Аффинные алгебраические многообразия.

АГ5⋄1. Покажите, что для любых поля $\Bbbk$, натурального $m \gg 0$ и непостоянного многочлена $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ алгебра $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ цела над подалгеброй, порождённой f и $n-1$ двучленами $x_1 - x_n^m, x_2 - x_n^{m^2}, \dots, x_{n-1} - x_n^{m^{n-1}}$.

АГ5⋄2. При каком условии на вектор $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$ параллельная проекция гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$, где $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ и $\deg f > 0$, на гиперплоскость $x_n = 0$ в направлении вектора v является: **а)** доминантной **б)** конечной **в)** сюрьективной?

АГ5⋄3. Докажите, что проекция аффинной гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ из любой точки $p \notin V(f)$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ доминантна.

АГ5⋄4. Покажите, что образ доминантного морфизма содержит открытое плотное множество.

АГ5⋄5. Покажите, что любая гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ допускает конечную сюрьекцию на некоторую гиперплоскость $\mathbb{A}^{n-1} \subset \mathbb{A}^n$.

АГ5⋄6. Покажите, что открытое подмножество U аффинного многообразия X является его аффинным подмногообразием[1], если и только если для некоторых $f_1, \dots, f_m \in \Bbbk[U]$, порождающих единичный идеал в кольце $\Bbbk[U]$, каждое из главных открытых подмножеств $U_i = \mathcal{D}\left(f_i\right)$ является аффинным многообразием с координатным кольцом $\Bbbk[U_i]$.

АГ5⋄7 (рациональные функции). Кольцо частных[2] $Q_{\Bbbk[X]}$ координатной алгебры $\Bbbk[X]$ аффинного многообразия X называется *алгеброй рациональных функций* на X и обозначается $\Bbbk(X)$. Множество $D_f = \{x \in X \mid \exists\, p, q \in \Bbbk[X] : \ q(x) \neq 0 \ \& \ f = p/q\}$ называется *областью определения* рациональной функции $f \in \Bbbk(X)$. Покажите, что: **а)** если $x \in D_f$, то значение $f(x) = p(x)/q(x) \in \Bbbk$ не зависит от способа записи $f = p/q$ с $p, q \in \Bbbk[X]$ и $q(x) \neq 0$ **б)** D_f открыто и плотно в X **в)** отображение $f : D_f \to \Bbbk$, $x \mapsto f(x)$, непрерывно в топологии Зарисского **г)** идеал $I_f = \{q \in \Bbbk[X] \mid qf \in \Bbbk[X]\}$ порождается содержащимися в нём неделителями нуля **д)** $D_f = X \smallsetminus V(I_f)$ **е)** если $\mathcal{D}(h) \subset D_f$, где $h \in \Bbbk[X]$, то $f = g/h^m$ для некоторых $g \in \Bbbk[X]$ и $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ **ж)** если $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ — разложение на неприводимые компоненты, то имеется изоморфизм[3]: $\Bbbk(X) \xrightarrow{\sim} \Bbbk(X_1) \times \ldots \times \Bbbk(X_m)$, $f \mapsto \left(f|_{X_1}, \dots, f|_{X_m}\right)$.

АГ5⋄8. Найдите D_f для **а)** $f = (1-y)/x$ на $V(x^2+y^2-1) \subset \mathbb{A}^2$ **б)** $f = y/x$ на $V(x^3+x^2-y^2) \subset \mathbb{A}^2$ **в)** $f = x_1/x_3$ на $X = V(x_1x_4 - x_2x_4) \subset \mathbb{A}^4$ и выясните, лежит ли f в $\Bbbk[X]$.

АГ5⋄9 (фактор по конечной группе). Пусть конечная группа G действует регулярными автоморфизмами на аффинном алгебраическом многообразии X над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Обозначим через $R = \Bbbk[X]^G \subset \Bbbk[X]$ подалгебру инвариантов. Покажите, что **а)** $\Bbbk$-линейный оператор $\natural : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow R$, переводящий функцию $f \in \Bbbk[X]$ в центр тяжести $f^\natural \overset{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in G} \sigma f / |G|$ её G-орбиты, обладает для всех $f \in \Bbbk[X]$ и $h \in R$ свойствами $f^\natural \in R$, $h^\natural = h$ и $(fh)^\natural = f^\natural h$, **б)** алгебра R конечно порождена и не имеет нильпотентов. **в)** Постройте такие аффинное алгебраическое многообразие X/G и конечную регулярную сюрьекцию $\pi : X \twoheadrightarrow X/G$, что слои π — это в точности G-орбиты и для любого регулярного морфизма аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$, такого что $\forall\, \sigma \in G$ и $\forall\, x \in X$ $\varphi(\sigma x) = \varphi(x)$, существует единственный такой регулярный морфизм $\psi : X/G \to Y$, что $\psi \circ \pi = \varphi$. **г)** Опишите явными уравнениями в подходящем аффинном пространстве фактор $\mathbb{C}^2/G$, где $G = \mathbb{Z}/(n)$ действует на $\mathbb{C}^2$ по правилу $[k]_n : (x, y) \mapsto (e^{2\pi i k/n} x, e^{2\pi i k/n} y)$.

---

[1] Т. е. существуют аффинное многообразие Y и регулярный морфизм $Y \hookrightarrow X$, гомеоморфно отображающий Y на U.

[2] Т. е. локализация со знаменателями в мультипликативной системе всех неделителей нуля.

[3] Через $f|_{X_i}$ обозначен образ f при гомоморфизме $\Bbbk(X) \to \Bbbk(X_i)$, который канонически продолжает гомоморфизм подъёма $\varphi_i^* : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow \Bbbk[X_i]$ замкнутого вложения $\varphi_i : X_i \hookrightarrow X$.

Персональный табель ____ . **Листок № 5 (обновлён 15.12.2025)**
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
в			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
8а			
б			
в			
9а			
б			
в			
г			