные координаты, является проективным алгебраическим многообразием.

ПРИМЕР 6.6 (РАЗДУТИЕ ТОЧКИ В  $\mathbb{P}_n$ )

Фиксируем точку  $p \in \mathbb{P}_n$  и обозначим через  $E \simeq \mathbb{P}_{n-1}$  пространство всех проходящих через  $p$  прямых в  $\mathbb{P}_n$ . График инцидентности  $\mathcal{B}_p = \{(q, \ell) \in \mathbb{P}_n \times E \mid q \in \ell\}$  называется *раздутием* точки  $p \in \mathbb{P}_n$ . Проекция  $\sigma_p : \mathcal{B}_p \rightarrow \mathbb{P}_n$  биективна всюду над  $\mathbb{P}_n \setminus \{p\}$ , но прообразом самой

точки  $p$  является весь слой  $\sigma_p^{-1}(p) = \{p\} \times E \subset \mathbb{P}_n \times E$ . Он называется *исключительным дивизором*<sup>1</sup>. Вторая проекция  $q_E : \mathcal{B}_p \rightarrow E$  реализует  $\mathcal{B}_p$  как *линейное расслоение* над  $E$ , слой которого над точкой  $q \in E$  — это прямая  $(pq) \subset \mathbb{P}_n$ . Это расслоение называется *тавтологическим* линейным расслоением над  $E$ . Из [упр. 6.7](#) вытекает, что  $\mathcal{B}_p$  является проективным многообразием: выберем однородные координаты на  $\mathbb{P}_n$  так, чтобы  $p = (1 : 0 : \dots : 0)$ , и отождествим  $E$  с гиперплоскостью  $V(x_0) = \{(0 : \lambda_1 : \dots : \lambda_n)\} \subset \mathbb{P}_n$ , сопоставляя прямой  $\ell \ni p$  точку  $\lambda = \ell \cap V(x_0)$ . Тогда коллинеарность точек  $p, q, \lambda$  запишется системой однородных квадратичных уравнений

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ q_0 & q_1 & \dots & q_n \\ 0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = 2, \text{ или } q_i t_j = q_j t_i, \text{ где } 1 \leq i < j \leq n,$$

на  $(q, \lambda) \in \mathbb{P}_n \times E$ . Иначе раздутье точки  $p$  можно представлять себе как результат приклеивания к проделанному в точке  $p$  на  $\mathbb{P}_n$  точечному отверстию проективного пространства  $E$  таким образом, что движение к точке  $p$  вдоль проходящей через  $p$  прямой  $\ell \subset \mathbb{P}_n$  приводит в точку  $\ell \in E$ .

ЛЕММА 6.1

Каждое замкнутое подмногообразие  $X \subset \mathbb{P}_n$  является множеством решений конечной системы полиномиальных уравнений на однородные координаты пространства  $\mathbb{P}_n$ .

Доказательство. В обозначениях из [прим. 6.1](#) на стр. 84 пересечение  $X \cap U_i$  со стандартной открытой картой  $U_i \subset \mathbb{P}_n$  является множеством нулей некоторого идеала  $I_i$  в кольце многочленов от  $n$  переменных  $t_{i,v} = x_v/x_i$ , где  $0 \leq v \leq n$  и  $v \neq i$ . Каждый такой многочлен  $f$  можно переписать как  $\bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)/x_i^d$ , где  $d = \deg f$ , а  $\bar{f} \in \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  — такой однородный многочлен степени  $d$ , что  $\bar{f}(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}) = f(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n})$ . Для каждого  $i$  зафиксируем какое-нибудь конечное множество  $A_i$  образующих  $f_{i,\alpha}$ , где  $\alpha \in A_i$ , идеала  $I_i$  и построим по ним однородные многочлены  $\bar{f}_{i,\alpha} \in \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ . Покажем, что многообразие  $X$  совпадает с множеством  $Z$  решений системы однородных полиномиальных уравнений

$$x_i \bar{f}_{i,\alpha}(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0, \text{ где } 0 \leq i \leq n, \alpha \in A_i.$$

Достаточно для каждого  $i$  установить равенство  $Z \cap U_i = X \cap U_i$ . Поскольку пересечение множества нулей однородного многочлена  $x_i \cdot \bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)$  с картой  $U_i \subset \mathbb{P}_n$  задаётся в аффинных координатах  $t_i$  на  $U_i$  уравнением

$$\bar{f}(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}) = f(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}) = 0,$$

пересечение карты  $U_i$  с множеством общих нулей однородных многочленов  $x_i \bar{f}_{i,\alpha}$ , индекс  $i$  которых равен номеру карты, совпадает с  $X \cap U_i$ . Тем самым,  $Z \cap U_i \subset X \cap U_i$ , и для доказательства равенства остаётся убедиться, что каждый однородный многочлен  $x_j \bar{f}_{j,\beta}$  с  $j \neq i$  тоже зануляется на  $X \cap U_i$ . Но множитель  $x_j$  зануляется на гиперплоскости  $V(t_{i,j}) \subset U_i$ , а множитель  $\bar{f}_{j,\beta}$  зануляется на дополнительном к этой гиперплоскости главном открытом множестве  $\mathcal{D}(t_{i,j}) = X \cap U_i \cap U_j \subset X \cap U_i$ , т. к. последнее содержится в пересечении  $X \cap U_j$ , на котором  $\bar{f}_{j,\beta}$  равен нулю.  $\square$

<sup>1</sup>Вообще, *дивизорами* (Вейля) на алгебраическом многообразии называются элементы свободной абелевой группы, порождённой неприводимыми замкнутыми подмногообразиями коразмерности 1 (размерности алгебраических многообразий обсуждаются в [н° 6.3](#) ниже).

Пример 6.7 (иллюстрация доказательства лем. 6.1)

Проективное многообразие  $X = V(x_0x_1x_2) \subset \mathbb{P}_2$  представляет собою объединение трёх координатных прямых и локально, в стандартных картах  $U_0, U_1, U_2$ , задаётся, соответственно, уравнениями  $t_{0,1}t_{0,2} = 0, t_{1,0}t_{1,2} = 0, t_{2,0}t_{2,1} = 0$ , которым в предыдущем доказательстве отвечают однородные многочлены  $\bar{f}_{0,1} = x_1x_2, \bar{f}_{1,1} = x_0x_2, \bar{f}_{2,1} = x_0x_1$ , а задающее  $X$  глобальное однородное уравнение  $x_0x_1x_2 = 0$  имеет в левой части многочлен

$$x_0x_1x_2 = x_0 \cdot \bar{f}_{0,1} = x_1 \cdot \bar{f}_{1,1} = x_2 \cdot \bar{f}_{2,1}.$$

**6.2.1. Замкнутость проективных морфизмов.** Проективные многообразия занимают в алгебраической геометрии примерно такое же место, как компактные многообразия в дифференциальной геометрии.

Лемма 6.2

Проекция  $\pi : \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$  замкнута, т. е. переводит замкнутые множества в замкнутые.

Доказательство. Зафиксируем однородные координаты  $x$  на  $\mathbb{P}_m$  и аффинные координаты  $t$  в  $\mathbb{A}^n$ . Замкнутое подмножество  $X \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$  задаётся системой однородных по  $x$  полиномиальных уравнений  $f_v(x, t) = 0$ . Его образ  $\pi(X) \subset \mathbb{A}^n$  состоит из всех точек  $p$ , при подстановке которых в эти уравнения вместо  $t$  получается обладающая ненулевым решением система однородных уравнений  $f_v(x, p) = 0$  на  $x$ . Это означает, что полиномиально зависящие от  $p$  коэффициенты форм  $f_v(x, p)$  удовлетворяют системе полиномиальных результирующих уравнений<sup>1</sup>. Таким образом,  $\pi(X)$  задаётся полиномиальными уравнениями.  $\square$

Следствие 6.1

Если многообразие  $X$  проективно, то для любого многообразия  $Y$  проекция  $\pi : X \times Y \rightarrow Y$  замкнута.

Доказательство. Утверждение можно доказывать отдельно для каждой аффинной карты многообразия  $Y$ , т. е. мы можем считать  $Y$  аффинным. Тогда  $X \times Y$  является замкнутым подмногообразием в  $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$ , а проекция  $\pi$  — ограничением замкнутой проекции  $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$  на замкнутое подмножество  $X \times Y \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$ .  $\square$

Следствие 6.2

Если  $X$  проективно, а  $Y$  отделимо, то любой морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  замкнут.

Доказательство. Если  $Y$  отделимо, график  $\Gamma_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, \varphi(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$  отображения  $\varphi$  замкнут в  $X \times Y$ , ибо является прообразом диагонали  $\Delta_Y \subset Y \times Y$  при отображении

$$\varphi \times \text{Id}_Y : X \times Y \rightarrow Y \times Y.$$

Образ  $\varphi(Z) \subset Y$  любого подмножества  $Z \subset X$  совпадает с образом пересечения  $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y) \subset X \times Y$  при проекции  $X \times Y \rightarrow Y$ . Если  $Z$  замкнуто в  $X$ , произведение  $Z \times Y$  замкнуто в  $X \times Y$ . Если  $X$  проективно, проекция  $X \times Y \rightarrow Y$  замкнута и переводит замкнутое множество  $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y) \subset X \times Y$  в замкнутое множество  $\varphi(Z) \subset Y$ .  $\square$

<sup>1</sup>См. п.° 4.5 на стр. 66.

## Следствие 6.3

Любое регулярное отображение из связного проективного многообразия  $X$  в аффинное многообразие постоянно, т. е. отображает всё  $X$  в одну точку. В частности,  $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{k}$ .

Доказательство. Беря композицию такого отображения с координатными функциями на аффинном многообразии, мы заключаем, что достаточно доказать утверждение для любого регулярного морфизма  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{A}^1$ . Композиция  $\varphi$  с последующим вложением  $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$  в качестве стандартной аффинной карты является регулярным не сюръективным отображением  $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Так как его образ замкнут и связан, он состоит из одной точки.  $\square$

## 6.2.2. Конечные проекции. Регулярное отображение алгебраических многообразий

$$\varphi : X \rightarrow Y$$

называется *конечным*, если прообраз  $W = \varphi^{-1}(U)$  любой аффинной карты  $U \subset Y$  является аффинной картой на  $X$ , и ограничение  $\varphi_W : W \rightarrow U$  является конечным морфизмом аффинных многообразий в смысле п° 5.4.3 на стр. 81. Из лем. 5.3 на стр. 81 следует, что каждый конечный морфизм замкнут, и его ограничение на любое замкнутое подмногообразие  $Z \subset X$  также является конечным морфизмом. Более того, если  $X$  неприводимо, то собственные замкнутые подмножества многообразия  $X$  переводятся конечным морфизмом в *собственные* замкнутые подмножества в  $Y$ .

Упражнение 6.8. Проверьте, что композиция конечных морфизмов и ограничение конечного морфизма на замкнутое подмногообразие конечны.

## Предложение 6.1

Проекция проективной гиперповерхности  $V(f) \subsetneq \mathbb{P}^n$ , где  $f \neq \text{const}$ , из любой точки  $p \notin V(f)$  на любую гиперплоскость  $H \not\ni p$  является конечным сюръективным морфизмом.

Доказательство. Выберем на  $\mathbb{P}^n$  однородные координаты  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  так, чтобы  $H = V(x_0)$ , а  $p = (1 : 0 : \dots : 0)$ . Тогда гиперплоскость  $H$  состоит из точек  $(0 : x_1 : \dots : x_n)$ , и можно считать, что аффинная карта  $U \subset H$  состоит из точек  $y = (0 : y_1 : \dots : y_{n-1} : 1)$ . Поскольку  $p \notin V(f)$ , прообраз  $Y = \pi_p^{-1}(U) \subset V(f)$  карты  $U$  высекается из  $V(f)$  проколотым конусом  $C = \bigcup_{y \in U} ((py) \setminus \{p\})$  — объединением аффинных прямых, получающихся выкидыванием точки  $p$  из проективных прямых  $(py) \subset \mathbb{P}^n$ , где  $y \in U$ . Конус  $C$  является аффинным алгебраическим многообразием, изоморфным аффинному пространству  $\mathbb{A}^n = U \times \mathbb{A}^1$ . Изоморфизм переводит точку  $(y, t) \in U \times \mathbb{A}^1$  в точку  $x = tp + y \in \mathbb{P}^n$ . Пересечение  $Y = C \cap V(f)$  задаётся в координатах  $(y, t)$  на  $\mathbb{A}^n$  уравнением

$$g(t, y) = f(tp + y) = \alpha_0(y) t^m + \alpha_1(y) t^{m-1} + \dots + \alpha_m(y) = 0, \quad (6-5)$$

которое получается подстановкой  $x = pt + y$  в уравнение гиперповерхности. Мы заключаем, что прообраз  $Y \subset V(f)$  карты  $U$  является аффинной алгебраической гиперповерхностью с координатной алгеброй  $\mathbb{k}[Y] = \mathbb{k}[y_1, \dots, y_{n-1}, t]/(g)$  и  $\pi_p|_U^* : \mathbb{k}[U] \hookrightarrow \mathbb{k}[Y]$  тавтологически вкладывает  $\mathbb{k}[y_1, \dots, y_{n-1}]$  в  $\mathbb{k}[y_1, \dots, y_{n-1}, t]$ . Чтобы показать, что алгебра  $\mathbb{k}[Y]$  цела над  $\mathbb{k}[U]$ , достаточно убедиться, что порождающий  $\mathbb{k}[Y]$  над  $\mathbb{k}[U]$  элемент  $t$  цел над  $\mathbb{k}[U]$ . Для этого достаточно проверить, что старший коэффициент  $\alpha_0 \in \mathbb{k}[U]$  уравнения (6-5) является ненулевой константой из поля  $\mathbb{k}$  — тогда уравнение (6-5) и будет уравнением целой зависимости. Пусть это не так.

Тогда  $\alpha_0(w) = 0$  для некоторой точки  $w \in U$ , и пересечение гиперповерхности  $X = V(f)$  с проективной прямой  $(pw)$  задаётся в однородных координатах  $(\vartheta_0 : \vartheta_1)$  относительно базиса  $p, w$  этой прямой уравнением  $f(\vartheta_0 p + \vartheta_1 w) = \alpha_0(w) \vartheta_0^m + \alpha_1(w) \vartheta_0^{m-1} \vartheta_1 + \dots + \alpha_m(w) \vartheta_1^m = 0$ , которое получается из уравнения (6-5) подстановкой  $t = \vartheta_0 / \vartheta_1$  и имеет нулевой коэффициент при  $\vartheta_0^m$ , т. е. делится на  $\vartheta_1$ . Поэтому  $p = (1 : 0) \in V(f)$ , что противоречит условию теоремы. Тем самым,  $\pi_p|_U : Y \rightarrow U$  — это конечный доминантный (и, стало быть, сюръективный) морфизм.  $\square$

Следствие 6.4

Проекция любого проективного многообразия  $X \subsetneq \mathbb{P}_n$  из любой точки  $p \notin X$  на любую гиперплоскость  $H \not\ni p$  является конечным морфизмом.

Доказательство. Поскольку ограничение конечного морфизма на замкнутое подмногообразие конечно, достаточно применить предл. 6.1 к гиперповерхности  $\mathbb{P}_n \supseteq V(f) \supseteq X$ , где  $f$  — одно из задающих  $X$  однородных уравнений.  $\square$

Следствие 6.5

Каждое проективное многообразие допускает конечный сюръективный морфизм на проективное пространство.  $\square$

Следствие 6.6

Каждая аффинная гиперповерхность  $V(f) \subsetneq \mathbb{A}^n$ , где  $f \neq \text{const}$ , допускает конечную сюръективную параллельную проекцию на аффинную гиперплоскость  $L \subset \mathbb{A}^n$ .

Доказательство. Вложим  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  в  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{k}e_0 \oplus V)$  в качестве стандартной карты  $U_0$  и обозначим через  $H_\infty = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_n \setminus U_0$  бесконечно удалённую гиперплоскость этой карты, а через  $V(\bar{f}) \subset \mathbb{P}_n$  — проективное замыкание<sup>1</sup> гиперповерхности  $V(f)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.9. Убедитесь, что если  $\emptyset \neq V(f) \neq \mathbb{A}^n$ , то  $\emptyset \neq V(\bar{f}) \neq \mathbb{P}_n$  и  $V(\bar{f}) \cap H_\infty \neq H_\infty$ .

По предл. 6.1 проекция проективной гиперповерхности  $V(\bar{f})$  из любой точки  $p \in H_\infty \setminus V(\bar{f})$  на любую гиперплоскость  $H \not\ni p$  конечна и сюръективна. В аффинной карте  $U_0$  она выглядит как параллельная проекция аффинной гиперповерхности  $V(f) = V(\bar{f}) \setminus H_\infty$  в направлении  $p \in V$  на аффинную гиперплоскость  $L = U_0 \cap H = H \setminus H_\infty$ .  $\square$

ПРИМЕР 6.8 (НОРМАЛИЗАЦИЯ НЁТЕР)

Пусть аффинная гиперповерхность  $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$  задаётся многочленом

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_d \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n],$$

где каждый  $f_k$  однороден степени  $k$  и старшая форма  $f_d \neq 0$  имеет степень  $d \geq 1$ . Замыкание  $\bar{X} = V(\bar{f})$  в проективном пространстве  $\mathbb{P}_n$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ , куда исходное  $\mathbb{A}^n$  вложено в качестве стандартной аффинной карты  $U_0 = \mathcal{D}(x_0)$ , задаётся однородным многочленом

$$\bar{f} = f_0 x_0^d + \dots + f_{d-1} x_0 + f_d.$$

Бесконечно удалённая точка  $p = (0 : p_1 : \dots : p_n)$  не лежит на  $\bar{X}$ , если и только если

$$f_d(p_1, \dots, p_n) \neq 0.$$

<sup>1</sup>См. п.° 1.4.3 на стр. 13.

Если поле  $\mathbb{k}$  бесконечно<sup>1</sup>, то такая точка всегда найдётся. Пусть координаты  $(x_1, \dots, x_n)$  занумерованы так, что  $p = (p_1 : \dots : p_{n-1} : 1)$  и  $f_d(p) \neq 0$ . Тогда проекция  $\pi_p : V(f) \rightarrow V(x_n)$  поверхности  $V(f)$  из  $p$  на гиперплоскость

$$V(x_n) = \{(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \in \mathbb{A}^n \mid (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{A}^{n-1}\} \simeq \mathbb{A}^{n-1} = \text{Spec}_m \mathbb{k}[y_1, \dots, y_{n-1}]$$

выглядит внутри  $\mathbb{A}^n$  как параллельная проекция вдоль вектора  $(p_1, \dots, p_{n-1}, 1)$  и переводит точку  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n$  в точку<sup>2</sup>  $y = (x_1 - p_1 x_n, \dots, x_{n-1} - p_{n-1} x_n, 0)$ . Соответствующий подъём

$$\pi_p^* : \mathbb{k}[y_1, \dots, y_{n-1}] \rightarrow \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/(f), \quad y_i \mapsto x_i - p_i x_n, \quad (6-6)$$

делает алгебру  $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/(f)$  целой над  $\mathbb{k}[y_1, \dots, y_{n-1}]$ , так как  $x_n$  удовлетворяет уравнению  $f(y_1 + p_1 x_n, \dots, y_{n-1} + p_{n-1} x_n, x_n) = 0$  со старшим мономом  $f_d(p_1, \dots, p_{n-1}, 1) x_n^d$ , где  $f_d(p_1, \dots, p_{n-1}, 1) \in \mathbb{k}$  — ненулевая константа в силу выбора точки  $p$ . Мы заключаем, что каждая аффинная гиперповерхность над любым бесконечным полем допускает конечную параллельную проекцию на гиперплоскость. Этот факт известен как *лемма Нётер о нормализации*. Если поле алгебраически замкнуто, проекция  $\pi_p : V(f) \rightarrow V(x_n)$  сюръективна, поскольку для всех  $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \in V(x_n)$  многочлен  $f(y_1 + p_1 x_n, \dots, y_{n-1} + p_{n-1} x_n, x_n) \in \mathbb{k}[x_n]$  отличен от константы и имеет корень в  $\mathbb{k}$ .

Следствие 6.7

Каждое аффинное многообразие  $X$  допускает конечный сюръективный морфизм на аффинное пространство.  $\square$

**6.3. Размерность.** Размерностью алгебраического многообразия  $X$  в точке  $x \in X$  называется максимальное такое  $n \in \mathbb{N}$ , что существует цепочка замкнутых подмногообразий

$$\{x\} = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \dots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n \subseteq X, \quad (6-7)$$

в которой все  $X_i$  неприводимы и все включения кроме самого правого строгие. Размерность многообразия  $X$  в точке  $x \in X$  обозначается  $\dim_x X$ . Если  $X$  неприводимо, то в любой максимальной цепочке вида (6-7) выполняется равенство  $X_n = X$ . Если многообразие  $X$  приводимо, то  $\dim_x X$  равна максимальной из размерностей проходящих через точку  $x$  неприводимых компонент многообразия  $X$ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.10. Покажите, что  $\dim_x X = \dim_x U$  для любой аффинной окрестности  $U$  точки  $x$ .

Предложение 6.2

Для любого конечного морфизма  $\varphi : X \rightarrow Y$  неприводимых алгебраических многообразий в каждой точке  $x \in X$  выполняется неравенство  $\dim_x X \leq \dim_{\varphi(x)} Y$ , и равенство в нём равносильно эпиморфности  $\varphi$ .

Доказательство. В силу упр. 6.10 можно считать  $X$  и  $Y$  аффинными. Каждая цепочка (6-7) в  $X$  по лем. 5.3 на стр. 81 порождает цепочку строго вложенных друг в друга замкнутых неприводимых подмногообразий  $\varphi(X_i)$  в  $Y$ . Отсюда вытекает требуемое неравенство, и при  $\varphi(X) \neq Y$

<sup>1</sup>Причём не обязательно алгебраически замкнуто.

<sup>2</sup>Напомним, что точки  $x \in U_0$ ,  $y \in V(x_n) \subset U_0$  и  $p \in \mathbb{P}_n \setminus U_0$  связаны в  $\mathbb{P}_n$  линейным соотношением  $x = y + pt$ , см. доказательство предл. 6.1.

оно строгое. Если  $\varphi(X) = Y$ , то для любой цепочки  $Y_0 = \{\varphi(x)\} = Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_m = Y$  при каждом  $i$  многообразии  $\varphi^{-1}(Y_i) \subset X$  имеет неприводимую компоненту  $X_i$  сюръективно отображающуюся на  $Y_i$ , и из них составляется цепочка вида (6-7) в  $X$ . Это даёт противоположное неравенство  $\dim_x X \geq \dim_{\varphi(x)} Y$ .  $\square$

Следствие 6.8

Размерность аффинного пространства  $\mathbb{A}^n$  в любой точке  $x \in \mathbb{A}^n$  равна  $n$ .

Доказательство. Неравенство  $\dim_x \mathbb{A}^n \geq n$  выполняется, поскольку в  $\mathbb{A}^n$  имеется цепочка (6-7), образованная проходящими через  $x$  аффинными подпространствами. Противоположное неравенство доказывается по индукции. Очевидно, что  $\dim \mathbb{A}^0 = 0$ . Пусть  $\dim \mathbb{A}^k = k$  для всех  $k < n$ . Поскольку последний отличный от  $\mathbb{A}_n$  элемент  $X_{m-1}$  в любой цепочке подмногообразий

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_{m-1} \subsetneq X_m = \mathbb{A}^n$$

допускает конечную сюръекцию на аффинное подпространство  $\mathbb{A}^k \subset \mathbb{A}^n$  с  $k < n$ , из предл. 6.2 вытекает неравенство  $\dim X_{m-1} < n$ , откуда  $m \leq n$ .  $\square$

Следствие 6.9

Пусть  $X$  — неприводимое аффинное многообразие, и  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{A}^m$  — конечный сюръективный морфизм. Тогда  $\dim_x X = m$  в каждой точке  $x \in X$ , и число  $m$  не зависит от выбора  $\varphi$ .  $\square$

Следствие 6.10

Размерность аффинного неприводимого многообразия  $X$  равна степени трансцендентности<sup>2</sup> алгебры  $\mathbb{k}[X]$  над  $\mathbb{k}$ .

Доказательство. Гомоморфизм подъёма конечной сюръекции  $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}^m$  задаёт целое расширение  $\pi^* : \mathbb{k}[u_1, \dots, u_m] \hookrightarrow \mathbb{k}[X]$ . Следовательно алгебраически независимые функции  $\pi^* u_i$  образуют базис трансцендентности алгебры  $\mathbb{k}[X]$  над  $\mathbb{k}$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 6.11. Докажите, что  $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$  для любых неприводимых многообразий  $X, Y$ .

**6.3.1. Размерности подмногообразий.** Если функция  $f \in \mathbb{k}[X]$  тождественно зануляется на одной из проходящих через точку  $x \in X$  неприводимых компонент размерности  $\dim_x X$  многообразия  $X$ , гиперповерхность  $V(f) \subset X$  имеет в точке  $x$  ту же размерность, что и объемлющее многообразие  $X$ . Такое возможно, только если  $f$  делит нуль в  $\mathbb{k}[X]$ .

Предложение 6.3

Для любой ненулевой регулярной функции  $f \in \mathbb{k}[X]$  на неприводимом аффинном многообразии  $X$  в каждой точке  $p \in V(f)$  выполняется неравенство  $\dim_p V(f) = \dim_p(X) - 1$ .

Доказательство. Случай  $X = \mathbb{A}^n$  уже был разобран в прим. 6.8 на стр. 92. Общий случай сводится к нему при помощи рассуждения, аналогичного использованному в лем. 5.4 на стр. 82. Рассматривая неприводимые компоненты гиперповерхности  $V(f)$  по отдельности, мы можем

<sup>1</sup> Иначе  $Y_i$  окажется объединением конечного числа собственных замкнутых подмножеств — образов неприводимых компонент прообраза  $\varphi^{-1}(Y_i) \subset X$ .

<sup>2</sup> См. опр. 4.3 на стр. 64.

считать  $f \in \mathbb{k}[X]$  неприводимым. Зафиксируем конечную сюръекцию  $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}^m$  и рассмотрим отображение

$$\varphi = \pi \times f : X \rightarrow \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1, \quad x \mapsto (\pi(x), f(x)).$$

В лем. 5.4 мы видели, что оно конечно и сюръективно отображает  $X$  на аффинную гиперповерхность  $V(\mu_f) \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$  — множество нулей минимального многочлена

$$\mu_f(u, t) = t^n + \alpha_1(u)t^{n-1} + \dots + \alpha_n(u) \in \mathbb{k}[u_1, \dots, u_m][t]$$

функции  $f$  над полем  $\mathbb{k}(\mathbb{A}^m)$ . Неприводимая гиперповерхность  $V(f) \subset X$  конечно отображается морфизмом  $\varphi$  на пересечение гиперповерхности  $V(\mu_f)$  с аффинной гиперплоскостью  $V(t)$ , внутри которой это пересечение задаётся уравнением  $\alpha_n(u) = 0$ , т. е. является аффинной гиперповерхностью  $V(\alpha_n) \subset \mathbb{A}^m$  размерности  $m - 1$ . По предл. 6.2  $\dim V(f) = \dim V(\alpha_n) = m - 1 = \dim X - 1$ .  $\square$

Следствие 6.11

На аффинном многообразии  $X$  для любого набора функций  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{k}[X]$  в каждой точке  $p \in V(f_1, \dots, f_m)$  выполняется неравенство  $\dim_p V(f_1, \dots, f_m) \geq \dim_p(X) - m$ . Если при каждом  $i$  класс функции  $f_i$  в факторкольце<sup>1</sup>  $\mathbb{k}[X]/(f_1, \dots, f_{i-1})$  не делит нуль, то неравенство становится равенством.  $\square$

Предостережение 6.1. Ни предл. 6.3, ни сл. 6.11 не утверждают, что гиперповерхность  $V(f)$  или подмногообразие  $V(f_1, \dots, f_m)$  не пусты, и в случае их пустоты предл. 6.3 и сл. 6.11 остаются формально справедливыми. По слабой теореме о нулях пустота  $V(f_1, \dots, f_m)$  означает, что при некотором  $i$  класс  $f_i$  в  $\mathbb{k}[X]/(f_1, \dots, f_{i-1})$  равен ненулевой константе. Такое вполне случается: например,  $V(1) = \emptyset$  на любом многообразии  $X$ , и  $V(x, x + 1) = \emptyset$  на плоскости  $\mathbb{A}^2 = \text{Spec}_m \mathbb{k}[x, y]$ . Это предупреждение относится и к следующему предложению.

Предложение 6.4

Для любых аффинных многообразий  $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}^n$  в каждой точке  $x \in X_1 \cap X_2$  выполняется неравенство  $\dim_x(X_1 \cap X_2) \geq \dim_x(X_1) + \dim_x(X_2) - n$ .

Доказательство. Пусть  $\varphi_1 : X_1 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$  и  $\varphi_2 : X_2 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$  — замкнутые вложения. Тогда  $X_1 \cap X_2$  является прообразом диагонали  $\Delta \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$  при отображении

$$\varphi_1 \times \varphi_2 : X_1 \times X_2 \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n.$$

Внутри  $X_1 \times X_2$  он задаётся  $n$  уравнениями  $(\varphi_1 \times \varphi_2)^* x_i = (\varphi_1 \times \varphi_2)^* y_i$ , которые являются поднятиями линейных уравнений  $x_i = y_i$ , задающих диагональ  $\Delta$  в  $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ . Остаётся применить сл. 6.11.  $\square$

Предложение 6.5

Если размерности неприводимых проективных многообразий  $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$  удовлетворяют неравенству  $\dim(X_1) + \dim(X_2) \geq n$ , то  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ .

<sup>1</sup>Упорядоченный набор функций  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{k}[X]$  с таким свойством называются *регулярной последовательностью*. При  $i = 1$  регулярность означает, что  $f_1$  не делит нуль в  $\mathbb{k}[X]$ .

Доказательство. Для неприводимого проективного многообразия  $Z \subset \mathbb{P}(V)$  обозначим через  $Z' \subset \mathbb{A}(V)$  аффинный конус над  $Z$ , задаваемый теми же самими однородными уравнениями, что и  $Z$ , но только теперь в аффинном пространстве. Он содержит начало координат  $O \in \mathbb{A}^{n+1}$  и имеет размерность  $\dim_O Z' \geq \dim Z + 1$ , так как любая цепочка  $\{z\} \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_m = Z$  в проективном многообразии порождает в аффинном конусе цепочку

$$\{O\} \subsetneq (Oz) \subsetneq Z'_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z'_m = Z',$$

первыми элементами которой служат начало координат  $O$  и прямая  $(O, z)$ . По предл. 6.4 для аффинных конусов  $X'_1, X'_2 \subset \mathbb{A}^{n+1}$  выполняются неравенства

$$\dim_O(X'_1 \cap X'_2) \geq \dim_O(X'_1) + \dim_O(X'_2) - n - 1 \geq \dim_O(X_1) + \dim_O(X_2) - n + 1 \geq 1.$$

Поэтому  $X'_1 \cap X'_2$  не исчерпывается одной только точкой  $O$ .  $\square$

**6.3.2. Размерности слоёв регулярных морфизмов.** В алгебраической геометрии размерность прообраза при регулярном отображении контролируется почти столь же жёстко, как в линейной алгебре.

#### ТЕОРЕМА 6.1

Для любого доминантного морфизма  $\varphi : X \rightarrow Y$  неприводимых алгебраических многообразий в каждой точке  $x \in X$  выполняется неравенство  $\dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geq \dim X - \dim Y$ , причём существует такое плотное открытое подмножество  $U \subset Y$ , что для всех  $y \in U$  и  $x \in \varphi^{-1}(y)$  выполняется равенство  $\dim_x \varphi^{-1}(y) = \dim_x X - \dim_y Y$ .

Доказательство. Беря композицию  $\varphi$  с конечным сюръективным морфизмом какой-нибудь аффинной окрестности точки  $\varphi(x)$  на аффинное пространство  $\mathbb{A}^n$  и заменяя  $X$  прообразом этой окрестности, мы сводим первое утверждение теоремы к случаю

$$Y = \mathbb{A}^n = \text{Spec}_m \mathbb{k}[y_1, \dots, y_n], \quad \varphi(x) = 0.$$

Заменяя  $X$  аффинной окрестностью точки  $x$ , мы можем считать  $X$  аффинным. В этом случае  $\varphi^{-1}(0)$  является непустым пересечением  $n$  гиперповерхностей  $V(\varphi^*(y_i)) \subset X$ , и требуемое неравенство вытекает из сл. 6.11. В доказательстве второго утверждения мы также можем считать оба многообразия аффинными. Более того, по упр. 5.21 на стр. 81 можно считать  $X$  замкнутым подмногообразием в  $Y \times \mathbb{A}^m$ , а морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  ограничением проекции  $\pi : Y \times \mathbb{A}^m \rightarrow Y$ . Если мы покажем, что над некоторым плотным главным открытым подмножеством  $W \subset Y$  подмногообразие  $X_W = X \cap (W \times \mathbb{A}^m)$  допускает конечный морфизм в  $W \times H$ , где  $H \subset \mathbb{A}^m$  — некоторая аффинная гиперплоскость, то в слое над каждой точкой  $w \in W$  ограничение этого морфизма на замкнутое подмногообразие  $X_w = X \cap (\{w\} \times \mathbb{A}^m)$  будет давать конечный морфизм  $X_w \rightarrow \{w\} \times H$ . Заменяя  $Y$  на  $W$  и повторяя процедуру, мы в конце концов получим плотное открытое подмножество  $U \subset Y$  и конечную сюръекцию  $\psi : X_U \rightarrow U \times \mathbb{A}^k$ , которая в над каждой точкой  $u \in U$  будет давать конечную сюръекцию  $\psi_u : X_u \rightarrow \{u\} \times \mathbb{A}^k$ . Таким образом, в каждой точке  $x \in X_u = \varphi^{-1}(u)$  будут выполняться равенства  $\dim_x X_U = \dim_x U + k$  и  $\dim_x X_u = k$ , откуда  $\dim_x X = \dim_u Y + \dim_x \varphi^{-1}(u)$ , что и утверждалось.

При построении конечного морфизма  $X_W \rightarrow W \times H$  можно считать, что  $X = V(f)$  является гиперповерхностью в  $Y \times \mathbb{A}^m$ , задаваемой многочленом

$$f = f_0(x_1, \dots, x_m) + f_1(x_1, \dots, x_m) + \dots + f_d(x_1, \dots, x_m),$$

где каждая форма  $f_k$  имеет коэффициенты в  $\mathbb{k}[Y]$  и однородна степени  $k$  по  $(x_1, \dots, x_m)$ . Также можно считать, что  $d \geq 1$ , иначе уже исходный доминантный морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  является конечной сюръекцией с нульмерными слоями, и доказывать нечего. Над некоторой точкой  $y \in Y$  форма  $f_{d,y}$ , полученная специализацией формы  $f_d$  в эту точку, ненулевая, и в  $\mathbb{A}^m$  можно выбрать такие координаты и направление  $p = (p_1, \dots, p_{m-1}, 1) \in \mathbb{k}^m$ , что  $f_{d,y}(p_1, \dots, p_{m-1}, 1) \neq 0$ . В [прим. 6.8](#) на стр. 92 мы видели, что элемент  $x_m \in \mathbb{k}[X] \simeq \mathbb{k}[Y][x_1, \dots, x_m]/(f)$  удовлетворяет в этой ситуации уравнению

$$f_d(p_1, \dots, p_{m-1}, 1)x_m^d + (\text{члены меньшей степени по } x_m) = 0,$$

и тем самым цел над кольцом дробей  $\mathbb{k}[Y][h^{-1}]$ , где  $h = f_d(p_1, \dots, p_{m-1}, 1) \in \mathbb{k}[Y]$  — ненулевая регулярная функция на  $Y$ , полученная подстановкой  $x = p$  в многочлен  $f_d(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{k}[Y][x_1, \dots, x_m]$ . Главное открытое множество  $W = \mathcal{D}(h) \subset Y$  всюду плотно в неприводимом многообразии  $Y$ , и само является неприводимым аффинным многообразием с координатным кольцом  $\mathbb{k}[Y][h^{-1}]$ . Мы заключаем, что послойная параллельная проекция в направлении  $p$  задаёт конечный морфизм  $X_W \rightarrow W \times H$ , где  $H = V(x_m) \subset \mathbb{A}^m$  — координатная гиперплоскость, что и требовалось.  $\square$

**Следствие 6.12 (теорема о полунепрерывности размерностей слоёв)**

Для любого морфизма алгебраических многообразий  $\varphi : X \rightarrow Y$  и каждого  $k \in \mathbb{Z}$  множество

$$X_k \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \in X \mid \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geq k \}$$

замкнуто в  $X$ .

**Доказательство.** Если  $\dim Y = 0$ , то теорема тривиально верна для всех  $X$  и  $k$ . Пусть теперь  $\dim Y = m$  и для всех  $Y$  меньшей размерности теорема верна для всех  $X$  и  $k$ . Покажем, что она верна для  $Y$ . Можно считать  $X$  и  $Y$  неприводимыми. Если  $k \leq \dim(X) - \dim(Y)$ , то  $X_k = X$  по [теор. 6.1](#). Для  $k > \dim(X) - \dim(Y)$  заменим  $Y$  на  $Y' = Y \setminus U$ , где  $U$  взято из [теор. 6.1](#), а  $X$  — на  $X' = \varphi^{-1}(Y')$ . Тогда  $\dim Y' < \dim Y$ , и множество  $X_k \subset X'$  замкнуто по индуктивному предположению.  $\square$

**Следствие 6.13**

Для любого замкнутого морфизма алгебраических многообразий  $\varphi : X \rightarrow Y$  и каждого  $k \in \mathbb{Z}$  множество  $Y_k \stackrel{\text{def}}{=} \{ y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geq k \}$  замкнуто в  $Y$ .

**Теорема 6.2 (размерностный критерий неприводимости)**

Если замкнутый регулярный морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  сюръективен, а все его слои неприводимы и имеют одинаковые размерности, то неприводимость  $Y$  влечёт неприводимость  $X$ .

**Доказательство.** Пусть  $X = X_1 \cup X_2$ , где  $X_1, X_2$  замкнуты. Положим  $Y_i \stackrel{\text{def}}{=} \{ y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_i \}$ , где  $i = 1, 2$ . Так как каждый слой  $\varphi$ , будучи неприводимым, целиком содержится либо в  $X_1$ , либо в  $X_2$ , мы заключаем, что  $Y = Y_1 \cup Y_2$ , и если  $X_i \neq X$ , то и  $Y_i \neq Y$ . Поскольку множество  $Y_i$  состоит из всех таких точек в  $Y$ , над которыми слой отображения  $\varphi|_{X_i} : X_i \rightarrow Y$  имеет максимальную из достигаемых слоями этого отображения размерностей, множество  $Y_i$  замкнуто по [сл. 6.13](#). Тем самым, приводимость  $X$  влечёт приводимость  $Y$ .  $\square$

**6.4. Размерности проективных многообразий.** Согласно предл. 6.5, каждое  $d$ -мерное неприводимое многообразие  $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  пересекается со всеми проективными подпространствами  $H \subset \mathbb{P}_n$  размерности  $\dim H \geq n - d$ . Покажем, что общее подпространство  $H$  коразмерности  $d + 1$  не пересекается с  $X$ , и тем самым, размерность неприводимого проективного многообразия равна наибольшему такому числу  $d$ , что  $X$  пересекается со всеми проективными подпространствами коразмерности  $d$ .

Проективные подпространства  $H \subset \mathbb{P}(V)$  размерности  $n - d - 1$  являются точками грассманиана  $\text{Gr}(n - d, n + 1) = \text{Gr}(n - d, V)$ . Рассмотрим многообразие инцидентности

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, H) \in X \times \text{Gr}(n - d, V) \mid x \in H\}. \quad (6-8)$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.12. Убедитесь, что  $\Gamma$  является проективным алгебраическим многообразием.

Проекция  $\pi_1 : \Gamma \rightarrow X$  сюръективна, и её слой над каждой точкой  $x$  состоит из всех проходящих через  $x$  проективных подпространств размерности  $n - d - 1$ . Такие подпространства образуют грассманиан  $\text{Gr}(n - d - 1, n) = \text{Gr}(n - d - 1, V/\mathbb{k} \cdot x)$  всех векторных  $(n - d - 1)$ -мерных подпространств в фактор пространстве  $V/\mathbb{k} \cdot x$ . По теор. 6.2 многообразие  $\Gamma$  неприводимо и имеет размерность  $d + (n - d - 1)(d + 1) = (n - d)(d + 1) - 1$ . Образ  $\pi_2(\Gamma) \subset \text{Gr}(n - d, V)$  второй проекции  $\pi_2 : \Gamma \rightarrow \text{Gr}(n - d, V)$  состоит из всех  $(n - d - 1)$ -мерных подпространств, пересекающих  $X$ . Это неприводимое замкнутое подмногообразие размерности, не превышающей  $\dim \Gamma$  и, тем самым, строго меньшей, чем  $\dim \text{Gr}(n - d, V) = (n - d)(d + 1)$ . Поэтому множество не пересекающих  $X$   $(n - d - 1)$ -мерных подпространств содержит в себе открытое по Зарисскому всюду плотное подмножество грассманиана  $\dim \text{Gr}(n - d, V)$ .

Соображения размерности позволяют сказать и больше. Повторяя предыдущее рассуждение для  $(n - d)$ -мерных подпространств  $H'$  вместо  $(n - d - 1)$ -мерных, мы получим неприводимое проективное многообразие

$$\Gamma' \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, H') \in X \times \text{Gr}(n - d + 1, V) \mid x \in H'\}$$

размерности  $\dim X + \dim \text{Gr}(n - d, n) = d + d(n - d) = d(n - d + 1)$ . Так как  $X \cap H' \neq \emptyset$  для всех  $H'$ , проекция  $\pi_2 : \Gamma' \rightarrow \text{Gr}(n - d + 1, V)$  эпиморфна, и её общий слой<sup>1</sup> имеет по теор. 6.1 размерность  $\dim \Gamma - \dim \text{Gr}(n - d + 1, n + 1) = d(n - d + 1) - (n - d + 1)d = 0$ . Это означает, что общее подпространство  $H'$  коразмерности  $d$  пересекает  $X$  по конечному числу точек.

Беря одну из таких плоскостей  $H'$  и проводя внутри неё  $(n - d - 1)$ -мерную плоскость  $H$  через одну из точек пересечения  $p \in X \cap H'$ , мы видим, что  $H \cap X$  конечно и непусто. Это означает, что у проекции  $\pi_2 : \Gamma \rightarrow \text{Gr}(n - d, V)$  первого многообразия инцидентности (6-8) имеется нульмерный слой. Тем самым, минимальная размерность непустого слоя этой проекции нулевая, откуда по теор. 6.1 вытекает, что  $\dim \pi_2(\Gamma) = \dim \Gamma = \dim \text{Gr}(n - d, V) - 1$ , т. е. пересекающиеся с  $X$  подпространства размерности  $n - d - 1$  образуют неприводимую гиперповерхность<sup>2</sup> в грассманиане  $\text{Gr}(n - d, n + 1)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.13. Выведите отсюда, что существует неприводимый многочлен от плюккеровых координат  $(n - d - 1)$ -мерного подпространства в  $\mathbb{P}_n$ , обращение которого в нуль на данном подпространстве  $H$  равносильно тому, что  $H \cap X \neq \emptyset$ .

Проделанные рассуждения иллюстрируют стандартный метод подсчёта размерностей при помощи многообразий инцидентности, часто используемый в геометрии.

<sup>1</sup>Т. е. слой над любой точкой из некоторого плотного открытого подмножества в грассманиане.

<sup>2</sup>Т. е. подмногообразиие коразмерности 1

ПРИМЕР 6.9 (РЕЗУЛЬТАНТ)

Фиксируем  $n + 1$  степеней  $d_0, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$  и обозначим через  $\mathbb{P}_{N_i} = \mathbb{P}(S^{d_i}V^*)$  пространство проективных гиперповерхностей степени  $d_i$  в  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ , как в н° 4.5 на стр. 66. Покажем, что результатное многообразие  $\mathcal{R} = \{(S_0, \dots, S_n) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \mid S_0 \cap \dots \cap S_n \neq \emptyset\}$  системы  $n + 1$  однородных полиномиальных уравнений на  $n + 1$  неизвестных является неприводимой гиперповерхностью в  $\mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$ , т. е. существует единственный с точностью до пропорциональности неприводимый многочлен от коэффициентов уравнений системы, однородный по коэффициентам каждого уравнения, обращение в нуль которого на наборе многочленов  $f_0, \dots, f_n \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  равносильно существованию ненулевого решения у системы полиномиальных уравнений  $f_0 = \dots = f_n = 0$ . Этот многочлен называется *результантом* системы однородных полиномиальных уравнений степеней  $d_0, d_1, \dots, d_n$  на  $n + 1$  переменных. Рассмотрим многообразие инцидентности

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{(S_1, \dots, S_n, p) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \times \mathbb{P}_n \mid p \in S_0 \cap \dots \cap S_n\}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.14. Убедитесь, что  $\Gamma$  является проективным алгебраическим многообразием.

Так как уравнение  $f(p) = 0$  линейно по  $f$ , проходящие через данную точку  $p \in \mathbb{P}_n$  проективные гиперповерхности степени  $d_i$  образуют в  $\mathbb{P}_{N_i}$  гиперплоскость. Поэтому проекция  $\pi_2 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_n$  сюръективна, а все её слои являются произведениями проективных гиперплоскостей и имеют одинаковую размерность  $\sum(N_i - 1) = \sum N_i - n - 1$ . Таким образом,  $\Gamma$  является неприводимым проективным многообразием размерности  $\sum N_i - 1$ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.15. Предъявите  $n + 1$  гиперповерхностей  $S_i \subset \mathbb{P}_n$ , имеющих заданные степени  $d_i$  и ровно одну общую точку.

Упражнение показывает, что у проекции  $\pi_1 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$  есть нульмерный слой. Поэтому общий непустой слой тоже нульмерен, откуда  $\dim \pi_1(\Gamma) = \dim \Gamma$ . Тем самым,  $\pi_1(\Gamma)$  является неприводимой гиперповерхностью в  $\mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.16. Покажите, что всякое неприводимое подмногообразие коразмерности 1 в произведении проективных пространств задаётся неприводимым многочленом от однородных координат, однородным по координатам каждого из проективных пространств.

ПРИМЕР 6.10 (ПРЯМЫЕ НА ПОВЕРХНОСТЯХ В  $\mathbb{P}_3$ )

Пространство  $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^dV^*)$  поверхностей степени  $d$  в  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$  имеет размерность

$$N = \frac{1}{6}(d+1)(d+2)(d+3) - 1.$$

Прямые в  $\mathbb{P}_3$  составляют грассманиан  $\text{Gr}(2, 4) = \text{Gr}(2, V)$ , который мы отождествим с квадратикой Плюккера  $P \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2V)$ . Рассмотрим многообразие инцидентности

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{(S, \ell) \in \mathbb{P}_N \times P \mid \ell \subset S\} \subset \mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_5.$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.17. Докажите, что  $\Gamma$  является замкнутым подмногообразием в  $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_5$ .

Покажем, что проекция  $\pi_2 : \Gamma \rightarrow Q_P$  сюръективна и все её слои являются проективными пространствами одинаковой размерности. Прямая  $\ell$ , заданная уравнениями  $x_2 = x_3 = 0$ , лежит на поверхности  $V(f)$  если и только если  $f = x_2g + x_3h$  лежит в образе линейного отображения

$$\psi : S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^* \rightarrow S^dV^*, (g, h) \mapsto x_2g + x_3h,$$

который изоморфен фактору пространства  $S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^*$  размерности  $\frac{1}{3}d(d+1)(d+2)$  по подпространству  $\ker \psi = \{(g, h) = (x_3q, -x_2q) \mid q \in S^{d-2}V^*\}$  размерности  $\frac{1}{6}(d-1)d(d+1)$ . Поэтому содержащие  $\ell$  поверхности составляют проективное пространство размерности

$$\frac{1}{6} \left( 2d(d+1)(d+2) - (d-1)d(d+1) \right) - 1 = \frac{1}{6}d(d+1)(d+5) - 1.$$

Мы заключаем, что  $\Gamma$  является неприводимым проективным многообразием размерности

$$\dim \Gamma = \frac{1}{6}d(d+1)(d+5) + 3.$$

Проекция  $\pi_1(\Gamma) \subset \mathbb{P}_N$  представляет собою множество поверхностей, содержащих хотя бы одну прямую. Из сл. 6.2 на стр. 90 вытекает, что это замкнутое неприводимое подмногообразие в  $\mathbb{P}_N$ , размерность которого равна разности  $\dim \Gamma$  и минимальной из размерностей непустых слоёв проекции  $\pi_1$ . Поскольку  $\dim \mathbb{P}_N - \dim \Gamma = \frac{1}{6}((d+1)(d+2)(d+3) - d(d+1)(d+5)) - 4 = d - 3$ , мы заключаем, что при  $d \geq 4$  образ  $\pi_1(\Gamma) \subset \mathbb{P}_N$  заведомо является собственным подмногообразием. Поэтому общая<sup>1</sup> поверхность степени  $d \geq 4$  в  $\mathbb{P}_3$  не содержит прямых.

УПРАЖНЕНИЕ 6.18. Убедитесь, что на проективном замыкании аффинной кубической поверхности  $xyz = 1$  лежат ровно три прямых.

Упражнение показывает, что при  $d = 3$  у проекции  $\pi_1 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_N$  есть непустой нульмерный слой. Следовательно,  $\dim \pi_1(\Gamma) = \dim \Gamma = N$ , и из неприводимости  $\pi_1(\Gamma)$  вытекает равенство  $\pi_1(\Gamma) = \mathbb{P}_N$ . Таким образом, на каждой кубической поверхности в  $\mathbb{P}_3$  лежит хотя бы одна прямая, причём на общей кубической поверхности лежит конечное число прямых.

УПРАЖНЕНИЕ 6.19. Опишите все слои проекции  $\pi_1 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_N$  для  $d = 2$ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.20. Найдите все прямые на кубике Ферма  $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ .

**6.5. Отступление: 27 прямых на гладкой кубической поверхности.** Рассмотрим гладкую<sup>2</sup> кубическую поверхность  $S = V(F) \subset \mathbb{P}_3$ .

ЛЕММА 6.3

Приводимое плоское сечение поверхности  $S$  является либо объединением прямой и гладкой коники, либо объединением трёх различных прямых.

Доказательство. Предложение утверждает, что никакое плоское сечение  $\pi \cap V(F)$  не содержит двойной прямой. Допустим, что такая двойная прямая  $\ell \subset \pi \cap S$  имеется. Выберем координаты так, чтобы плоскость  $\pi$  имела уравнение  $x_2 = 0$ , а прямая  $\ell$  — уравнения  $x_2 = x_3 = 0$ . Тогда  $F = x_2Q + x_3^2L$  с линейным  $L$  и квадратичным  $Q$ . Обозначим через  $a$  одну из точек пересечения прямой  $\ell$  с квадрикой  $V(Q)$ . Тогда  $x_2(a) = x_3(a) = Q(a) = 0$  и все частные производные  $\partial F / \partial x_i$  равны нулю в точке  $a$ , т. е. кубика  $S$  особа в точке  $a$ .  $\square$

Следствие 6.14

В одной точке поверхности  $S$  может пересекаться не более трёх лежащих на  $S$  прямых, и такие прямые лежат в одной плоскости.

<sup>1</sup>Т. е. принадлежащей некоторому плотному по Зарисскому открытому подмножеству в пространстве всех гиперповерхностей.

<sup>2</sup>См. п. 1.5 на стр. 16.

Доказательство. Все лежащие на  $S$  прямые, проходящие через точку  $p \in S$ , содержатся в пересечении  $S \cap T_p S$  поверхности  $S$  с её касательной плоскостью  $T_p S$  в точке  $p$ .  $\square$

ЛЕММА 6.4

Для каждой прямой  $\ell \subset S$  существуют ровно 5 различных плоскостей  $\pi_1, \dots, \pi_5$ , содержащих  $\ell$  и пересекающих  $S$  по тройке прямых  $\pi_i \cap S = \ell \cup \ell_i \cup \ell'_i$ . При этом  $\ell_i \cap \ell_j = \ell'_i \cap \ell'_j = \emptyset$  для всех  $i \neq j$ , и любая лежащая на  $S$  и не пересекающая  $\ell$  прямая при каждом  $i$  пересекает ровно одну из двух прямых  $\ell_i, \ell'_i$ .

Доказательство. Рассмотрим такой базис  $e_0, e_1, e_2, e_3 \in V$ , что прямая  $\ell = (e_0 e_1)$  задаётся уравнениями  $x_2 = x_3 = 0$ . Тогда задающий поверхность  $S$  многочлен  $F$  имеет вид

$$L_{00}(x_2, x_3) \cdot x_0^2 + 2L_{01}(x_2, x_3) \cdot x_0 x_1 + L_{11}(x_2, x_3) \cdot x_1^2 + \\ + 2Q_0(x_2, x_3) \cdot x_0 + 2Q_1(x_2, x_3) \cdot x_1 + R(x_2, x_3) = 0, \quad (6-9)$$

где  $L_{ij}, Q_1, R \in \mathbb{k}[x_2, x_3]$  являются однородными многочленами степеней 1, 2, 3 соответственно. Каждая содержащая прямую  $\ell$  плоскость пересекает прямую  $(e_2 e_3)$  в единственной точке  $e_\vartheta = \vartheta_2 e_2 + \vartheta_3 e_3$ . Обозначим такую плоскость через  $\pi_\vartheta = (e_0 e_1 e_\vartheta)$  и будем использовать однородную координату  $\vartheta = (\vartheta_2 : \vartheta_3) \in \mathbb{P}_1$  точки  $e_\vartheta$  относительно базиса  $e_2, e_3$  в качестве параметра в пучке плоскостей, проходящих через прямую  $\ell$ . Обозначим через  $(t_0 : t_1 : t_2)$  однородные координаты в плоскости  $\pi_\vartheta$  относительно базиса  $e_0, e_1, e_\vartheta$ . Прямая  $\ell \subset \pi_\vartheta$  задаётся в этих координатах уравнением  $t_2 = 0$ , а уравнение плоской коники  $(\pi_\vartheta \cap S) \setminus \ell$  получается из уравнения (6-9) подстановкой  $x = (t_0 : t_1 : \vartheta_2 t_2 : \vartheta_3 t_2)$  и сокращением общего множителя  $t_2$  в левой части. Таким образом, матрица Грама этой коники равна

$$G = \begin{pmatrix} L_{00}(\vartheta) & L_{01}(\vartheta) & Q_0(\vartheta) \\ L_{01}(\vartheta) & L_{11}(\vartheta) & Q_1(\vartheta) \\ Q_0(\vartheta) & Q_1(\vartheta) & R(\vartheta) \end{pmatrix}$$

а её определитель  $D(\vartheta) = \det G$  является однородным многочленом степени 5 от  $\vartheta$

$$D(\vartheta) = L_{00}(\vartheta)L_{11}(\vartheta)R(\vartheta) + 2L_{01}(\vartheta)Q_0(\vartheta)Q_1(\vartheta) - \\ - L_{11}(\vartheta)Q_0^2(\vartheta) - L_{00}(\vartheta)Q_1^2(\vartheta) - L_{01}(\vartheta)^2 R(\vartheta) \in \mathbb{k}[\vartheta_2, \vartheta_3]. \quad (6-10)$$

Он обращается в нуль в пяти точках  $\vartheta \in \mathbb{P}_1$ , учтённых с кратностями. Мы должны показать, что все эти кратности равны единице. Каждый нуль детерминанта (6-10) соответствует вырождению коники в пару прямых. Точка пересечения этих прямых либо лежит на  $\ell$ , либо нет.

В первом случае выберем базис так, чтобы этими двумя прямыми были прямые  $\ell' = (e_0 e_2)$  и  $\ell'' = (e_0 (e_1 + e_2))$ , которые задаются уравнениями  $x_3 = x_1 = 0$  и  $x_3 = (x_1 - x_2) = 0$ . Тогда вырождение происходит при  $\vartheta = (1 : 0)$ , и кратность этого корня равна наибольшей степени  $\vartheta_3$ , на которую делится  $D(\vartheta_2, \vartheta_3)$ . Так как  $\ell, \ell', \ell'' \subset S$ , уравнение (6-9) имеет вид

$$x_1 x_2 (x_1 - x_2) + x_3 q = 0$$

для некоторого квадратичного многочлена  $q$ . Не делящимися на  $\vartheta_3$  элементами матрицы  $G$  могут быть лишь  $L_{11} \equiv x_2 \pmod{\vartheta_3}$  и  $Q_1 \equiv -x_2^2/2 \pmod{\vartheta_3}$ , при условии, что мономы  $x_1 x_2^2$  и  $x_0^2 x_2$  входят в (6-9) с ненулевыми коэффициентами, и это действительно так, поскольку моном  $x_1 x_2^2$

является единственным, дающим ненулевой вклад в частные производные от  $F$  в точке  $e_2 \in S$ , а моном  $x_0^2 x_2$  — единственным с ненулевым вкладом в частные производные от  $F$  в точке  $e_0 \in S$ . Таким образом,  $D(\vartheta_2, \vartheta_3) \equiv -L_{00} Q_1^2 \equiv \vartheta_3 \pmod{\vartheta_3^2}$  имеет по  $\vartheta_3$  порядок 1.

Во втором случае выберем базис так, чтобы  $\ell' = (e_0 e_2)$ ,  $\ell'' = (e_1 e_2)$  задавались уравнениями  $x_3 = x_1 = 0$  и  $x_3 = x_0 = 0$ . Это вырождение также происходит при  $\vartheta = (1 : 0)$ , а уравнение (6-9) имеет вид  $x_0 x_1 x_2 + x_3 q = 0$ . Не делящимся на  $\vartheta_3$  элементом матрицы  $G$  является лишь  $L_{01} \equiv x_2/2 \pmod{\vartheta_3}$ , и определитель  $D(\vartheta_2, \vartheta_3) \equiv -L_{01}^2 R \equiv \vartheta_3 \pmod{\vartheta_3^2}$  тоже имеет по  $\vartheta_3$  порядок 1. Оставшиеся утверждения о пересечениях прямых вытекают из сл. 6.14, лем. 6.3 и того, что каждая прямая в  $\mathbb{P}_3$  пересекает любую плоскость.  $\square$

Следствие 6.15

Любая гладкая кубическая поверхность содержит не пересекающиеся прямые.  $\square$

Лемма 6.5

Ни через какие четыре лежащие на поверхности  $S$  попарно не пересекающиеся прямые нельзя провести квадрику. В частности, для любой такой четвёрки прямых существует по крайней мере одна, но не более двух лежащих на  $S$  прямых, пересекающих каждую прямую четвёрки.

Доказательство. Если через данные четыре попарно непересекающиеся лежащие на  $S$  прямые проходит квадрика  $Q$ , то это гладкая квадрика Сегре<sup>1</sup>, заметаемая двумя семействами прямых, и все четыре данные прямые лежат в одном из этих двух семейств. Поскольку каждая прямая другого семейства пересекает все четыре данные прямые, она лежит на кубической поверхности  $S$ . Тем самым,  $Q \subset S$ , т. е. поверхность  $S$  приводима, а значит, особа.  $\square$

ТЕОРЕМА 6.3

Каждая гладкая кубическая поверхность  $S \subset \mathbb{P}_3$  содержит ровно 27 прямых, причём матрица их попарных пересечений<sup>2</sup> с точностью до нумерации прямых не зависит от поверхности.

Доказательство. Зафиксируем пару скрещивающихся прямых  $a, b \subset S$  и построим 5 пар прямых  $\ell_i, \ell'_i$ , расположенных в проходящих через прямую  $a$  плоскостях согласно лем. 6.4, причём в каждой паре обозначим через  $\ell_i$  ту прямую, которая пересекается с  $b$ , а через  $\ell'_i$  — ту, что не пересекается. Далее, обозначим через  $\ell''_i$  ещё 5 прямых, образующих вместе с прямыми  $\ell_i$  пять пар прямых, расположенных согласно лем. 6.4 в плоскостях проходящих через прямую  $b$ . Таким образом, каждая из прямых  $\ell''_i$  не пересекается ни с  $a$ , ни с прямыми  $\ell_j$ , у которых  $j \neq i$ , но пересекается с  $b$  и со всеми прямыми  $\ell'_j$ , у которых  $j \neq i$ .

Любая прямая  $c \subset S$ , отличная от 17 перечисленных, не пересекает ни  $a$ , ни  $b$ , но при каждом  $i$  пересекает ровно одну из двух прямых  $\ell_i, \ell'_i$ . Из лем. 6.5 вытекает, что все лежащие на  $S$  прямые, пересекающие не менее четырёх прямых  $\ell_i$ , исчерпываются парой прямых  $a, b$ . С другой стороны, если лежащая на  $S$  прямая  $c$  пересекает не более двух прямых  $\ell_i$ , то с точностью до перестановки индексов, она пересекается с тремя прямыми  $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3$  и ещё либо с прямой  $\ell'_4$ , либо с прямой  $\ell_5$ . В обоих случаях по лем. 6.5 прямая  $c$  это одна из двух прямых  $a, \ell''_5$ .

Таким образом, каждая прямая  $c \subset S$ , отличная от 17 прямых  $a, b, \ell_i, \ell'_i, \ell''_i$ , пересекается в точности с тремя прямыми  $\ell_i$ . Покажем, что на поверхности  $S$  есть ровно 10 таких прямых, и

<sup>1</sup>См. форм. (2-11) на стр. 28.

<sup>2</sup>Т. е. симметричная матрица размера  $27 \times 27$ , в позиции  $ij$  которой стоит нуль, если  $\ell_i \cap \ell_j = \emptyset$ , и единица, если  $\ell_i \cap \ell_j \neq \emptyset$ . При перенумерации прямых эта матрица сопрягается матрицей перестановки номеров.

они биективно соответствуют  $\binom{5}{3} = 10$  тройкам  $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Для каждой тройки прямых  $\ell_i$  имеется самое большее одна отличная от  $a$  прямая  $c$ , пересекающая все прямые из тройки и оставшиеся две прямые  $\ell'_j$ . С другой стороны, по лем. 6.4 для каждого  $i$  на  $S$  лежит ровно 10 прямых, пересекающих прямую  $\ell_i$ . В их число входят 4 прямые  $a, b, \ell'_i, \ell''_i$ , а оставшиеся 6 должны, как мы знаем, пересекать ещё ровно две из оставшихся четырёх прямых  $\ell_j$ . Поскольку таких пар и имеется ровно  $\binom{4}{2} = 6$ , мы получаем нужную биекцию между прямыми  $c$  и тройками  $(i, j, k)$ .  $\square$

Упражнение 6.21. Поле  $\mathbb{F}_4 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1)$  является квадратичным расширением поля  $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2)$  и обладает автоморфизмом Фробениуса  $z \mapsto \bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} z^2$ , тождественным на  $\mathbb{F}_2$  и переводящим корни многочлена<sup>1</sup>  $x^2 + x + 1$  друг в друга. Обозначим через  $\text{PU}_4(\mathbb{F}_4)$  фактор унитарной группы  $\text{U}_4(\mathbb{F}_4) = \{M \in \text{Mat}_4(\mathbb{F}_4) \mid \overline{MM^t} = E\}$  по подгруппе скалярных унитарных матриц, а через  $G \subset S_{27}$  — группу всех сохраняющих матрицу инцидентности перестановок прямых, лежащих на гладкой кубической поверхности  $S$ . Покажите, что  $\text{PU}_4(\mathbb{F}_4)$  является подгруппой индекса 2 в  $G$ , и найдите порядок группы  $G$ .

<sup>1</sup>Расширение  $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_4$  аналогично расширению  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2 + x + 1)$ , и автоморфизм Фробениуса служит аналогом комплексного сопряжения.

### Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Ответ:  $\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n}$ , т. е. число решений уравнения  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$  в неотрицательных целых числах  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Упр. 1.3. В правой части стоит геометрическая прогрессия  $q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1$ , а слева — количество ненулевых векторов в  $(n + 1)$ -мерном пространстве, делённое на количество ненулевых векторов в одномерном пространстве, т. е.  $(q^{n+1} - 1)/(q - 1)$ .

Упр. 1.4. Это очевидно из подобия прямоугольных треугольников на рис. 1.2 на стр. 5, а также из соотношения  $(s : 1) = (x_0 : x_1) = (1 : t)$ .

Упр. 1.5. В качестве точек  $q$  и  $r$ , задающих такую прямую, можно взять компоненты  $u, w$  разложения любого вектора  $v \in V$ , отвечающего точке  $p \in \mathbb{P}(V)$ . Наоборот, если  $v$  лежит в двумерном векторном подпространстве с базисом  $u, w$ , где  $u \in U$  и  $w \in W$ , то компоненты разложения вектора  $v$  по  $U$  и  $W$  пропорциональны  $u$  и  $w$  в силу единственности такого разложения.

Упр. 1.7. Пусть  $L_1 = \mathbb{P}(U)$ ,  $L_2 = \mathbb{P}(W)$ ,  $p = \mathbb{P}(\mathbb{k} \cdot e)$ . Поскольку  $p \notin L_2$ ,  $V = W \oplus \mathbb{k} \cdot e$ . Центральная проекция из  $p$  индуцирована линейной проекцией  $V$  на  $W$  вдоль  $\mathbb{k} \cdot e$ . Так как  $p \notin L_1$ , ограничение этой проекции на подпространство  $U$  имеет нулевое ядро и, стало быть, является линейным изоморфизмом.

Упр. 1.8. Биjectивность очевидна. Докажем линейность. Пусть прямая  $\ell \subset \mathbb{P}_2$  аннулируется линейной формой  $\xi \in \mathbb{P}_2^\times$ , и  $a, b \in L$  — две различные точки. Точка  $\ell \cap L = (ab) \cap \text{Ann } \xi = \xi(b) \cdot a - \xi(a) \cdot b$  линейно зависит от  $\xi$ .

Упр. 1.9. Пусть  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$  и дробно линейные автоморфизмы

$$\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \quad \text{и} \quad \varphi_q : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$$

таковы, что прообразами точек  $\infty, 0, 1$  являются, соответственно,  $p_1, p_2, p_3$  и  $q_1, q_2, q_3$ . Тогда  $\varphi_p(p_4) = \varphi_q(q_4)$  и  $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$  переводит  $p_1, p_2, p_3, p_4$  в  $q_1, q_2, q_3, q_4$ . Наоборот, если  $\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$  переводит  $p_1, p_2, p_3$  в  $\infty, 0, 1$ , а  $\varphi_q$  переводит  $q_1, q_2, q_3, q_4$  в  $\infty, 0, 1, [p_1, p_2, p_3, p_4]$ , то  $\varphi_p \circ \varphi_q^{-1}$  переводит  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , соответственно, в  $\infty, 0, 1, [p_1, p_2, p_3, p_4]$ , откуда

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4].$$

Упр. 1.11. Если поле  $\mathbb{k}$  конечно и состоит из  $q$  элементов, пространство функций  $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$  тоже конечно и состоит из  $q^{\dim V}$  элементов. Так как алгебра многочленов бесконечна, гомоморфизм из алгебры многочленов в алгебру функций имеет ненулевое ядро. Его сюръективность следует из того, что для любого конечного набора точек существует многочлен, принимающий в этих точках любые наперёд заданные значения. Над бесконечным полем  $\mathbb{k}$  инъективность гомоморфизма алгебры многочленов  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  в алгебру функций  $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$  доказывается индукцией по  $n = \dim V$ . Так как ненулевой многочлен  $f(x)$  от одной переменной не может иметь  $\geq \deg f$  корней, тождественно нулевая на бесконечном множестве  $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}(\mathbb{k})$  функция может получиться только из нулевого многочлена. Многочлен от  $n$  переменных является много-

членом от  $x_n$  с коэффициентами из  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_{n-1}]$ :  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{v=0}^d \varphi_v(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n^{d-v}$ .

Вычисляя коэффициенты  $\varphi_v$  в произвольной точке  $(p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{k}^{n-1}$ , мы получаем многочлен от  $x_n$  с постоянными коэффициентами, задающий тождественно нулевую функцию на

прямой  $(x_1, \dots, x_{n-1}) = (p_1, \dots, p_{n-1})$ , и потому нулевой. Тем самым, все многочлены  $\varphi_v$  являются тождественно нулевыми функциями на  $\mathbb{A}^{n-1}$ . По предположению индукции, они являются нулевыми многочленами.

Упр. 1.14. Это следует из определения производной и равенства

$$f(w + tu) = \tilde{f}(w + tu, \dots, w + tu) = f(w) + t \cdot n\tilde{f}(u, w^{n-1}) + \text{члены делящиеся на } t^2.$$

Упр. 1.15. В силу полилинейности и симметричности формы  $\tilde{f}$

$$f(v_1 + \dots + v_n) = \underbrace{\tilde{f}(v_1 + \dots + v_n, \dots, v_1 + \dots + v_n)}_{n \text{ раз}} = \sum_{m_1, \dots, m_n} \frac{n!}{m_1! \dots m_n!} \tilde{f}(v_1^{m_1}, \dots, v_n^{m_n}),$$

где суммирование идёт по всем наборам целых чисел  $m_1, \dots, m_n$ , в которых  $0 \leq m_i \leq n$  при каждом  $i$  и  $m_1 + \dots + m_n = n$ . В правой части имеется ровно одно слагаемое, зависящее от всех  $n$  аргументов  $v_1, \dots, v_n$ , а именно,  $n! \tilde{f}(v_1, \dots, v_n)$ . Для каждого собственного подмножества  $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$  не зависящие от векторов  $v_i$  с  $i \in I$  слагаемые входят в правую часть с тем же самым коэффициентом, что и в разложение для  $f(\sum_{i \notin I} v_i)$ , которое получается из разложения для  $f(v_1 + \dots + v_n)$  подстановкой  $v_i = 0$  для всех  $i \in I$ . Таким образом, все слагаемые, не содержащие хотя бы один из векторов  $v_i$ , могут быть удалены из правой части при помощи стандартной процедуры включения-исключения, что и даёт заявленную формулу

$$n! \cdot \tilde{f}(v_1, \dots, v_n) = f\left(\sum_v v_v\right) - \sum_{\{i\}} f\left(\sum_{v \neq i} v_v\right) + \sum_{\{i,j\}} f\left(\sum_{v \neq i,j} v_v\right) - \sum_{\{i,j,k\}} f\left(\sum_{v \neq i,j,k} v_v\right) + \dots$$

Упр. 1.16. Если  $g(x) = \tilde{f}(q^{n-k}, x^k)$ , то  $\tilde{g}(q^{k-m}, x^m) = \tilde{f}(q^{n-m}, x^m)$  при всех  $m < k$ .

Упр. 2.2. Для нульмерной квадрики на  $\mathbb{P}_1$  утверждение очевидно. Пусть при  $n \geq 2$  квадратика  $Q \subset \mathbb{P}_n$  содержится в гиперплоскости  $H \subset \mathbb{P}_n$  и имеет гладкую точку  $a \in Q$ . Тогда каждая проходящая через  $a$  и не содержащаяся в  $H$  прямая пересекает  $Q$  ровно в одной точке  $a$ , т. е. лежит в  $T_p Q$ . Поэтому  $\mathbb{P}_n = H \cup T_p Q$ . Если  $H = V(\xi)$ ,  $T_p Q = V(\eta)$  для каких-то ненулевых ковекторов  $\xi, \eta \in V^*$ , то квадратичная форма  $q(v) = \xi(v)\eta(v)$  тождественно зануляется на векторном пространстве  $V$ . Но тогда и оба сомножителя  $\xi, \eta$  должны быть нулевыми. Противоречие.

Упр. 2.5. Особая квадратика в  $\mathbb{P}_3$  это либо двойная плоскость (квадратика ранга 1), либо пара различных пересекающихся плоскостей (линейное соединение особой прямой с гладкой пустой квадратикой на дополнительной прямой), либо двойная прямая (линейное соединение особой прямой с гладкой пустой квадратикой на дополнительной прямой), либо одна двойная точка (линейное соединение особой точки с гладкой пустой коникой в дополнительной плоскости), либо простой конус (линейное соединение особой точки с гладкой непустой коникой в дополнительной плоскости). Убедитесь, что в последнем случае любая лежащая на квадратике прямая проходит через особую точку.

Упр. 2.7. Всякая прямая, лежащая на  $Q_S$  и проходящая через какую-нибудь точку  $p \in Q_S$  содержится в плоской конике  $Q_S \cap T_p Q_S$ , где  $T_p Q$  — касательная плоскость к  $Q$  в точке  $p$ . Эта коника исчерпывается парой проходящих через  $p$  прямых из описанных выше двух семейств.

Упр. 2.8. Это вытекает из следующей формулы, справедливой в  $\mathbb{k}[\alpha, \beta]$ :

$$\det(\alpha A + \beta B) = \sum_{p=0}^n \text{tr}(A^p A \cdot A^p B^\vee) \alpha^p \beta^{n-p},$$

где  $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$  — квадратные матрицы размера  $n \times n$ , а  $L^p A$  и  $L^p B^\vee$  — квадратные матрицы размера  $\binom{n}{p} \times \binom{n}{p}$ , клетки которых занумерованы возрастающими  $p$ -элементными подмножествами  $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ , и в  $IJ$ -той клетке у  $L^p A$  находится  $IJ$ -тый  $p \times p$  минор  $a_{IJ}$  матрицы  $A$ , а у  $L^p B^\vee$  — алгебраическое дополнение  $(-1)^{|I|+|J|} b_{\overline{IJ}}$  к  $IJ$ -му  $p \times p$  минору матрицы  $B$ . Для доказательства обозначьте через  $a_1, \dots, a_n$  и  $b_1, \dots, b_n$  столбцы матриц  $A$  и  $B$ , рассматриваемые как векторы из координатного пространства  $\mathbb{k}^n$ , и вычислите коэффициент при  $\alpha^p \beta^{n-p}$  в грасмановом произведении  $(\alpha a_1 + \beta b_1) \wedge \dots \wedge (\alpha a_n + \beta b_n) = \det(\alpha A + \beta B) e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ , где  $e_1, \dots, e_n$  — стандартный базис в  $\mathbb{k}^n$ .

Упр. 2.9. В доказательстве лем. 2.2 на стр. 31 мы видели, что коники, касающиеся прямой  $\ell$  в точке  $p \in \ell$ , образуют в пространстве коник  $\mathbb{P}_5$  подпространство коразмерности 2. Оно пересекается с двумя гиперплоскостями коник, проходящих через точки  $c, d$  по крайней мере по прямой. Если бы пересечение имело размерность хотя бы два, то через любые две точки на  $\mathbb{P}_2$  проходила бы коника, одновременно содержащая точки  $c, d$  и касающаяся прямой  $\ell$  в точке  $p$ , что не так: возьмём одну из точек на прямой  $(cd)$ , а другую — вне  $(cd) \cup \ell$ . Описание особых коник в этом пучке очевидно.

Упр. 2.10. Условие прохождения через точку задаёт в пространстве коник гиперплоскость. Если никакие три из четырёх точек не коллинеарны, эти гиперплоскости линейно независимы, т. е. через любые три из точек можно провести распавшуюся конику, не проходящую через четвёртую точку. Следовательно, коники проходящие через точки  $a, b, c, d$ , никакие три из которых не коллинеарны, образуют пучок. Этот пучок содержит три распавшихся коники, образованные парами противоположных сторон четырёхвершинника  $abcd$ .

Упр. 2.11. Согласно прим. 2.9 на стр. 33, полярной точки  $x$  относительно коники на рис. 2.6 на стр. 33 является прямая уз. Для её построения достаточно провести через  $x$  любые две прямые, пересекающие конику в точках  $a, b$  и  $c, d$  соответственно, и найти точки  $y = (ad) \cap (bc)$  и  $z = (ac) \cap (bd)$ .

Упр. 2.12. Разложите определитель по  $i$ -той строке и продифференцируйте.

Упр. 2.13. Пучок распавшихся коник, являющихся объединением прямой, пробегаящей пучок прямых, проходящих через некоторую точку  $p$ , и ещё одной прямой, не проходящей через  $p$ .

Упр. 3.1. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают  $V^{*\otimes n}$  и формула

$$v \lrcorner \varphi(w_1, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, \dots, w_{n-1})$$

линейна по  $v$  и  $\varphi$ , достаточно проверять её для форм  $\varphi$ , переводимых изоморфизмом (??) в разложимые тензоры вида  $\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n$ , а для таких форм она очевидна из построения.

Упр. 3.2. Выберем в  $V$  такой базис  $e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q, w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s$ , что векторы  $e_i$  образуют базис в  $U \cap W$ , векторы  $u_j$  и  $w_k$  дополняют его до базисов в  $U$  и  $W$  соответственно, а векторы  $v_m$  дополняют всё предыдущее до базиса в  $V$ . Разложим  $t$  по базисным тензорным мономам. Условие  $t \in U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$  означает, что в  $t$  входят только мономы, не содержащие никаких иных векторов, кроме  $e_i$ .

Упр. 3.3. Стабилизатор каждого слагаемого состоит из  $\prod_{e \in E} m(e)!$  перестановок одинаковых базисных векторов между собою.

Упр. 3.4. Пусть все тензоры вида  $v^{\otimes n} \circ f(v) \neq 0$  лежат в гиперплоскости  $\text{Ann } \psi$ , где  $\psi$  — линейная форма на  $\text{Sym}^n(V)$ . Функция  $g(v) = \psi(v^{\otimes n})$  является однородным многочленом степени  $n$  на  $V$ .

По условию, многочлен  $fg$  тождественно зануляется на  $V$ . Тем самым, он нулевой, откуда  $g = 0$ , так как  $f \neq 0$ . Тем самым  $\psi(v^{\otimes}) = 0$  для всех  $v \in V$ , что противоречит [предл. 3.1](#).

Упр. 3.6. Первое очевидно, для доказательства второго выберем в  $V$  базис  $e_1, \dots, e_m$ . Если в разложении  $\omega$  по базисным мономам есть моном, не содержащий вектора  $e_i$ , то  $e_i\omega \neq 0$ .

Упр. 3.8. Возрастающий набор номеров  $I = (i_1, \dots, i_m)$  тех столбцов, в которых располагаются углы ступенек, однозначно восстанавливается по  $U$  как лексикографически минимальный набор набор  $I$ , такой что  $U$  изоморфно проектируется на координатное подпространство  $E_I$  вдоль дополнительного координатного подпространства, а строки матрицы — как координаты прообразов стандартных базисных векторов  $e_i \in E_I$  при этой проекции.

Упр. 3.9. Билинейность и невырожденность очевидны, симметричность вытекает из того, что однородные грассмановы многочлены степени два коммутируют друг с другом. Ненулевые элементы матрицы Грама исчерпываются  $q_{12,34} = q_{14,23} = 1$ ,  $q_{13,24} = -1$  и симметричными им.

Упр. 3.10. Каждая прямая, которая проходит через  $p$  и не касается  $Q$ , пересекает квадрику ещё ровно в одной отличной от  $p$  точке, координаты которой, по теореме Виета, рационально зависят от прямой.

Упр. 3.13. Обозначим данные прямые через  $\ell_1, \dots, \ell_4$ . Множество всех прямых, пересекающих первые три из них, замечает семейство прямолинейных образующих гладкой 1-планарной квадрики Сегре<sup>1</sup>  $S$ , проходящей через  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ , причём прямые  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  тоже являются прямолинейными образующими квадрики  $S$ , но лежащими в другом, втором семействе. Если прямая  $\ell_4$  тоже лежит на  $S$ , то она также принадлежит второму семейству, и ответом к задаче будет всё первое семейство прямолинейных образующих квадрики  $S$ . Если  $\ell_4$  не лежит на  $S$ , но касается  $S$ , то ответом к задаче является единственная проходящая через точку касания прямая из первого семейства образующих. Если  $\ell_4$  трансверсально пересекает  $S$  в двух разных точках, то ответом к задаче являются ровно две прямые из первого семейства образующих, проходящие через точки пересечения  $\ell_4 \cap S$ , и только этот ответ устойчив к малым шевелениям данных прямых  $\ell_1, \dots, \ell_4$ .

Упр. 4.1. Если  $a$  и  $b$  являются старшими коэффициентами многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  из идеала  $I$ , причём  $\deg f = m$  и  $\deg g = n$ , где  $m \geq n$ , то  $a + b$  либо равно нулю, либо является старшим коэффициентом многочлена  $f(x) + x^{m-n} \cdot g(x) \in I$  степени  $m$ . Аналогично, для любого  $\alpha \in A$  произведение  $\alpha a$  является старшим коэффициентом многочлена  $\alpha f(x) \in I$  степени  $m$ .

Упр. 4.2. Пусть  $\pi : A \rightarrow B$  — гомоморфизм факторизации. Полный прообраз  $\pi^{-1}(I)$  любого идеала  $I \subset B$  является конечно порождённым идеалом в  $A$ . Образы его образующих в  $B$  просят идеал  $I$ .

Упр. 4.8. В силу универсального свойства поля частных, любой ненулевой гомоморфизм алгебры  $A$  без делителей нуля в любое поле однозначно продолжается до вложения в это поле поля частных алгебры  $A$ .

Упр. 4.9. По [предл. 4.3](#) целое замыкание  $\mathbb{K}(a_1, \dots, a_m)$  в  $Q_A$  является полем. Если оно содержит  $A$ , то содержит и  $Q_A$ .

Упр. 5.2. Если  $a^n = 0$  и  $b^m = 0$ , то  $(a + b)^{m+n-1} = 0$  и  $(ca)^n = 0$  для любого  $c \in A$ .

Упр. 5.3. Так как для простого идеала  $\mathfrak{p} \subset A$  фактор кольцо  $A/\mathfrak{p}$  не имеет делителей нуля, гомоморфизм факторизации  $A \rightarrow A/\mathfrak{p}$  аннулирует все нильпотенты. Поэтому  $\mathfrak{n}(A) \subset \bigcap \mathfrak{p}$ . Если элемент  $a \in A$  не является нильпотентом, его неотрицательные целые степени  $a^m$  образуют содержащее единицу и не содержащее нуля мультипликативно замкнутое подмножество в  $A$ . Локализация

<sup>1</sup>См. [н° 2.3](#) на стр. 28.

$A[a^{-1}]$  кольца  $A$  по этому мультипликативно замкнутому подмножеству<sup>1</sup> является ненулевым коммутативным кольцом с единицей. Полный прообраз любого простого идеала  $\mathfrak{m} \subset A[a^{-1}]$  относительно канонического гомоморфизма  $A \rightarrow A[a^{-1}]$  является не содержащим элемента  $a$  простым идеалом в кольце  $A$ .

Упр. 5.7. Это геометрическая версия китайской теоремы об остатках. Отображение  $\varphi : \mathbb{k}[X] \hookrightarrow \mathbb{k}[Y] \times \mathbb{k}[Z]$ , переводящее  $f \in \mathbb{k}[X]$  в пару  $(f|_Y, f|_Z)$ , инъективно, т. к.  $Y \cup Z = X$ . По теореме Гильберта нулям идеал  $I(Y) + I(Z) \subset \mathbb{k}[X]$ , задающий в  $X$  пересечение  $Y \cap Z = \emptyset$ , содержит единицу, т. е. существуют такие  $s \in I(Y)$  и  $t \in I(Z)$ , что  $1 = s + t$ . Тогда  $\varphi(s) = \varphi(1 - t) = (0, 1)$  и  $\varphi(t) = \varphi(1 - s) = (1, 0)$ , а произвольная пара классов  $(f \pmod{I(Y)}, g \pmod{I(Z)}) \in \mathbb{k}[Y] \times \mathbb{k}[Z]$  равна  $\varphi(ft + gs)$ , что означает сюръективность  $\varphi$ .

Упр. 5.10. Первые три равенства и включения  $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J) \subset V(IJ) \subset V(I) \cup V(J)$  очевидны из определений.

Упр. 5.11. Если  $V(f) = X$ , то  $f \in I(X)$ , и значит,  $f = 0$  в  $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ . Если  $V(f) = \emptyset$ , то множество нулей идеала  $J \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , порождённого идеалом  $I(X)$  и многочленом  $f$  пусто, и из слабой теоремы о нулях вытекает, что  $1 \equiv sf \pmod{I(X)}$  для некоторого  $s \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , т. е.  $f$  обратим в  $\mathbb{k}[X]$ .

Упр. 5.12.  $Y = (Y \cap Z) \cup \overline{Y \setminus Z}$ , где по условию  $Y \cap Z \neq Y$ .

Упр. 5.13. Иначе  $X = (X \setminus U) \cup V(f - g)$ .

Упр. 5.16. Если  $V = \cup W_i$  и  $\xi_i \in V^*$  — такие ненулевые линейные формы, что  $W_i \subseteq \text{Ann } \xi_i$ , то ненулевой многочлен  $f = \prod \xi_i$  тождественно зануляется на  $\mathbb{A}(V)$ .

Упр. 5.17. Используйте покрытие  $U = \bigcup \mathcal{D}(x_i)$  и предл. 5.6.

Упр. 5.18. Каждое пересечение  $I \cap I(X_i)$  является собственным векторным подпространством в  $I$ , поскольку включение  $I \subset I(X_v)$  означало бы, что  $X_v \subset \bigcup_{i \neq j} (X_i \cap X_j)$ , а это в силу неприводимости  $X_v$  влечёт включение  $X_v \subset X_i \cap X_j$  для некоторых  $i \neq j$ , что невозможно, т. к. ни одна из неприводимых компонент не содержится в другой. Если все делители нуля в  $I$  лежат в собственном подпространстве, то  $I$  оказывается объединением конечного числа собственных подпространств.

Упр. 5.19. Элемент прямого произведения не делит нуль если и только если каждая из его компонент не делит нуль:  $S_{K_1 \times \dots \times K_k}^{-1} = S_{K_1}^{-1} \times S_{K_2}^{-1} \times \dots \times S_{K_k}^{-1}$ .

Упр. 5.21. Пусть  $A = \mathbb{k}[X]$ ,  $B = \mathbb{k}[Y]$ . Вложение  $\varphi^* : B \hookrightarrow A$  задаёт на  $A$  структуру конечно порождённой  $B$ -алгебры, т. е. представляет  $A$  в виде  $A \simeq B[x_1, \dots, x_m]/J$ , что и утверждается.

Упр. 6.1. Если  $x_i x_j \neq 0$ , то  $t_{j,v} = x_v / x_j = (x_v : x_i) / (x_j : x_i) = t_{i,v} / t_{i,j}$  (при  $v = i$  надо считать  $t_{i,i} = 1$ ). Поэтому  $\varphi_{ji}^* : t_{j,v} \mapsto t_{i,v} / t_{i,j}$ . Обратный к  $\varphi_{ji}^*$  гомоморфизм  $\mathbb{k}[\mathcal{D}(t_{i,j})] \rightarrow \mathbb{k}[\mathcal{D}(t_{j,i})]$  действует по той же формуле  $t_j^{(i)} \mapsto 1/t_i^{(j)}$ ,  $t_{i,v} \mapsto t_{j,v} / t_{j,i}$ .

Упр. 6.2. В каждом таком  $W$  имеется единственный базис  $w_1, \dots, w_k$ , проектирующийся в стандартный базис  $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$  координатной плоскости. Матрица  $z$ , по строкам которой стоят координаты векторов  $w_i$  в стандартном базисе пространства  $\mathbb{k}^m$ , имеет  $s_I(z) = E$ . В  $\text{GL}_k$ -орбите каждой матрицы  $x \in U_I$  также имеется единственная матрица  $z$  с  $s_I(z) = E$  — именно,  $z = s_I(x)^{-1} \cdot x$ .

Упр. 6.3. Элементы  $k \times m$ -матрицы  $s_J^{-1}(\varphi_I(t)) \cdot \varphi_I(t)$  являются рациональными функциями от элементов матрицы  $t$  со знаменателями  $\det s_J(\varphi_I(t))$  и, стало быть, регулярны в  $\mathcal{D}(\det s_J(\varphi_I(t)))$ .

<sup>1</sup>Т. е. кольцо дробей вида  $b/a^m$  с  $b \in A$ ,  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

Поэтому отображение  $\varphi_J$ , переводящее эту матрицу в её  $k \times (m - k)$ -подматрицу, образованную столбцами с не лежащими в  $J$  номерами, регулярно. Обратное отображение задаётся той же формулой:  $t \mapsto s_j (s_j^{-1} (\varphi_j(t)) \cdot \varphi_j(t))$  (удостоверьтесь в этом!).

Упр. 6.4. Это следует из определения локальной регулярной функции и зам. 5.1. на стр. 79.

Упр. 6.5. Отображение  $\kappa$  можно задать формулой  $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1 x_2 : x_0 x_2 : x_0 x_1)$ , из которой видно, что оно не определено только в точках  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1)$  и образ  $\kappa$  тоже равен дополнению до этих трёх точек.

Упр. 6.6. В обозначения из прим. 6.1 на стр. 84 пересечение множества нулей однородного многочлена  $\bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)$  со стандартной картой  $U_i \subset \mathbb{P}_n$  задаётся в аффинных координатах  $t_i$  карты  $U_i$  полиномиальным уравнением

$$\bar{f}(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}) = 0.$$

Упр. 6.10. Пусть  $X_1, X_2 \subset X$  — два замкнутых неприводимых подмножества и  $U \subset X$  — открытое множество, такое что оба пересечения  $X_1 \cap U, X_2 \cap U$  непусты. Тогда  $X_1 = X_2 \iff X_1 \cap U = X_2 \cap U$ , поскольку  $X_i = \overline{X_i \cap U}$ .

Упр. 6.11. Докажите, что произведение конечных сюръекций  $X \rightarrow \mathbb{A}^n, Y \rightarrow \mathbb{A}^m$  является конечной сюръекцией  $X \times Y \rightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ .

Упр. 6.12. Выберите в  $H$  какой-нибудь базис, запишите координаты векторов этого базиса и координаты точки  $p$  по строкам  $(n - d + 1) \times (n + 1)$ -матрицы. Условие  $p \in H$  означает, что ранг этой матрицы равен  $n - d$ . Зануление всех миноров порядка  $n - d + 1$  является системой билинейных уравнений на плюккеровы координаты<sup>1</sup> подпространства  $H$  и однородные координаты точки  $p$ .

Упр. 6.14.  $\Gamma$  задаётся однородными по каждому  $f_i$  и по  $p$  уравнениями  $f_0(p) = f_1(p) = \dots = f_n(p) = 0$ .

Упр. 6.15. Возьмите  $n + 1$  гиперплоскостей, пересекающихся в одной точке, и возведите задающие их линейные формы в подходящие степени.

Упр. 6.17. Линейная оболочка векторов  $u, w \in V$  является образом линейного отображения

$$V^* \rightarrow V, \quad \xi \mapsto \partial_\xi(u \wedge w) = \langle \xi, u \otimes w - w \otimes u \rangle.$$

Прямая  $(uw) \subset \mathbb{P}_3$  лежит на поверхности  $V(f) \subset \mathbb{P}_3$  если и только если  $f(\partial_\xi(u \wedge w)) = 0$  для всех  $\xi \in V^*$ . Пусть векторы  $e_i$  образуют базис в  $V, u = \sum u_i e_i, v = \sum v_i e_i, \xi = \sum \xi_i e_i^*$ . Тогда

$$u \wedge w = \sum_{i \neq j} p_{ij} e_i \wedge e_j, \quad \text{где } p_{ij} = -p_{ji} = u_i v_j - u_j v_i$$

обозначают плюккеровы координаты на  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ . Поскольку

$$\partial_\xi(u \wedge w) = \sum_k \sum_{i \neq j} \xi_k p_{ij} \frac{\partial}{\partial e_k} (e_i \wedge e_j) = \sum_k \left( \sum_{i \neq j} p_{ij} \xi_k \right) \cdot e_j,$$

подставляя  $x_j = \sum_{i \neq j} p_{ij} \xi_i$  в  $f(x)$  и приравнивая к нулю коэффициент при каждом мономе от  $\xi_j$ , получаем систему полиномиальных уравнений на коэффициенты многочлена  $f$  и плюккеровы координаты  $p_{ij}$ , описывающую  $\Gamma$  как замкнутое алгебраическое подмногообразие в  $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_5$ .

<sup>1</sup>напомню, что плюккеровыми координатами подпространства являются старшие миноры матрицы, составленной из координат какого-нибудь базиса в этом подпространстве

Упр. 6.18. В аффинной части прямых нет вообще, так как подставляя вместо  $(x, y, z)$  точку, бегущую по прямой с параметрическим уравнением  $x = x_0 + \alpha t, y = y_0 + \beta t, z = z_0 + \gamma t$  получаем несовместную систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = 0 \\ \alpha\beta z_0 + \beta\gamma x_0 + \gamma\alpha y_0 = 0 \\ \alpha y_0 z_0 + \beta x_0 z_0 + \gamma x_0 y_0 = 0 \\ x_0 y_0 z_0 = 1 \end{cases}$$

(убедитесь в этом!). Пересечение поверхности с бесконечно удалённой гиперплоскостью задаётся уравнением  $xuz = 3$  и является объединением трёх прямых.

Упр. 6.19. В этом случае  $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2 V^*) = \mathbb{P}_5$  это пространство квадрик. Слой проекции  $\pi_1 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_5$  над каждой гладкой квадрикой является дизъюнктивным объединением двух проективных прямых, слой над любой гладкой точкой гиперповерхности вырожденных квадрик  $V(\det) \subset \mathbb{P}_5$  является одной проективной прямой, слой над парой пересекающихся плоскостей изоморфен дизъюнктивному объединению двойственных плоскостей, а слой над двойной плоскостью — двойственной плоскости.

Упр. 6.20. С точностью до перенумерации координат, пара линейных уравнений, задающих прямую на кубике Ферма, приводится методом Гаусса к виду  $x_0 = \alpha x_2 + \beta x_3, x_1 = \gamma x_2 + \delta x_3$ . Подставьте эти значения в уравнение кубики, покажите, что  $\alpha\beta\gamma\delta = 0$ , а затем найдите их.

Упр. 6.21. Кубическая форма Ферма  $\sum x_i^3$  над  $\mathbb{F}_4$  совпадает со стандартной эрмитовой формой  $\sum x_i \bar{x}_i$ . Поэтому проективная унитарная группа  $\text{PU}_4(\mathbb{F}_4)$  действует на кубике Ферма  $C_F \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{F}_4)$  из [упр. 6.20](#), переводя прямые в прямые с сохранением инцидентности. При этом  $|\text{PU}_4(\mathbb{F}_4)| = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$ , а  $|G| = 51\,840$ .