Итоговый письменный экзамен

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 50 баллов.

Задача 1 (10 баллов). Рассмотрим бикомплекс $\mathbb{Z}$-модулей

$$C_{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Z}/(4) & \text{при } q \geqslant 0 \\ 0 & \text{при } q < 0\,, \end{cases}$$

с дифференциалами ∂_1 и ∂_2 бистепеней $(-1,0)$ и $(0,-1)$, действующими между ненулевыми компонентами $C_{p,q}$ умножением на 2: $z \mapsto 2z \pmod 4$. Вычислите гомологии комплексов

$$T_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q} \quad \text{и} \quad T'_n = \prod_{p+q=n} C_{p,q}$$

(оба с дифференциалом $\partial = \partial_1 + \partial_2$).

Задача 2 (10 баллов). Пусть кольцо S является алгеброй над кольцом[1] R. Для (левых) S-модуля A и R-модуля B постройте спектральную последовательность с $E_2^{p,q} = \operatorname{Ext}_S^p\left(A, \operatorname{Ext}_R^q(S,B)\right)$, которая сходится к $\operatorname{Ext}_R^{p+q}(A,B)$.

Задача 3 (10 баллов). Обозначим через X алгебраическое многообразие $\mathbb{A}^3 \smallsetminus V(x_1,x_2)$ над полем $\mathbb{C}$ (трёхмерное аффинное пространство без координатной прямой x_3). Вычислите все когомологии $H^k\left(X, \mathcal{O}_X\right)$ его структурного пучка[2] $\mathcal{O}_X$.

Задача 4. Пусть в абелевой категории $\mathcal{A}$ под- и фактор объекты любого объекта являются множествами, а полная абелева подкатегория $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ такова, что средний член точной тройки из $\mathcal{A}$ лежит в $\mathcal{B}$, если и только если оба её крайних члена лежат[3] в $\mathcal{B}$. Обозначим через $\mathcal{S} \subset \operatorname{Mor}\mathcal{A}$ класс морфизмов с ядром и коядром из $\mathcal{B}$. Покажите, что

а) **(10 баллов)** класс $\mathcal{S}$ является локализующим[4] и $\mathcal{A}\mathcal{S}^{-1} \simeq \mathcal{A}/\mathcal{B}$ в том смысле, что $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ тогда и только тогда изоморфен нулю в категории $\mathcal{A}\mathcal{S}^{-1}$, когда $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$

б) **(10 баллов)** категория $\mathcal{A}\mathcal{S}^{-1}$ абелева и естественный функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{A}\mathcal{S}^{-1}$ точен.

Задача 5. Пусть $\mathcal{T}$ — триангулированная категория и $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ — её полная триангулированная подкатегория. Обозначим левый и правый ортогоналы к $\mathcal{C}$ через

$$
\begin{aligned}
{}^\perp\mathcal{C} &\overset{\text{def}}{=} \{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{T} \mid \forall\, C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(X,C) = 0\} \\
\mathcal{C}^\perp &\overset{\text{def}}{=} \{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{T} \mid \forall\, C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(C,X) = 0\}\,.
\end{aligned}
$$

Покажите, что это полные триангулированные подкатегории и

а) **(10 баллов)** функтор $\mathcal{T} \to \mathcal{C}$, $X \mapsto X_{\mathcal{C}}$, сопряжённый слева к вложению $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{T}$, существует тогда и только тогда, когда существует функтор $\mathcal{T} \to {}^\perp\mathcal{C}$, $X \mapsto {}_{\perp\mathcal{C}}X$, сопряжённый справа к вложению ${}^\perp\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{T}$, и в этом случае каждый объект $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{T}$ включается в функториально зависящий от X отмеченный треугольник ${}_{\perp\mathcal{C}}X \to X \to X_{\mathcal{C}}$

б) **(10 баллов)** если у вложения $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{T}$ есть как левый, так и правый сопряжённые функторы, то триангулированные подкатегории ${}^\perp\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}^\perp$ точно[5] эквивалентны.

---

[1] т. е. имеется гомоморфизм колец $R \to S$

[2] напомню, что сечения $\mathcal{O}_X$ над открытым (по Зарисскому) множеством $U \subset X$ это функции $f : U \to \mathbb{C}$, представляющиеся в окрестности каждой точки $p \in U$ в виде φ/ψ, где φ, ψ — многочлены и $\psi(p) \neq 0$

[3] такие подкатегории называются *толстыми* (по-французски — *épaisse*)

[4] т. е. мультипликативно замкнут и удовлетворяет условиям Оре

[5] т. е. эквивалентность перестановочна с функтором сдвига и переводит отмеченные треугольники в отмеченные