Письменный экзамен для 3-го и 4-го курсов бакалавриата

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 50 баллов.

Задача 1 (10 баллов). Для каждого целого неотрицательного m обозначим через

$$[m]_{\text{cyc}} \overset{\text{def}}{=} \left\{ e^{2\pi i \frac{k}{m+1}} \right\}_{0 \leqslant k \leqslant m} \subset S^1 \subset \mathbb{C}$$

множество комплексных корней $(m+1)$-й степени из единицы, рассматриваемое как категория, в которой $\operatorname{Hom}(x, y)$ состоит из гомотопических классов непрерывных монотонных[1] путей $f : [0,1] \to S^1$ с $f(0) = x$ и $f(1) = y$ (т. е. проходимой против ЧС дуги xy и всех путей, получающихся добавлением к ней любого натурального числа оборотов против ЧС), и для $x \in \operatorname{Ob}[m]_{\text{cyc}}$ обозначим через $T_x \in \operatorname{End}(x)$ эндоморфизм, отвечающий одному обороту по окружности. Объектами (малой) *циклической категории* Λ являются категории $[m]_{\text{cyc}}$, а стрелки $\varphi : [n]_{\text{cyc}} \to [m]_{\text{cyc}}$ — это такие функторы, что $\varphi(T_x) = T_{\varphi(x)}$ для всех $x \in \operatorname{Ob}[n]_{\text{cyc}}$. Доопределите представимые предпучки $h_{[n]_{\text{cyc}}}$ на Λ так, чтобы они принимали значения в $\Lambda \subset \mathcal{S}et$, и укажите такой объект $\omega \in \operatorname{Ob} \Lambda$, что $h_\omega : \Lambda^{\text{opp}} \to \Lambda$ является эквивалентностью категорий.

Задача 2 (10 баллов). Два контравариантных функтора $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D}^{\text{opp}} \to \mathcal{C}$ называются *левосопряжёнными* (соотв. *правосопряжёнными*), если имеется функториальная по $C \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ и $D \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ биекция $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(D), C\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(C), D\big)$ (соотв. $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(C, G(D)\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(D, F(C)\big)$). Сформулируйте и докажите 2 теоремы о действии таких функторов на (ко)пределы, аналогичные тем, что имеют место для сопряжённых ковариантных функторов.

Задача 3 (10 баллов). Комплекс $0 \to C^1 \to C^2 \to \cdots \to C^n \to 0$ включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots \\
 & & & & 0 \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \\
 & & & & & & \cdots & \cdots & & & \\
 & & & 0 \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & 0 & \\
 & & & & & \cdots & \cdots & & & & \\
 & & 0 \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \arrow[r] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \arrow[dd] & & \\
 & & & & & \cdots & & & & & \\
 & & 0 \arrow[r] \arrow[dd] & C^1 \arrow[r] \arrow[dd] & C^2 \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r] \arrow[dd] & C^n \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \arrow[dd] & & \\
 & & & & & \cdots & & & & & \\
 & & 0 \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & 0 & & \\
 & & & & \cdots & \cdots & & & & & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & 0 & & & \\
 & & & \cdots & \cdots & & & & & & \\
0 \arrow[r] & \ast \arrow[r] & \ast \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \ast \arrow[r] & \ast \arrow[r] & 0 & & & & \\
\iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & & &
\end{tikzcd}$$

[1] т. е. вида $t \mapsto e^{i\varphi(t)}$, где $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ — непрерывная неубывающая функция

где точны все столбцы и все строки (кроме, быть может, самого комплекса), причём все строки, стоящие достаточно высоко и достаточно низко, целиком нулевые. Могут ли $H^i(C)$ быть ненулевыми при $2 \leqslant i \leqslant (n-1)$?

Задача 4 (10 баллов). Для группы G и коммутативного кольца K обозначим через $\overline{B}_n$ свободный $K[G]$-модуль с базисом из ненулевых символов $[g_1|g_2|\cdots|g_n]$, где $g_i \in G$ и мы полагаем символ $[g_1|g_2|\cdots|g_n]$ равным нулю, если хоть один из $g_i = e$. Обозначим через $\overline{B}_0$ свободный $K[G]$-модуль ранга 1 с базисом []. Установите точность последовательности $K[G]$-модулей[2]

$$\cdots \to \overline{B}_3 \to \overline{B}_2 \to \overline{B}_1 \to \overline{B}_0 \to K \to 0\,,$$

отображения в которой действуют на ненулевые базисные векторы по формуле

$$[g_1|g_2|\cdots|g_n] \mapsto g_1[g_2|\cdots|g_n] + \sum_{\nu=1}^{n-1}(-1)^\nu[g_1|\cdots|g_ig_{i+1}|\cdots|g_n] + (-1)^n[g_1|\cdots|g_{n-1}]$$

и переводят B_0 в K по правилу $\sum\limits_{g\in G} x_g g\cdot[] \mapsto \sum\limits_{g\in G} x_g$.

Задача 5. Для группы G, G-модуля V и отображения множеств $G\times G \to V$, $(g,h)\mapsto[g,h]$ зададим на множестве $E = V\times G$ умножение $(v,g)\cdot(w,h) \overset{\text{def}}{=} (\,v + gw + [g,h]\,,\; gh\,)$. Покажите, что

а) **(10 баллов)** оно превращает E в группу, если и только если скобка $[g,h]$ является нормализованным 2-коциклом группы G со значениями в V, т. е. удовлетворяет при всех $f,g,h\in G$ соотношениям $[g,1]=[1,g]=0$ и $f[g,h]-[fg,h]+[f,gh]-[f,g]=0$

б) **(10 баллов)** сопоставление $[*,*]\mapsto E$ задаёт биекцию между $H^2(G,V) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ext}^2_{\Bbbk[G]}(\Bbbk, V)$ и классами групп E содержащих V в качестве абелевой нормальной подгруппы с $E\,/\,V \simeq G$ и присоединённым действием G на V, совпадающим со структурой G-модуля на V, рассматриваемых с точностью изоморфизмов, тождественных на V и G.

Задача 6 (10 баллов). Докажите, что на паракомпактном[3] топологическом пространстве всякий мягкий[4] пучок абелевых групп является тонким[5].

[2]она называется *нормализованной бар резольвентой* тривиального G-модуля K

[3]топологическое пространство называется *паракомпактным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие

[4]пучок называется *мягким*, если его слой над любым замкнутым множеством состоит из ростков глобальных сечений

[5]пучок абелевых групп F называется *тонким*, если он допускает разбиение единицы, т. е. для любого сечения $s \in F(U)$ и любого открытого покрытия $U = \cup W_\alpha$ найдутся такие сечения $s_\alpha \in F(U)$, что носитель s_α содержится в U_α, а в слое F_x над любой точкой $x\in U$ лишь конечное число сечений s_α отлично от нуля, и $\sum\limits_\alpha s_\alpha = s$