

Тензоры, многочлены, грассманианы

АГЗ♦1. Можно ли обратимой линейной заменой переменных преобразовать многочлен

$$9x^3 - 15yx^2 - 6zx^2 + 9xy^2 + 18z^2x - 2y^3 + 3zy^2 - 15z^2y + 7z^3$$

в многочлен от ≤ 2 переменных?

АГЗ♦2 (принцип Аронгольда). Покажите, что над полем характеристики нуль пространство симметрических тензоров $\text{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$ линейно порождается тензорами $v^{\otimes n} = v \otimes \dots \otimes v$, где $v \in V$, а пространство однородных многочленов $S^n V^*$ — многочленами φ^n , где $\varphi \in V^*$.

АГЗ♦3* (усиленный принцип Аронгольда). В условиях предыдущей задачи докажите, что для любого ненулевого многочлена $f \in S^n V^*$ пространство $\text{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$ линейно порождается тензорами $v^{\otimes n}$ с $f(v) \neq 0$.

АГЗ♦4. Вложим грассманиан $\text{Gr}(k, V)$ по Плюккеру в $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(\Lambda^k V)$. Покажите, что

- а) всякая лежащая на нём прямая изображает семейство k -мерных подпространств, содержащихся в некотором общем для всех $(k+1)$ -мерном подпространстве и содержащих некоторое общее для всех $(k-1)$ -мерное подпространство
- б) всякое максимальное по включению проективное подпространство $\Pi \subset \text{Gr}(k, V)$ изображает семейство всех k -мерных подпространств, содержащих некоторое фиксированное подпространство в V или семейство всех k -мерных подпространств, содержащихся в некотором фиксированном подпространстве в V .

АГЗ♦5. Пусть $\dim U = 2$, $\dim V = k+1$ и $W = U \otimes V$. Сопоставим точке $\alpha \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ точку $s(\alpha) \in \text{Gr}(k+1, W)$, отвечающую подпространству $\alpha \otimes V \subset W$, и вложим $\text{Gr}(k+1, W)$ в $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(\Lambda^{k+1} W)$ по Плюккеру. Покажите, что точки $s(\alpha)$ нарисуют в образе грассманиана рациональную нормальную кривую степени k , лежащую в некоем $\mathbb{P}_k \subset \mathbb{P}_N$.

АГЗ♦6. Докажите, что для любого проективного многообразия $X \subset \mathbb{P}(V)$ множество k -мерных проективных подпространств $L \subset \mathbb{P}(V)$, которые пересекают X , составляет замкнутое подмногообразие в грассманиане $\text{Gr}(k+1, V)$.

АГЗ♦7. В условиях предыдущей задачи напишите явные уравнения, задающие на квадрике Плюккера $\text{Gr}(2, 4) \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ множество всех прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, пересекающих

- а) конику $x_3 = x_0x_2 - x_1^2 = 0$
- б) скрученную кубику $x_1^2 - x_0x_2 = x_2^2 - x_1x_3 = x_0x_3 - x_1x_2 = 0$.

АГЗ♦8. На четырёхмерном пространстве V задана невырожденная билинейная кососимметричная форма $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ и ненулевой 4-вектор $\delta \in \Lambda^4 V$. Покажите, что:

- а) существует единственный такой бивектор $\omega \in \Lambda^2 V$, что $\omega \wedge a \wedge b = \Omega(a, b) \cdot \delta$ для всех $a, b \in V$
- б) ортогональная к ω относительно плюккеровой квадратичной формы на $\Lambda^2 V$ гиперплоскость в $\mathbb{P}(\omega^\perp) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ пересекает $\text{Gr}(2, 4) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ по гладкой квадрике, которая является плюккеровым образом лагранжева грассманиана

$$\text{LGr}(2, V) = \{U \subset V \mid \dim U = 2 \text{ \& } \Omega|_U \equiv 0\}$$

- в) множество прямых на $\text{LGr}(2, V)$ естественно параметризуется точками пространства $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$.

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4а			
б			
5			
6			
7а			
б			
8а			
б			
в			