§1. Категории и функторы

1.1. Категории. Категория $\mathcal{C}$ — это класс[1] объектов, обозначаемый $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, в котором для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ задано *множество* морфизмов

$$\mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\,.$$

Морфизмы из X в Y удобно представлять себе в виде стрелок $\varphi : X \to Y$. Для разных пар объектов эти множества стрелок не пересекаются. Объединение всех стрелок категории $\mathcal{C}$ обозначается $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} = \bigsqcup_{X,Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Для каждой тройки объектов $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ имеется отображение композиции[2]

$$\mathrm{Hom}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(X,Z)\,, \quad (\varphi,\psi) \mapsto \varphi \circ \psi \quad (= \varphi\psi)\,, \tag{1-1}$$

ассоциативное в том смысле, что $(\chi \circ \varphi) \circ \psi = \chi \circ (\varphi \circ \psi)$ всякий раз, когда эти композиции определены. Наконец, у каждого объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ есть *тождественный морфизм* $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}(X,X)$, который для любых стрелок $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Z \to X$ удовлетворяет условиям[3] $\varphi \circ \mathrm{Id}_X = \varphi$ и $\mathrm{Id}_X \circ \psi = \psi$.

Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ — это категория, все объекты, стрелки и композиции которой наследуются из $\mathcal{C}$. Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ называется *полной*, если $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ для любых $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$. Категория называется *малой*, если $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ это *множество*, а не больший класс. В этом случае $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ тоже является множеством.

Пример 1.1 (категории, не являющиеся малыми)
Часто возникающие в примерах категории, *не* являющиеся малыми — это категория $\mathcal{S}et$ всех множеств и всех отображений, категория $\mathcal{T}op$ топологических пространств и непрерывных отображений, категория $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ векторных пространств над полем $\Bbbk$ и $\Bbbk$-линейных отображений и её полная подкатегория $vec_{\Bbbk}$ конечномерных пространств, категории R-$\mathcal{M}od$ и $\mathcal{M}od$-R левых и правых модулей над кольцом R и R-линейных отображений и их полные подкатегории R-mod и mod-R конечно представимых[4] модулей, категория $\mathcal{A}b = \mathbb{Z}$-$\mathcal{M}od$ абелевых групп и их гомоморфизмов, категория $\mathcal{G}rp$ всех групп и групповых гомоморфизмов, категория $\mathcal{C}mr$ коммутативных колец с единицей и гомоморфизмами, переводящими единицу в единицу, и т. п.

Пример 1.2 (чумы и топологии)
Каждое частично упорядоченное множество M это малая категория, объекты которой суть элементы $m \in M$, стрелки суть неравенства:

$$\mathrm{Hom}_M(n,m) = \begin{cases} \text{одноэлементное множество, когда } n \leqslant m, \\ \varnothing\,, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

[1] не хотелось бы вдаваться в точную формализацию этого термина (содержательную в той же мере, как формализация арифметики и теории множеств, изучаемые в стандартном курсе математической логики); отметим лишь, что такая формализация возможна и позволяет говорить, например, о «категории множеств», объекты которой, по понятным причинам, множества не образуют

[2] значок «$\circ$», как и знак умножения, принято опускать, если понятно о чём речь

[3] выкладка $\mathrm{Id}' = \mathrm{Id}' \circ \mathrm{Id}'' = \mathrm{Id}''$ показывает, что тождественный морфизм единствен

[4] модуль называется *конечно представимым*, если он изоморфен фактору свободного модуля конечного ранга по конечно порождённому подмодулю

и прозведением стрелок $k \leqslant \ell$ и $\ell \leqslant n$ является стрелка $k \leqslant n$. Важным примером такой категории является категория $\mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств топологического пространства X, стрелками в которой являются включения:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(X)}(U,W) = \begin{cases} \text{вложение } U \hookrightarrow W, \text{ если } U \subseteq W \\ \text{пустое множество, когда } U \nsubseteq W. \end{cases}$$

Пример 1.3 (малые категории и ассоциативные алгебры)
Всякую ассоциативную алгебру A с единицей $e \in A$ можно рассматривать как малую категорию с одним объектом e и множеством стрелок $\mathrm{Hom}(e,e) = A$, композиция на котором задаётся умножением в этой алгебре. Наоборот, со всякой малой категорией $\mathcal{C}$ можно связать *алгебру стрелок* $K[\mathcal{C}]$, состоящую из формальных конечных линейных комбинаций стрелок категории $\mathcal{C}$ с коэффициентами в каком – нибудь коммутативном кольце K:

$$K[\mathcal{C}] = \bigoplus_{X,Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \mathrm{Hom}(X,Y) \otimes K = \left\{ \sum x_i \varphi_i \;\middle|\; \varphi_i \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}),\ x_i \in K \right\},$$

где для множества M мы обозначаем через $M \otimes K$ свободный K-модуль с базисом M, образованный всеми конечными формальными линейными комбинациями элементов множества M с коэффициентами из K. Умножение в алгебре $K[\mathcal{C}]$ задаётся композицией стрелок

$$\varphi\psi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi \circ \psi & \text{если конец } \psi \text{ совпадает с началом } \varphi \\ 0 & \text{во всех прочих случаях} \end{cases}$$

и по дистрибутивности распространяется на их линейные комбинации. Алгебру $K[\mathcal{C}]$ можно представлять себе как алгебру финитных квадратных матриц[1], строки и столбцы которых занумерованы объектами категории, и в каждой клетке (Y,X) стоят элементы из своего пространства $\mathrm{Hom}(X,Y) \otimes K$. Эта алгебра, вообще говоря, некоммутативна и без единицы, однако, для всякого $f \in K[\mathcal{C}]$ существует идемпотент $e_f = e_f^2$ со свойствами $e_f \circ f = f \circ e_f = f$. В качестве такового можно взять сумму тождественных эндоморфизмов Id_X всех объектов X, являющихся началами и концами стрелок, линейной комбинацией которых является f.

Пример 1.4 (конечные упорядоченные множества и комбинаторные симплексы)
Обозначим через Δ_{big} категорию, объектами которой являются конечные упорядоченные множества X, а морфизмами — сохраняющие порядок отображения[2]. Категория Δ_{big} не является малой[3], но содержит полную малую подкатегорию $\Delta \subset \Delta_{\mathrm{big}}$, объектами которой являются конечные подмножества в $\mathbb{Z}$ вида

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \dots, n\}, \quad n \geqslant 0, \tag{1-2}$$

со стандартным порядком. Множество (1-2) называется n-мерным *комбинаторным симплексом*, а категория Δ — *симплициальной категорией*. Для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\Delta_{\mathrm{big}}$

[1] возможно бесконечного размера, но с конечным числом ненулевых элементов

[2] т. е. такие $\varphi : X \to Y$, что $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2)$

[3] по упомянутым выше логическим причинам, см. сноску на стр. 3

имеется *единственный* изоморфизм $n_X : X \xrightarrow{\sim} [n]$ с *единственным* $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, а именно нумерация элементов X в порядке возрастания.

Упражнение 1.1. Сколько всего стрелок в множестве $\mathrm{Hom}_\Delta([n],[m])$? Сколько среди них инъективных? Сколько сюрьективных? Покажите, что алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\Delta]$, как абстрактная ассоциативная алгебра, порождается стрелками

$$e_n = \mathrm{Id}_{[n]} \qquad \text{(тождественное отображение)} \tag{1-3}$$
$$\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n] \qquad \text{(вложение, образ которого не содержит } i\text{)} \tag{1-4}$$
$$s_n^{(i)} : [n] \twoheadrightarrow [n-1] \qquad \text{(наложение, склеивающее } i \text{ с } (i+1)\text{)} \tag{1-5}$$

и опишите образующие идеала соотношений между этими стрелками.

1.1.1. Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы. Стрелка φ в категории $\mathcal{C}$ называется *мономорфизмом*[1] (соотв. *эпиморфизмом*[2]), если на неё можно сокращать слева (соотв. справа), т. е. когда $\varphi\alpha = \varphi\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ (соотв. $\alpha\varphi = \beta\varphi \Rightarrow \alpha = \beta$). По умолчанию мы используем стрелки $\hookrightarrow$ для обозначения мономорфизмов, и стрелки $\twoheadrightarrow$ для эпиморфизмов. Стрелка $\varphi : X \to Y$ называется *изоморфизмом* (или *обратимой* стрелкой) и обозначается $\xrightarrow{\sim}$, если существует такая стрелка $\psi : Y \to X$, что $\varphi\psi = \mathrm{Id}_Y$ и $\psi\varphi = \mathrm{Id}_X$. В этой ситуации объекты X и Y называются *изоморфными*, а морфизмы φ и ψ — *обратными* друг к другу.

Определение 1.1 (подобъекты и фактор объекты)
Класс эквивалентности инъективной стрелки с концом в X по модулю её умножения справа на обратимые стрелки называется *подобъектом* объекта X, а класс эквивалентности сюрьективной стрелки с началом в X по модулю левого умножения на обратимые стрелки — *фактор объектом* объекта X. Категория называется *умеренно мощной*[3], если подобъекты любого её объекта образуют множество. Все категории из прим. 1.3 умеренно мощны.

Упражнение 1.2 (частичный порядок на под- и фактор объектах). Проверьте, что отношение $\varphi \subseteq \psi$, означающее, что существует такая стрелка ξ, что $\varphi = \psi\xi$, задаёт частичный порядок на множестве подобъектов, а отношение $\varphi \geqslant \psi$, означающее наличие такой стрелки ξ, что $\varphi = \xi\psi$, задаёт частичный порядок на множестве фактор объектов.

1.1.2. Обращение стрелок. С каждой категорией $\mathcal{C}$ связана *противоположная* категория $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ с теми же объектами, но с обращённым направлением всех стрелок:

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\,, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)\,, \quad \varphi^{\mathrm{opp}} \circ \psi^{\mathrm{opp}} = (\psi \circ \varphi)^{\mathrm{opp}}\,.$$

На языке алгебр такое обращение стрелок означает переход от алгебры $C = K[\mathcal{C}]$ к противоположной алгебре C^{opp} из тех же элементов, но с происходящим в противоположном порядке умножением. Мономорфизмы и подобъекты категории $\mathcal{C}$ являются эпиморфизмами и фактор объектами категории $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ и наоборот.

[1] а также *вложением* или *инъективным* морфизмом
[2] а также *наложением* или *сюрьективным* морфизмом
[3] по-английски: *well powered*

1.2. Функторы. Функтор[1] $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ это отображение $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, $X \mapsto F(X)$, и набор таких отображений[2]

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)), \quad \varphi \mapsto F(\varphi), \tag{1-6}$$

что $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ для всех $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ всякий раз, когда композиция $\varphi \circ \psi$ определена. На языке ассоциативных алгебр функторы суть *гомоморфизмы* одной алгебры стрелок в другую. Если все отображения (1-6) сюрьективны, функтор F называется *полным*[3]. Образ такого функтора является полной подкатегорией. Если все отображения (1-6) инъективны, функтор F называется *строгим*[4]. Такой функтор задаёт вложение алгебр стрелок. Полные строгие функторы иногда называют *вполне строгими*.

Простейшие функторы — это *тождественный функтор* $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, тождественно действующий на объектах и морфизмах, и *забывающие функторы*, действующие из какой-либо категории множеств с дополнительной структурой[5], морфизмы в которой суть сохраняющие эту структуру отображения множеств, в категорию $\mathcal{S}et$ всех множеств — такие функторы просто забывают о структуре.

Пример 1.5 (геометрическая реализация комбинаторных симплексов)
Зададим функтор $\Delta \to \mathcal{T}op$ из категории комбинаторных симплексов в категорию топологических пространств, сопоставляя n-мерному комбинаторному симплексу $[n]$ стандартный n-мерный симплекс[6]

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_\nu = 1\,,\ x_\nu \geqslant 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}\,, \tag{1-7}$$

а стрелке $\varphi : [n] \to [m]$ — единственное аффинное отображение $\varphi_* : \Delta^n \to \Delta^m$, действующее на базисные векторы по правилу $e_\nu \mapsto e_{\varphi(\nu)}$. Это строгий, но не полный функтор. Образующие элементы (1-4) и (1-5) алгебры стрелок категории Δ переводятся этим функтором, соответственно, во вложение i-той грани $\Delta^{(n-1)} \hookrightarrow \Delta^n$ и в вырождение вдоль i-того ребра[7] $\Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^{(n-1)}$.

1.2.1. Предпучки. Функтор $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ называется *контравариантным функтором* из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ или *предпучком* объектов категории $\mathcal{D}$ на категории $\mathcal{C}$. Такой функтор оборачивает композицию: $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ и на языке ассоциативных алгебр является *антигомоморфизмом* алгебр стрелок.

Пример 1.6 (триангулированные пространства)
Обозначим через $\Delta_{\mathrm{s}} \subset \Delta$ неполную подкатегорию, объектами которой являются комбинаторные симплексы: $\mathrm{Ob}\,\Delta_{\mathrm{s}} = \mathrm{Ob}\,\Delta$, а качестве морфизмов допускаются только *стро-*

[1] иногда вместо слова «функтор» говорят *ковариантный функтор*
[2] по одному отображению для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$
[3] по-английски: *full*
[4] по-английски: *faithful*
[5] например, геометрической — такой, как топология или структура гладкого многообразия, или алгебраической — такой, как структура группы, кольца или модуля
[6] т. е. выпуклую оболочку концов стандартных базисных векторов $e_0, e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$
[7] т. е. в проекцию симплекса на грань вдоль ребра, соединяющего i-тую вершину с $(i+1)$-й

го возрастающие[1] отображения. Категория Δ_s называется *полусимплициальной категорией*.

Упражнение 1.3. Убедитесь, что алгебра стрелок $K[\Delta_s]$ порождается тождественными стрелками $e_n = \mathrm{Id}_{[n]}$ и отображениями вложения граней $\partial_n^{(i)}$ из (1-4).

Предпучок множеств $X : \Delta_s^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории Δ_s называется *полусимплициальным множеством* и является ни чем иным, как комбинаторным описанием *триангулированного топологического пространства* $|X|$, которое называется *геометрической реализацией* полусимплициального множества X. В самом деле, функтор X задаёт для каждого целого неотрицательного n множество $X_n = X([n])$, точки которого следует воспринимать как дизъюнктный набор n-мерных симплексов (1-7), из коих будет склеиваться пространство $|X|$. Стрелки $\varphi : [n] \to [m]$ в категории Δ_s биективно соответствуют n-мерным граням m-мерного симплекса Δ^m, и отображение $X(\varphi) : X_m \to X_n$, которое функтор X сопоставляет стрелке φ, задаёт *правило склейки*: оно указывает данному m-мерному симплексу $x \in X_m$, какой именно n-мерный симплекс $X(\varphi)x \in X_n$ надлежит приклеить к нему в качестве φ-той n-мерной грани.

Упражнение 1.4. Существует ли триангуляция окружности S^1 а) тремя 0-мерными и тремя 1-мерным симплексами[2] б) одним 0-мерным и одним 1-мерным симплексом, а также триангуляция двумерной сферы S^2 в) четырьмя 0-мерными, шестью 1-мерными и четырьмя 2-мерным симплексами г) двумя 0-мерными, одним 1-мерным и одним 2-мерным симплексом и д) триангуляция 2-мерного тора одним 0-мерным, тремя 1-мерными и двумя 2-мерным симплексами? Если да, задайте все отображения $X(\varphi)$ явно, если нет, объясните почему.

Пример 1.7 (симплициальные множества)
Предпучок множеств $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на всей симплициальной категории называется *симплициальным множеством*. Из симплициального множества X также можно изготовить топологическое пространство $|X|$, склеив стандартные правильные симплексы Δ^n_x, биективно сопоставленные точкам $x \in X_n$, согласно отображениям

$$\varphi^* \overset{\text{def}}{=} X(\varphi) : X_m \to X_n ,$$

предусмотренным функтором X для всех неубывающих отображений $\varphi : [n] \to [m]$ категории Δ. А именно, для каждого $x \in X_m$ надо приклеить каждую точку $s \in \Delta^n_{\varphi^*(x)}$ к точке $\varphi_*(s) \in \Delta^m_x$, где $\varphi_* : \Delta^n \to \Delta^m$ — аффинное отображение симплексов, действующее на вершины как φ. Результат такой склейки формально описывается как топологическое фактор пространство топологического произведения[3] $\prod\limits_{n\geqslant 0} X_n \times \Delta^n$ по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему все отождествления

$$\left(x, \varphi_* s\right) \simeq \left(\varphi^* x, s\right) , \quad \varphi : [n] \to [m] , \quad x \in X_m , \quad s \in \Delta^n .$$

[1] т. е. сохраняющие порядок и инъективные

[2] т. е. можно ли получить окружность в качестве геометричекой реализации полусимплициального множества X, у которого X_0 и X_1 состоят из трёх элементов, а все остальные X_i пусты

[3] в котором множества X_n рассматриваются с *дискретной*, а симплексы $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ со стандартной топологией объемлющего вещественного аффинного пространства

Стрелка $\varphi = \delta\sigma : [n] \to [m]$, являющаяся композицией наложения $\sigma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ и вложения $\delta : [k] \hookrightarrow [m]$, предписывает вклеить n-мерный симплекс Δ^n_z, отвечающий точке $z = \sigma^* y = \sigma^*\delta^* x$ из образа φ^*, в пространство $|X|$ в виде k-мерного симплекса Δ^k_y, предварительно выродив его линейной проекцией $\sigma_* : \Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^k$, и этот k-мерный симплекс станет δ-той гранью в m-мерного симплекса Δ^m_x. По этой причине симплексы $z \in X_n$, попадающие в образ какого-либо отображения σ^*, отвечающего стрелке $\sigma : [k] \to [n]$ с $k > n$, называются *вырожденными*: в пространстве $|X|$ их видно как симплексы меньшей размерности. Использование вырожденных симплексов позволяет комбинаторно описывать более общие клеточные структуры, чем триангуляции. Например, «псевдотриангуляция» n-мерной сферы S^n, состоящая из одной 0-нульмерной вершины и одной n-мерной клетки, соответствующая описанию сферы как топологического фактора $S^n = \Delta^n / \partial\Delta^n$ стандартного n-мерного симплекса по его границе[1], является геометрической реализацией $|X|$ симплициального множества $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, у которого $X_k = X(k)$ получается из множества $\mathrm{Hom}_\Delta([k],[n])$ отождествлением всех неэпиморфных отображений в один элемент, а правило склейки $\varphi^* : X_m \to X_k$, отвечающее неубывающему отображению $\varphi : [k] \to [m]$, переводит класс стрелки $\zeta : [k] \to [n]$ в класс стрелки $\varphi\zeta : [k] \to [n]$.

Упражнение 1.5. Убедитесь, что это описание корректно задаёт предпучок и найдите количество элементов в каждом множестве X_k, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Пример 1.8 (предпучки и пучки сечений)
Исторически, термин «предпучок» впервые возник в контексте категории $\mathcal{C} = \mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств $U \subset X$ заданного топологического пространства X. Предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset X$ объект $F(U) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, который называется *сечениями* предпучка F над U. В зависимости от категории $\mathcal{D}$ сечения могут образовывать множество, кольцо, алгебру, векторное или топологическое пространство и т. п. Морфизм $F(W) \to F(U)$, отвечающий включению $U \subset W$, называется *ограничением сечений*, определённых над W, на подмножество U, а результат его применения к сечению $s \in F(W)$ обозначается через $s|_U$. Вот несколько типичных примеров таких предпучков:

1) предпучок Γ_E локальных сечений непрерывного отображения $p : E \to X$ имеет в качестве $\Gamma_E(U)$ множество таких непрерывных отображений $s : U \to E$, что[2] $p \circ s = \mathrm{Id}_U$, а его отображения ограничения — это обычные ограничения сечений с большего подмножества на меньшее

2) беря в предыдущем примере в качестве отображения проекцию $p : X \times Y \to X$, получаем предпучок локальных непрерывных отображений $\mathcal{C}^0(X,Y)$ пространства X в пространство Y, имеющий в качестве сечений над $U \subset X$ непрерывные отображения $s : U \to Y$

3) дальнейшими специализациями являются так называемые *структурные предпучки* $\mathcal{O}_X$: предпучок дифференцируемых функций $X \to \mathbb{R}$ на гладком веще-

[1] т. е. склеивании всех точек границы в одну; скажем, двумерная сфера S^2 получается таким способом из треугольника

[2] это требование означает, что каждая точка $x \in U$ отображается в слой $p^{-1}(x)$ над нею

ственном многообразии X, предпучок локальных голоморфных функций $X \to \mathbb{C}$ на комплексно аналитическом многообразии X, предпучок локальных рациональных функций $X \to \Bbbk$ на алгебраическом многообразии X над полем $\Bbbk$ и т. п. (все они являются предпучками алгебр над соответствующим полем)

4) постоянный *предпучок* S имеет в качестве $S(U)$ одно и то же фиксированное множество S для всех $U \subset X$, и все его отображения ограничения — тождественные морфизмы Id_S.

Предпучок F называется *пучком*, если для любого открытого W, любого семейства открытых подмножеств $U_i \subset W$, покрывающих W, и любого набора локальных сечений $s_i \in F(U_i)$, таких что $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ для всех i, j, существует единственное такое сечение $s \in F(W)$, что $s|_{U_i} = s_i$ для всех i. В случае, когда имеется не более одного такого сечения (но может и не быть ни одного), предпучок F называется *отделимым*. Все предпучки (1) – (4) отделимы, и только последний из них — постоянный *предпучок* — не является пучком, поскольку для покрытия дизъюнктного объединения $W = U_1 \sqcup U_2$ множествами U_1, U_2 не всякая пара констант $s_i \in S(U_i)$ является ограничением одной константы $s \in S(W)$.

Упражнение 1.6. Убедитесь в том, что категория пучков $\mathcal{Sh}(X)$ является полной подкатегорией категории предпучков $p\mathcal{Sh}(X)$.

В заключение отметим, что наряду с постоянным предпучком в природе имеется и

5) постоянный *пучок* $S^{\sim}$, у которого $S^{\sim}(U)$ это *непрерывные* отображения $U \to S$ в множество S, рассматриваемое с *дискретной* топологией.

Упражнение 1.7. Опишите первообразные действительной функции $1/x$.

1.2.2. Функторы Hom. С каждым объектом $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ любой категории $\mathcal{C}$ связаны функтор $h^X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий объект Y в множество морфизмов

$$h^X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(X, Y),$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi_* : \mathrm{Hom}(X, Y_1) \to \mathrm{Hom}(X, Y_2)$ левого умножения на $\varphi : \varphi_*(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \circ \psi$, и предпучок $h_X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий объект Y в множество морфизмов

$$h_X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(Y, X),$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi^* : \mathrm{Hom}(Y_2, X) \to \mathrm{Hom}(Y_1, X)$ правого умножения на $\varphi : \varphi^*(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \psi \circ \varphi$.

Например, предпучок $h_{[n]} : \Delta_s \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории Δ_s задаёт стандартную триангуляцию стандартного n-мерного симплекса: множество её k-мерных симплексов $h_{[n]}([k]) = \mathrm{Hom}([k], [m])$ это в точности множество всех k-мерных граней. Предпучок $h_U : \mathcal{U}(X) \to \mathcal{S}et$ на топологическом пространстве X имеет ровно одно сечение над всеми $W \subset U$ и пустое множество сечений над любым $W \not\subset U$. Вот ещё несколько примеров.

Пример 1.9 (двойственность в категории векторных пространств)
Предпучок $h_{\Bbbk} : \mathcal{V}ec_{\Bbbk}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ сопоставляет векторному пространству V двойственное векторное пространство $h_{\Bbbk}(V) = \mathrm{Hom}(V, \Bbbk) = V^*$, а линейному отображению

$\varphi : V \to W$ — двойственное отображение $\varphi^* : W^* \to V^*$, переводящее линейную форму $\xi : W \to \Bbbk$ в линейную форму $\xi \circ \varphi : V \to \Bbbk$.

Пример 1.10 (двойственность конечных упорядоченных множеств)
Это комбинаторная версия предыдущего примера. Обозначим через через ∇_{big} категорию конечных упорядоченных множеств, содержащих $\geqslant 2$ элементов, морфизмами в которой являются неубывающие отображения, переводящие минимальный элемент в минимальный, а максимальный — в максимальный[1]. Тавтологическое включение $\nabla_{\text{big}} \hookrightarrow \varDelta_{\text{big}}$ является строгим, но не полным функтором. Предпучки

$$h_{[1]} : \varDelta_{\text{big}}^{\text{opp}} \to \nabla_{\text{big}} \quad \text{и} \quad h_{[1]} : \nabla_{\text{big}}^{\text{opp}} \to \varDelta_{\text{big}}$$

переводят упорядоченные множества $X \in \operatorname{Ob} \varDelta_{\text{big}}$ и $Y \in \operatorname{Ob} \nabla_{\text{big}}$ в множества

$$X^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\varDelta_{\text{big}}}(X, [1]) \quad \text{и} \quad Y^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\nabla_{\text{big}}}(Y, [1]),$$

порядок на которых задаётся поточечным сравнением значений:

$$\varphi \leqslant \psi, \quad \text{если } \varphi(x) \leqslant \psi(x) \text{ для всех } x.$$

Стрелка $\varphi : Z_1 \to Z_2$ переводится обоими функторами в морфизм правого умножения $\varphi^* : \operatorname{Hom}(Z_2, [1]) \to \operatorname{Hom}(Z_1, [1])$, $\xi \mapsto \xi \circ \varphi$.

По-другому можно сказать, что оба дуализирующих предпучка $h_{[1]}$ сопоставляют конечному упорядоченному множеству Z множество его «дедекиндовых сечений»: множество X^* для $X \in \operatorname{Ob} \varDelta_{\text{big}}$ это множество *всех*[2] таких разбиений $X = X_0 \sqcup X_1$, что $x_0 < x_1$ для всех $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$. Аналогично, множество Y^* для $Y \in \operatorname{Ob} \nabla_{\text{big}}$ это множество всех *собственных*[3] разбиений $Y = Y_0 \sqcup Y_1$. Обратите внимание, что сечения ведут себя *контра*вариантно по отношению к морфизмам: при наличии неубывающего отображения $Z_1 \to Z_2$ разбиение второго множества Z_2 индуцирует разбиение на Z_1, но не наоборот.

1.3. Естественные преобразования. Для пары функторов $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *естественным* (или *функториальным*) *преобразованием* F в G называется такое занумерованное объектами $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ семейство стрелок $f_X : F(X) \to G(X)$ в категории $\mathcal{D}$, что для любой стрелки $\varphi : X \to Y$ из $\mathcal{C}$ возникающая в категории $\mathcal{D}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "f_X"'] & F(Y) \arrow[d, "f_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\varphi)"'] & G(Y) \end{tikzcd} \tag{1-8}$$

коммутативна. На языке алгебр, гомоморфизм $F : K[\mathcal{C}] \to K[\mathcal{D}]$ наделяет алгебру $K[\mathcal{D}]$ структурой модуля над алгеброй $K[\mathcal{C}]$, в которой умножение элемента $b \in K[\mathcal{D}]$ на элемент $a \in K[\mathcal{C}]$ определяется правилом $a \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} F(a) \cdot b$. Пара функторов F, G

[1] отметим, что минимальный и максимальный элементы различны
[2] включая несобственные разбиения, в которых одно из подмножеств X_i пустое
[3] т. е. таких, что оба $Y_i \neq \varnothing$

задаёт на алгебре $K[\mathcal{D}]$ две различных структуры $K[\mathcal{C}]$-модуля, и естественное преобразование $f : F \to G$ это $K[\mathcal{C}]$-линейный гомоморфизм между этими модулями: для любого $\varphi \in K[\mathcal{C}]$ действие на $K[\mathcal{D}]$ операторов $F(\varphi)$ и $G(\varphi)$ удовлетворяет соотношению $f \circ F(\varphi) = G(\varphi) \circ f$.

Пример 1.11 (категория функторов)
Функторы из малой категории $\mathcal{C}$ в произвольную категорию $\mathcal{D}$ образуют категорию $\mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, объектами которой являются функторы $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, а морфизмами — естественные преобразования $f : F \to G$. Для малой категории $\mathcal{C}$ мы будем обозначать категорию предпучков $\mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathcal{D})$ через $p\mathcal{S}h(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Опущенная буква $\mathcal{D}$ в этой записи по умолчанию означает, что $\mathcal{D} = \mathcal{S}et$, т. е. $p\mathcal{S}h(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathcal{S}et)$.

Упражнение 1.8. Проверьте, что описанное в n° 1.2.2 сопоставление $X \mapsto h_X$ задаёт функтор $\mathcal{C} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$, а сопоставление $X \mapsto h^X$ — предпучок $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{S}et)$.

1.3.1. Эквивалентности категорий. Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *эквивалентными*, если между ними есть такие функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, что композиция GF естественно изоморфна тождественному функтору $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, а композиция FG естественно изоморфна $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, т. е. имеются естественные по $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ преобразования

$$GF(X) \simeq X \quad \text{и} \quad FG(Y) \simeq Y\,, \tag{1-9}$$

являющиеся для всех X и Y изоморфизмами в категориях $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ соответственно. Такие функторы F и G называются *квазиобратными* друг другу *эквивалентностями категорий*. Подчеркнём, что наличие изоморфизмов (1-9) не означает равенств $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ или $GF = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$: объекты $GF(X)$ и X могут быть различны, как и объекты $FG(Y)$ и Y.

Пример 1.12 (выбор базиса)
Обозначим через $vec_{\Bbbk}$ категорию конечномерных векторных пространств над полем $\Bbbk$, а через $\mathcal{C} \subset vec_{\Bbbk}$ — её малую полную подкатегорию со счётным множеством объектов, коими являются *координатные* пространства $\Bbbk^n$, где $n \geqslant 0$ и $\Bbbk^0 = \{0\}$. Зафиксируем в каждом пространстве $V \in \mathrm{Ob}\,vec_{\Bbbk}$ какой-нибудь базис, т. е. выберем для каждого $V \in \mathrm{Ob}\,vec_{\Bbbk}$ изоморфизм[1]

$$f_V : V \simeq \Bbbk^{\dim(V)}\,, \tag{1-10}$$

причём для всех координатных пространств $\Bbbk^n$ положим $f_{\Bbbk^n} = \mathrm{Id}_{\Bbbk^n}$. Рассмотрим функтор $F : vec \to \mathcal{C}$, переводящий векторное пространство V в координатное пространство $\Bbbk^{\dim V}$, а стрелку $\varphi : V \to W$ — в стрелку $F(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}$, которую можно воспринимать как матрицу оператора φ в выбранных базисах пространств V и W. Покажем, что F является эквивалентностью категорий, квазиобратной к тавтологическому вложению $G : \mathcal{C} \hookrightarrow vec$. По построению мы имеем точное равенство[2] $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. Противоположная композиция $GF : vec \to vec$ принимает значения в несопоставимой с vec по мощности малой подкатегории $\mathcal{C} \subset vec$. Однако изоморфизмы (1-10) задают естественное преобразование из Id_{vec} в GF, т. к. в силу определения действия

[1] переводящий выбранный базис в стандартный базис в $\Bbbk^n$

[2] а не изоморфизм функторов

функтора F на стрелки все диаграммы (1-8) коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{vec}(V) = V \arrow[r, "\varphi=\mathrm{Id}_{vec}(\varphi)"] \arrow[d, "f_V"'] & W = \mathrm{Id}_{vec}(W) \arrow[d, "f_W"] \\
GF(V) = \Bbbk^{\dim V} \arrow[r, "GF(\varphi)=f_W\circ\varphi\circ f_V^{-1}"] & \Bbbk^{\dim W} = GF(W)
\end{tikzcd}$$

Тем самым, тождественный функтор Id_{vec} естественно изоморфен композиции GF.

Упражнение 1.9. Покажите, что категория Δ_{big} канонически эквивалентна симплициалной подкатегории $\Delta \subset \Delta_{\mathrm{big}}$ (см. прим. 1.4 на стр. 4).

Лемма 1.1
Функтор $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда задаёт эквивалентность категорий, когда он вполне строг[1] и каждый объект $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ изоморфен объекту вида $G(X)$ для некоторого (зависящего от Y) объекта[2] $X = X(Y) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть для каждого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ указаны $X = X(Y) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и изоморфизм $f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X)$, причём когда $Y = G(X(Y))$, мы положим $f_{G(X)} = \mathrm{Id}_{G(X)}$. Зададим функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ на объектах правилом $F(Y) = X(Y)$, а для стрелки $\varphi : Y_1 \to Y_2$ положим $F(\varphi)$ равным такой стрелке[3] $\psi : X(Y_1) \to X(Y_2)$, что $G(\psi) = f_{Y_2} \circ \varphi \circ f_{Y_1}^{-1}$. Тогда $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ и для любой стрелки $\varphi : Y_1 \to Y_2$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}(Y_1) = Y_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_{Y_1}"'] & Y_2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}(Y_2) \arrow[d, "f_{Y_2}"] \\
GF(Y_1) = X_1 \arrow[r, "GF(\varphi)=G(\psi)"] & X_2 = GF(Y_2)\,.
\end{tikzcd}$$

Таким образом, $f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X) = GF(Y)$ задают естественный изоморфизм тождественного функтора $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ с композицией GF. □

Упражнение 1.10. Покажите, что функторы дуализации из прим. 1.9 и прим. 1.10 являются квазиобратными самим себе антиэквивалентностями категорий.

1.4. Представимые функторы. Предпучок $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, естественно изоморфный предпучку h_X для некоторого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, называется *представимым*, и X в этом случае называют *представляющим объектом* предпучка F. Двойственным образом, ковариантный функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ называется *копредставимым*, если он естественно изоморфен функтору h^X для некоторого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, называемого *копредставляющим объектом* функтора F.

Упражнение 1.11. Убедитесь, что тензорное произведение конечномерных векторных пространств $U \otimes V$ копредставляет функтор $\mathcal{V}ec \to \mathcal{S}et$, сопоставляющий векторному пространству W множество билинейных отображений $U \times V \to W$.

[1] т. е. все отображения $G : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(Y))$ являются изоморфизмами

[2] функторы G, обладающие этим свойством, называются*по-существу сюрьективными* (*essentially surjective*)

[3] поскольку $G : \mathrm{Hom}(X_1, X_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(G(X_1), G(X_2))$ является изоморфизмом, стрелка ψ существует и единственна

Множество $X_n = X([n])$ всех n-мерных симплексов триангулированного топологического пространства $X : \Delta_s^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ можно описать как множество всех *симплициальных*[1] отображений из стандартным образом триангулированного n-мерного симплекса в X, т. е. как $\mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\Delta_s)}\left(h_{[n]}, X\right)$. Обобщением этого наблюдения является

Лемма 1.2 (лемма Ионеды 1)
Для любого предпучка множеств $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на произвольной категории $\mathcal{C}$ имеется функториальная по $F \in p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$ и по $A \in \mathcal{C}$ биекция $F(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, F)$, переводящая элемент $a \in F(A)$ в естественное преобразование

$$f_X : \mathrm{Hom}(X, A) \to F(X), \tag{1-11}$$

которое посылает стрелку $\varphi : X \to A$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратная биекция сопоставляет каждому естественному преобразованию (1-11) значение отображения $f_A : h_A(A) \to F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h_A(A)$.

Доказательство. Для любого естественного преобразования (1-11), любого объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любой стрелки $\varphi : X \to A$ мы имеем коммутативную диаграмму (1-8)

$$\begin{tikzcd} h_A(A) = \mathrm{Hom}(A,A) \arrow[r, "h_A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \mathrm{Hom}(X,A) = h_A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X)\,, \end{tikzcd} \tag{1-12}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\mathrm{Id}_A)\big)$. Это означает, что естественное преобразование $f : h_A \to F$ однозначно восстанавливается по элементу $a = f_A(\mathrm{Id}_A) \in F(A)$. Каждому элементу $a \in F(A)$ при этом отвечает преобразование (1-11), переводящее $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, A)$ в $f_X(\varphi) = F(\varphi)(a) \in F(X)$, естественное, поскольку для любой стрелки $\psi : Y \to X$ и всех $\varphi \in h_A(X)$ имеем $f_Y\left(h_A(\psi)\varphi\right) = f_Y(\varphi\psi) = F(\varphi\psi)a = F(\psi)F(\varphi)a = F(\psi)\left(f_X(\varphi)\right)$, т. е. $f_Y \circ h_A(\psi) = F(\psi) \circ f_X$ как отображения $h_A(X) \to F(Y)$. □

Упражнение 1.12 (лемма Ионеды 2). Для ковариантного функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ постройте функториальную по F и $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ биекцию $F(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{S}et)}(h^A, F)$.

Следствие 1.1
Функторы $X \mapsto h_X$ и $X \mapsto h^X$ задают вполне строгие ковариантное и контравариантное вложения категории $\mathcal{C}$ в категории предпучков и ковариантных функторов соответственно. Иными словами, имеются функториальные по $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ изоморфизмы $\mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, h_B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C})}(h^A, h^B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

Доказательство. Применяем леммы Ионеды к функторам $F = h_B$ и $F = h^B$. □

Следствие 1.2
Если объект $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, копредставляющий функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ (соотв. представляющий предпучок $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$) существует, то он единствен с точностью до канонического изоморфизма.

[1] т. е. переводящих грань в грань той же размерности и линейных на каждой грани

Доказательство. Если имеются два таких объекта A, B, что $F = h^A = h^B$ (соотв. $F = h_A = h_B$), то тождественному естественному преобразованию $\mathrm{Id}_F : F \to F$ отвечает по сл. 1.1 изоморфизм $B \xrightarrow{\sim} A$ (соотв. $A \xrightarrow{\sim} B$). □

1.4.1. Описание объектов универсальными свойствами. При помощи сл. 1.2 можно переносить теоретико множественные конструкции из категории $\mathcal{S}et$ в произвольные категории. А именно, будем называть результатом применения интересующей нас теоретико множественной операции к набору объектов $X_i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ такой объект $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, который представляет предпучок $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, переводящий $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ в результат применения рассматриваемой операции к множествам $\mathrm{Hom}(Y, X_i)$. Разумеется, это неявное описание не даёт никаких гарантий *существования* определяемого объекта — функтор вполне может оказаться непредставимым. Но если он представим, то представляющий объект X, во-первых, автоматически обладает некоторыми «универсальными свойствами», а во-вторых, единствен с точностью до *единственного* изоморфизма, сохраняющего эти свойства.

Пример 1.13 (произведение $A \times B$)
Определим *произведение* $A \times B$ объектов $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ как объект, представляющий функтор $Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y, A) \times \mathrm{Hom}(Y, B)$ из $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ в $\mathcal{S}et$. Если он существует, то для всех Y имеется функториальный по Y изоморфизм

$$\beta_Y : \mathrm{Hom}(Y, A \times B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Y, A) \times \mathrm{Hom}(Y, B)\,.$$

Полагая в нём $Y = A \times B$, получаем пару стрелок $A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$, изображающих элемент $\beta_{A\times B}(\mathrm{Id}_{A\times B}) \in \mathrm{Hom}(A \times B, A) \times \mathrm{Hom}(A \times B, B)$. Она универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок $A \xleftarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} B$ существует единственная такая стрелка $\varphi \times \psi : Y \to A \times B$, что $\varphi = \pi_A \circ (\varphi \times \psi)$ и $\psi = \pi_B \circ (\varphi \times \psi)$.

Упражнение 1.13. Убедитесь, что а) для каждой диаграммы $A \xleftarrow{\pi'_A} C \xrightarrow{\pi'_B} B$, также обладающей этим универсальным свойством, имеется единственный изоморфизм $\gamma : C \xrightarrow{\sim} A \times B$, такой что $\pi_A \circ \gamma = \pi'_A$ и $\pi_B \circ \gamma = \pi'_B$ б) любая пара стрелок $\alpha : A_1 \to A_2$ и $\beta : B_1 \to B_2$ задаёт единственный такой морфизм $\alpha \times \beta : A_1 \times B_1 \to A_2 \times B_2$, что $\alpha \circ \pi_A = (\alpha \times \beta) \circ \alpha$ и $\beta \circ \pi_B = (\alpha \times \beta) \circ \beta$.

В категории множеств произведение $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$. Снабжённое слабейшей топологией, в которой π_A и π_B непрерывны, это множество задаёт произведение и в категории топологических пространств. Снабжённое покомпонентными операциями, оно же является произведением групп, колец и модулей над кольцами.

Пример 1.14 (копроизведение $A \otimes B$)
Двойственным образом, копроизведение $A \otimes B$ объектов $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ определяется как объект, копредставляющий ковариантный функтор $Y \mapsto \mathrm{Hom}(A, Y) \times \mathrm{Hom}(B, Y)$ из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{S}et$. Обращая все стрелки в предыдущем примере, мы можем охарактеризовать копроизведение как объект, включающийся в диаграмму $A \xrightarrow{\iota_A} A \otimes B \xleftarrow{\iota_B} B$, универсальную в том смысле, что для любой пары стрелок $A \xrightarrow{\varphi} Y \xleftarrow{\psi} B$ в $\mathcal{C}$ имеется единственный такой морфизм $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \to Y$, что $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_A$ и

$\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_B$.

Упражнение 1.14. Убедитесь, что если универсальная тройка $A \xrightarrow{\iota_A} A \otimes B \xleftarrow{\iota_B} B$ существует, то а) она единственна с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с ι_A и ι_B б) любая пара стрелок $\alpha : A_1 \to A_2$ и $\beta : B_1 \to B_2$ задаёт единственный такой морфизм $\alpha \otimes \beta : A_1 \otimes B_1 \to A_2 \otimes B_2$, что $\iota_A \circ \alpha = (\alpha \otimes \beta) \circ \alpha$.

В категории множеств и топологических пространств копроизведение $A \otimes B = A \sqcup B$ это дизъюнктное объединение. В категории групп $A \otimes B = A * B$ это свободное произведение групп[1]. В категории модулей над кольцом[2] $A \otimes B = A \times B = A \oplus B$ это прямая сумма модулей. В категории коммутативных колец с единицей $A \otimes B$ это тензорное произведение колец[3].

1.5. Сопряжённые функторы. Если функторы $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ между категориями $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ связаны функториальным по $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ изоморфизмом

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \tag{1-13}$$

то F называется *левым сопряжённым* функтором к G, а G — *правым сопряжённым* к F. С каждой парой сопряжённых функторов связаны естественные преобразования

$$t : F \circ G \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F\,. \tag{1-14}$$

Стрелка $t_Y : FG(Y) \to Y$, задающая действие преобразования t над $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, является образом элемента $\operatorname{Id}_{G(Y)}$ при изоморфизме (1-13), написанном для $X = G(Y)$:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \ni \operatorname{Id}_{G(Y)}\,.$$

Двойственным образом, стрелка $s_X : X \to GF(X)$ получается из $\operatorname{Id}_{F(X)}$ при изоморфизме (1-13), написанном для $Y = F(X)$:

$$\operatorname{Id}_{F(X)} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X))\,.$$

Пример 1.15 (свободные модули)
Обозначим через $R\text{-}\mathcal{M}od$ категорию левых модулей над фиксированным кольцом R, а через $S : R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et$ — забывающий функтор, сопоставляющий модулю множество его элементов. Для любого множества $E \in \operatorname{Ob}\mathcal{S}et$ ковариантный функтор $R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et$, $M \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}et}\big(E, G(M)\big)$, копредставим *свободным* R-модулем с базисом E. Мы будем обозначать такой свободный модуль через $R \otimes E$. По определению, он состоит из

[1] т. е. фактор свободной группы, порождённой дизъюнктным объединением $A \setminus e$ с $B \setminus e$, по наименьшей нормальной подгруппе соотношений, позволяющих заменять пару соседних и лежащих в одной группе букв их произведением; так, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \mathbb{F}_2$ это свободная (некоммутативная) группа с двумя образующими

[2] в частности, абелевых групп

[3] т. е. тензорное произведение подлежащих абелевых групп, как модулей над $\mathbb{Z}$, с покомпонентным умножением: $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \overset{\text{def}}{=} (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$

формальных линейных комбинаций $\sum\limits_{e\in E} x_e e$ элементов множества E с коэффициентами $x_e \in R$, лишь конечное число из которых отлично от нуля.

Упражнение 1.15. Установите функториальный по M и E изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathcal{Mod}}(R\otimes E, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Set}}\big(E, S(M)\big)\,. \tag{1-15}$$

Изоморфизм (1-15) означает, что функтор $E \mapsto R\otimes E$ является левым сопряжённым к забывающему функтору S. Естественное преобразование $s_E : E \hookrightarrow S(A\otimes E)$ вкладывает E в качестве множества базисных векторов в множество всех векторов свободного модуля $R\otimes E$, а естественное преобразование $t_M : R\otimes S(M) \twoheadrightarrow M$ задаёт R-линейный эпиморфизм из огромного свободного модуля, базисом в котором является множество всех векторов модуля M, на модуль M, переводя базисный вектор m в элемент $m \in M$, а формальную линейную комбинацию базисных векторов — в точно такую же комбинацию, но вычисленную внутри M. Например, при $M = R = \mathbb{R}$ векторное пространство $\mathbb{R}\otimes S(\mathbb{R})$ изоморфно пространству всех функций $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с конечным носителем, а преобразование $t_{\mathbb{R}}$ сопоставляет такой функции вещественное число, равное сумме всех её (ненулевых) значений.

1.5.1. Тензорные произведения и Hom. Пусть R — произвольное кольцо с единицей. Тензорным произведением $M\underset{R}{\otimes}N$ правого R-модуля M на левый R-модуль N называется фактор тензорного произведения абелевых групп[1] $M\otimes N$ по подгруппе, порождённой всевозможными разностями

$$(mx)\otimes n - m\otimes(xn)\,,\quad \text{где}\quad m\in M\,,\ x\in R\,,\ n\in N\,.$$

Это абелева группа, на которой кольцо R никак не действует, но в которой выполняются соотношения $(mx)\underset{R}{\otimes}n = m\underset{R}{\otimes}(xn)$. Тензорное умножение на фиксированный левый R-модуль N задаёт функтор из категории правых R-модулей в абелевы группы

$$\mathcal{Mod}\text{-}R \to \mathcal{Ab}\,,\quad X\mapsto X\underset{R}{\otimes}N\,,$$

переводящий стрелку $\varphi : X_1\to X_2$ в стрелку $\varphi\otimes 1 : m\underset{R}{\otimes}n \mapsto \varphi(m)\underset{R}{\otimes}n$. Если левый R-модуль N одновременно является правым модулем над ещё одним кольцом S с единицей и правое действие S коммутирует с левым действием R (такие N называются *R-S бимодулями*), функтор тензорного умножения на N отображает $\mathcal{Mod}\text{-}R$ в $\mathcal{Mod}\text{-}S$: кольцо S действует на $M\otimes N$ справа по правилу $(m\otimes n)y = m\otimes(ny)$. С другой стороны, имеется функтор $h^N : \mathcal{Mod}\text{-}S \to \mathcal{Ab}$, $Y\mapsto \mathrm{Hom}_S(N,Y)$, который принимает значения в $\mathcal{Mod}\text{-}R$: правое действие $x\in R$ на $\mathrm{Hom}_S(N,Y)$ переводит S-линейную справа стрелку $\varphi : N\to Y$ в стрелку $\varphi x : n\mapsto \varphi(xn)$ (так что выполняется равенство $(\varphi x)n = \varphi(xn)$).

Предложение 1.1

Тензорное умножение на R-S-бимодуль N сопряжено слева функтору h^N, т. е. имеется естественный по $X\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{Mod}\text{-}R$ и $Y\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{Mod}\text{-}S$ изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Mod}\text{-}S}\big(X\underset{R}{\otimes}N, Y\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Mod}\text{-}R}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{Mod}\text{-}S}(N,Y)\big)\,. \tag{1-16}$$

[1] или, что то же самое, $\mathbb{Z}$-модулей

Доказательство. Отображение из левой части (1-16) в правую сопоставляет S-линейному справа гомоморфизму $\varphi : X \underset{R}{\otimes} N \to Y$ зависящее от $x \in X$ семейство гомоморфизмов $\varphi_x : N \to Y$, $n \mapsto \varphi(x \otimes n)$. Каждый из них S-линеен справа:

$$\varphi_x(ns) = \varphi(x \underset{R}{\otimes} ns) = \varphi(x \underset{R}{\otimes} n)s = \varphi_x(n)s\,,$$

а сопоставление $x \mapsto \varphi_x$, как отображение $X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y)$, R-линейно справа:

$$\varphi_{xr}n = \varphi(xr \underset{R}{\otimes} n) = \varphi(x \underset{R}{\otimes} rn) = \varphi_x(rn) = (\varphi_x r)n\,.$$

Обратное отображение из правой части (1-16) в левую переводит семейство S-линейных справа гомоморфизмов $\varphi_x : N \to Y$, которые R-линейно справа зависят от $x \in X$, в S-линейный справа гомоморфизм $\varphi : x \underset{R}{\otimes} n \mapsto \psi_x(n)$. □

Упражнение 1.16. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y) \underset{R}{\otimes} N \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(N, X \underset{R}{\otimes} N\big)\,.$$

Пример 1.16 (индуцирование и коиндуцирование)
Если кольцо A содержится в кольце B и у них общая единица, каждый правый B-модуль X одновременно является и правым A-модулем, что задаёт *функтор ограничения*

$$\mathrm{res} : \mathcal{M}od\text{-}B \to \mathcal{M}od\text{-}A\,. \tag{1-17}$$

Рассматривая B как B-A бимодуль и беря в предл. 1.1 $S = A$, а $N = R = B$, получим в качестве правого A-модуля $X \underset{B}{\otimes} B \simeq \mathrm{res}\, X$ ограничение A-модуля X и функториальный по B-модулю X и A-модулю Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(\mathrm{res}\, X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)\big)\,.$$

Правый B-модуль $\mathrm{coind}\, Y \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)$ называется *коиндуцированным* с A-модуля Y. Функтор коиндуцирования $\mathrm{coind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён справа к функтору ограничения.

Упражнение 1.17. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \mathrm{Hom}_A(B, Y) \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \mathrm{Hom}_A(B, X)\,.$$

Рассматривая B как A-B бимодуль и полагая в предл. 1.1 $S = N = B$, а $R = A$, получим в качестве правого A-модуля $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(B, Y) \simeq \mathrm{res}\, Y$ ограничение B-модуля Y, и функториальный по A-модулю X и B-модулю Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(X \underset{A}{\otimes} B, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(X, \mathrm{res}\, Y)\,.$$

Правый B-модуль $\mathrm{ind}\, X \overset{\text{def}}{=} X \underset{A}{\otimes} B$ называется *индуцированным* с A-модуля X. Функтор индуцирования $\mathrm{ind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён слева к функтору ограничения.

Упражнение 1.18. Явно опишите естественные преобразования

$$\lambda_Y : Y \underset{A}{\otimes} B \to Y \quad \text{и} \quad \varrho_X : X \to X \underset{A}{\otimes} B\,.$$

В ситуации, когда $A = \Bbbk[H]$ и $B = \Bbbk[G]$ являются групповыми алгебрами (с коэффициентами в поле $\Bbbk$) конечной группы G и её подгруппы H, мы получаем известные из начального курса алгебры функторы (ко)индуцирования линейных представлений[1] (над полем $\Bbbk$) группы G с представлений её подгруппы H.

Пример 1.17 (сингулярные симплексы)

Свяжем с топологическим пространством Y симплициальное множество его *сингулярных симплексов* $S(Y) : \varDelta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, которое сопоставляет комбинаторному симплексу $[n] \in \operatorname{Ob}\varDelta$ множество $S_n(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(\varDelta^n, Y) = h_Y(\varDelta^n)$ всех непрерывных отображений правильного n-мерного симплекса $\varDelta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в Y, а неубывающему отображению $\varphi : [n] \to [m]$ — правое умножение $f \mapsto f \circ \varphi^*$ на аффинное отображение $\varphi^* : \varDelta^m \to \varDelta^n$, действие которого на вершины симплекса совпадает с φ. Возникающий таким образом функтор $S : \mathcal{T}op \to p\mathcal{S}h(\varDelta)$ сопряжён справа функтору геометрической реализации $p\mathcal{S}h(\varDelta) \to \mathcal{T}op$, $X \mapsto |X|$, из прим. 1.7 на стр. 7, ибо имеет место естественный по симплициальному множеству X и топологическому пространству Y изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y) \simeq \operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h}(X, S(Y)), \tag{1-18}$$

являющийся категорным аналогом изоморфизма (1-16) для модулей над кольцами. В самом деле, функтор геометрической реализации вкладывает категорию $\varDelta$ в категорию $\mathcal{T}op$ в виде дизъюнктного набора $D = \bigsqcup\limits_{n\geqslant 0} \varDelta^n$ правильных симплексов, на котором имеется левое действие стрелок φ категории $\varDelta$ аффинными отображениями и коммутирующее с ним правое действие стрелок категории $\mathcal{T}op$, непрерывно отображающих D в произвольные топологические пространства. Поэтому множество сингулярных симплексов $S(Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)$ является правым модулем над категорией $\varDelta$, как и симплициальное множество X, геометрическую реализацию которого можно понимать как произведение $|X| = X \underset{\varDelta}{\otimes} D$ — фактор дизъюнктного объединения $\bigsqcup\limits_{n\geqslant 0} X_n \times \varDelta^n$ по соотношениям $(x\varphi, s) = (x, \varphi s)$, что превращает изоморфизм (1-18) в

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}\big(X \underset{\varDelta}{\otimes} D, Y\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}\varDelta}\big(X, \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)\big), \tag{1-19}$$

уже ничем не отличающийся от (1-16).

Упражнение 1.19. Постройте взаимно обратные изоморфизмы в (1-19) явно и опишите естественные преобразования

$$t_Y : \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y) \underset{\varDelta}{\otimes} D \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}\big(D, X \underset{\varDelta}{\otimes} D\big).$$

Предложение 1.2

Для существования левого сопряжённого функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ к данному функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ функтор

$$h_G^X : \mathcal{D} \to \mathcal{S}et, \quad Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big), \tag{1-20}$$

был копредставим, и в этом случае $F(X)$ является его копредставляющим объектом.

[1] в этом случае функторы индуцирования и коиндуцирования изоморфны

Доказательство. Необходимость очевидна из определений. Докажем достаточность. Пусть для каждого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ функтор (1-20) представляется объектом $F(X)$, т. е. имеется естественный изоморфизм функторов $f^X : h^{F(X)} \xrightarrow{\sim} h^X_G$. Чтобы продолжить соответствие $X \mapsto F(X)$ до функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ заметим, что морфизм $\varphi : X_1 \to X_2$ задаёт естественное преобразование $\varphi^* : h^{X_2}_G \to h^{X_1}_G$ заключающееся в правом умножении на φ: стрелка $\psi : X_2 \to G(Y)$ переходит в $\psi\varphi : X_1 \to G(Y)$. По сл. 1.1 из леммы Ионеды композиция естественных преобразований $\left(f^{X_1}\right)^{-1} \circ \varphi^* \circ f^{X_2} : h^{F(X_2)} \to h^{F(X_1)}$ задаётся правым умножением на единственную стрелку $F(X_1) \to F(X_2)$, которую мы и объявим образом $F(\varphi)$ стрелки φ под действием функтора F. Прямо по построению мы получаем функториальный по X изоморфизм $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. □

Упражнение 1.20. Докажите двойственное утверждение: для существования правого сопряжённого функтора G к функтору $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ был представим предпучок $h^G_Y : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$, и $G(X)$ в этом случае его и представляет.

Предложение 1.3

Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, когда существуют такие естественные преобразования $t : F \circ G \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ и $s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$, что композиции $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ и $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$ являются тождественными эндоморфизмами функторов F и G.

Доказательство. Если имеются функториальные по X и Y изоморфизмы

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), Y\big) \arrow[r, bend left, "\varrho"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big) \arrow[l, bend left, "\lambda"] \end{tikzcd} \tag{1-21}$$

то для любой стрелки $\varphi : X_1 \to X_2$ в $\mathcal{C}$ и любого Y из $\mathcal{D}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_1), Y) & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, G(Y)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_2), Y) \arrow[u, "F(\varphi)^*"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, G(Y)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \arrow[u, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которой задаются правым умножением на $F(\varphi)$ и на φ соответственно. Рисуя это для $Y = F(X)$ и морфизма $\varphi = s_X : X \to GF(X)$, который задаёт действие над объектом X естественного преобразования $s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ из форм. (1-14) на стр. 15, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FGF(X), F(X)) \arrow[u, "F(s_X)^*"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X), GF(X)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \arrow[u, "s_X^*"'] \end{tikzcd}$$

верхняя стрелка λ которой переводит s_X в $\operatorname{Id}_{F(X)}$, а нижняя стрелка λ переводит $\operatorname{Id}_{GF(X)}$ в морфизм $t_{F(X)} : FGF(X) \to F(X)$, задающий действие второго естественного преобразования $t : FG \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ из формулы (1-14) над объектом $F(X)$. Таким образом,

$$\operatorname{Id}_{F(X)} = \lambda(s_X) = \lambda s_X^* \left(\operatorname{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^* \lambda \left(\operatorname{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^* \left(t_{F(X)}\right) = t_{F(X)} \circ F(s_X),$$

а это и значит, что композиция $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ задаёт тождественное преобразование функтора F. Проверка того, что $G \xrightarrow{s\circ G} GFG \xrightarrow{G\circ t} G$ совпадает с Id_G полностью симметрична. Наоборот, если имеются преобразования $s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ и $t : FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, зададим в (1-21) действие λ и ϱ на стрелки $\varphi : F(X) \to Y$ и $\psi : X \to G(Y)$ правилами:

$$\varrho(\varphi) = G(\varphi) \circ s_X \quad \text{и} \quad \lambda(\psi) = t_Y \circ F(\psi)\,,$$

в правых частях которых стоят сквозные отображения вдоль стрелок

$$X \xrightarrow{s_X} GF(X) \xrightarrow{G(\varphi)} G(Y) \quad \text{и} \quad F(X) \xrightarrow{F(\psi)} FG(Y) \xrightarrow{t_Y} Y\,.$$

Композиция $\lambda\varrho(\varphi) = t_Y \circ FG(\varphi) \circ F(s_X) : F(X) \to Y$ представляет собою путь из левого нижнего угла в правый верхний на диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & F(X) \arrow[rr, "\varphi"] & & Y \\
F(X) \arrow[ur, equal, "\mathrm{Id}_{F(X)}"] \arrow[rr, "F(s_X)"'] & & FGF(X) \arrow[ul, "t_{F(X)}"'] \arrow[rr, "FG(\varphi)"'] & & FG(Y) \arrow[ul, "t_Y"']
\end{tikzcd}$$

правый параллелограмм которой коммутативен в силу естественности преобразования t, а левый треугольник — в силу равенства $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ и Id_F. Поэтому $\lambda\varrho(\varphi) = \varphi$. Равенство $\varrho\lambda(\psi) = \psi$ проверяется симметричным образом. □

1.6. Пределы диаграмм. Любую малую категорию $\mathcal{N}$ можно воспринимать как диаграмму, вершинами которой служат объекты, а стрелками — морфизмы категории $\mathcal{N}$. Всякий функтор $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ даёт реализацию такой диаграммы в категории $\mathcal{C}$, т. е. является диаграммой в категории $\mathcal{C}$ с вершинами в объектах $X_\nu = X(\nu)$, занумерованных множеством $\mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, и стрелками $\varkappa_{\mu\nu} = X(\nu \to \mu) : X_\nu \to X_\mu$, занумерованными множеством $\mathrm{Mor}\,\mathcal{N}$. Каждый объект $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ задаёт *постоянную диаграмму* $\overline{Y}$, в которой все объекты $\overline{Y}_\nu = Y$ и все стрелки равны Id_Y. С любой диаграммой $X \in \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ связан предпучок множеств $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{Y}, X)$. Если он представим, т. е. существует такой объект $L \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, что имеется естественный по $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, L) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{Y}, X)\,, \tag{1-22}$$

то представляющий объект L называют *пределом*[1] диаграммы X и пишут $L = \lim X_\nu$. Двойственным образом, объект $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, копредставляющий ассоциированный с диаграммой X ковариантный функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{Y})$, называется *копределом*[2] диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и обозначается $C = \mathrm{colim}\, X_\nu$. В этом случае имеется функториальная по $Y \in \mathcal{C}$ биекция

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{Y})\,. \tag{1-23}$$

Как и все (ко) представляющие объекты, (ко) пределы однозначно характеризуются своими «универсальными свойствами». А именно, полагая $Y = L$ в формуле (1-22),

[1]или *проективным* пределом
[2]или *инъективным* пределом

можно сопоставить тождественному эндоморфизму Id_L предела $L = \lim X_\nu$ диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ естественное преобразование $f : \overline{L} \to X$, представляющее собою набор стрелок $\pi_\nu : L \to X_\nu$, которые коммутируют со всеми стрелками диаграммы X и универсальны в том смысле, что для всех $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любого набора стрелок $\psi_\nu : Y \to X_\nu$, коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X, существует единственный такой морфизм $\alpha : Y \to \lim X_\nu$, что $\psi_\nu = \pi_\nu \circ \alpha$ для всех ν.

Двойственным образом, для копредела $\operatorname{colim} X_\nu$ диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ имеется канонический набор стрелок $\iota_\nu : X_\nu \to \operatorname{colim} X_\nu$, коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X, такой что для всех $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любого набора стрелок $\psi_\nu : X_\nu \to Y$, коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X, существует единственный такой морфизм $\beta : \operatorname{colim} X_\nu \to Y$, что $\psi_\nu = \beta \circ \iota_\nu$ для всех ν.

Упражнение 1.21. Проверьте, что универсальные свойства задают предел и копредел однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми каноническими стрелками π_ν и ι_ν соответственно.

Пример 1.18 (начальный и конечный объекты)
Простейшая диаграмма — пустая. Её предел Fin называется *конечным*, а копредел Or — *начальным* объектами категории. Эти объекты однозначно с точностью до единственного изоморфизма определяются тем, что для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ есть единственная стрелка $X \to \mathrm{Fin}$ и единственная стрелка $\mathrm{Or} \to X$.

Упражнение 1.22. Укажите начальный и конечный объекты в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом.

Пример 1.19 (прямые (ко) произведения)
Малая категория $\mathcal{N}$ называется *дискретной*, если все её морфизмы исчерпываются тождественными морфизмами Id_ν с $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$. Соответствующие *дискретные диаграммы* $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ — это семейства объектов X_ν без стрелок между ними. Пределы и копределы таких диаграмм называются *прямыми произведениями* и *копроизведениями* и обозначаются, соответственно $\prod\limits_\nu X_\nu$ и $\coprod\limits_\nu X_\nu$. Когда индексов всего два, мы получаем прямые (ко) произведения двух объектов из прим. 1.13 и прим. 1.14. Очевидная индукция показывает, что для существования всех конечных прямых (ко) произведений достаточно существования прямых (ко) произведений любых двух объектов.

Пример 1.20 ((ко) уравнители)
(Ко)предел диаграммы $X \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} Y$ называется (*ко*)*уравнителем*[1] стрелок φ и ψ. В категории множеств уравнитель представляет собою множество решений уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$ на $x \in X$ или, более научно, прообраз диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ при каноническом отображении $\varphi \times \psi : X \to Y \times Y$. Коуравнитель является фактором множества Y по наименьшему отношению эквивалентности[2] $R \subset Y \times Y$, содержащему образ

[1] по-английски (*co*)*equalizer*

[2] Напомним, что *отношение эквивалентности* на Y это подмножество $R \subset Y \times Y$, которое *рефлексивно* (содержит диагональ Δ_Y), *симметрично* (переходит в себя при транспози-

отображения $\varphi \times \psi$, т. е. все отождествления $\varphi(x) = \psi(x)$ с $x \in X$.

Упражнение 1.23. Проверьте это и постройте (ко) уравнители любой пары стрелок в категориях топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным коммутативным кольцом.

Например, (ко) ядро гомоморфизма $f : A \to B$ в категории $\mathcal{Ab}$ абелевых групп это (ко) уравнитель f и нулевого морфизма. Интуитивно, уравнители позволяют задавать «подобъекты» при помощи «уравнений», а коуравнители — «фактор объекты» при помощи «образующих и соотношений».

Пример 1.21 (послойные произведения)
Предел диаграммы $X \xrightarrow{\xi} B \xleftarrow{\eta} Y$, называется *послойным*[1] *произведением* и обозначается $X \underset{B}{\times} Y$. Он включается в коммутативный *декартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} X \underset{B}{\times} Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd} \tag{1-24}$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd}$$

имеется единственный такой морфизм $\varphi' \times \psi' : Z \to X \underset{B}{\times} Y$, что $\varphi' = \varphi \circ (\varphi' \times \psi')$ и $\psi' = \psi \circ (\varphi' \times \psi')$.

Упражнение 1.24. Убедитесь, что левый верхний угол диаграммы (1-24) задаётся этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с φ и ψ.

В категории множеств отображение $X \underset{B}{\times} Y \to B$ имеет в качестве слоя над произвольной точкой $b \in B$ прямое произведение слоёв $\varphi^{-1}(b) \times \psi^{-1}(b)$, отсюда и название.

ции сомножителей) и *транзитивно* (т. е. (y_1, y_2), $(y_2.y_3) \in R \Rightarrow (y_1, y_3) \in R$). Пересечение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности, и всякое отображение $\xi : Y \to Z$ определяет отношение эквивалентности $R_\xi = \{(y_1, y_2) \mid \xi(y_1) = \xi(y_2)\}$ на Y, причём $\xi' : Y \to Z'$ тогда и только тогда представляется в виде композиции $\xi' = \eta \circ \xi$ с некоторой стрелкой $\eta : Z \to Z'$, когда $R_\xi \subset R_{\xi'}$, т. е. когда эквивалентность, отвечающая ξ, *влечёт* эквивалентность, отвечающую ξ' (в этом случае говорят, что первая эквивалентность *тоньше* или *сильнее* последней).

[1]или *расслоенным*

Пример 1.22 (послойные копроизведения)
Оборачивая все стрелки в предыдущем примере, назовём *послойным копроизведением* $X \bigotimes_B Y$ копредел диаграммы $X \xleftarrow{\xi} B \xrightarrow{\eta} Y$. Он вписывается в коммутативный *кодекартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & X \bigotimes_B Y \end{tikzcd} \tag{1-25}$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi'"] \\ X \arrow[r, "\varphi'"] & Z \end{tikzcd}$$

существует единственный такой морфизм $\varphi' \otimes \psi' : X \bigotimes_B Y \to Z$, что $\varphi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \varphi$ и $\psi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \psi$.

Упражнение 1.25. Явно опишите послойные (ко) произведения в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп[1], коммутативных колец с единицей и модулей над коммутативным кольцом.

1.6.1. (Ко) замкнутость. Категория $\mathcal{C}$ называется *(ко) замкнутой*, если для любой малой категории $\mathcal{N}$ каждая диаграмма $\mathcal{N} \to \mathcal{C}$ имеет (ко) предел в $\mathcal{C}$.

Предложение 1.4
Для замкнутости категории $\mathcal{C}$ достаточно существования в $\mathcal{C}$ конечного объекта, прямых произведений любых множеств объектов и уравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом, а для козамкнутости — существования в $\mathcal{C}$ начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

Доказательство. Мы построим предел произвольной диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$, копредел строится аналогично путём обращения стрелок. Надо предъявить универсальный набор мофизмов φ_ν с общим началом в объекты диаграммы, решающий уравнения $\varphi_\mu = \varkappa_{\mu\nu}\varphi_\nu$, где $\varkappa_{\mu\nu} = X(\nu \to \mu) : X(\nu) \to X(\mu)$ пробегает все стрелки диаграммы. Рассмотрим произведение всех объектов диаграммы: $A = \prod_\mu X_\mu$, и ещё одно произведение, куда каждый X_μ входит столько раз, сколько стрелок в нём заканчивается:

$$B = \prod_{\nu \to \mu} F_{\nu\mu}, \quad \text{где} \quad F_{\nu\mu} \stackrel{\text{def}}{=} X_\mu .$$

Для каждой стрелки $\nu \to \mu$ зададим два отображения $A \to F_{\nu\mu}$: $f_{\nu\mu} = \mathrm{Id}_{X_\mu} \circ \pi_\mu$ и $g_{\nu\mu} = \varkappa_{\mu\nu} \circ \pi_\nu$, где $\pi_\alpha : A \to X_\alpha$ суть канонические стрелки из произведения в

[1] в теории групп копроизведения традиционно называются *амальгамами*

сомножители. По универсальному свойству произведения B имеются два морфизма $f, g : A \to B$, поднимающие стрелки $f_{\nu\mu}$ и $g_{\nu\mu}$. Их уравнитель L приходит вместе с морфизмом $\varphi : L \to A$, задающим набор стрелок $\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi$ с требуемыми универсальными свойствами. □

Пример 1.23
В категории множеств $\lim X$ изоморфен подмножеству прямого произведения $\prod X_\nu$, образованному такими семействами (x_ν), $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, $x_\nu \in X_\nu$, где $x_\mu = X(\nu \to \mu)x_\nu$ для всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\mathrm{Mor}\,\mathcal{N}$.

Упражнение 1.26. Убедитесь, что $\operatorname{colim} X$ изоморфен коуравнителю диаграммы

$$\coprod_{\nu\to\mu} G_{\nu\mu} \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \coprod_{\nu} X_\nu \ ,$$

в которой $G_{\nu\mu} = X_\nu$, $f = \coprod f_{\nu\mu}$, где $f_{\mu\nu} = \iota_\nu : F_{\nu\mu} = X_\nu \to \coprod X_\nu$, а $g = \coprod g_{\nu\mu}$, где $g_{\mu\nu} = \iota_\mu \circ X(\nu \to \mu) : F_{\nu\mu} = X_\nu \to \coprod X_\nu$. В частности, в категории множеств $\operatorname{colim} X$ изоморфен фактору дизъюнктного объединения $\coprod X_\nu$ по наименьшему отношению эквивалентности, отождествляющему x_ν с $X(\nu \to \mu)x_\nu$ для всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\mathrm{Mor}\,\mathcal{N}$.

Замечание 1.1. Для того, чтобы в категории $\mathcal{C}$ существовали (ко) пределы всех *конечных* диаграмм, в условиях предл. 1.4 достаточно требовать существования в $\mathcal{C}$ конечных (ко) произведений.

Следствие 1.3
Категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом замкнуты и козамкнуты.

Доказательство. Сделайте упр. 1.23. □

1.6.2. Фильтрующиеся диаграммы. Категория $\mathcal{F}$ называется *фильтрующейся*, если из общего конца любых двух стрелок φ, ψ с общим началом и общим концом ведёт такая стрелка ζ, что $\zeta\varphi = \zeta\psi$, и из любых двух объектов выходят стрелки с общим концом. Например, любой чум, в котором у каждых двух элементов есть общая верхняя грань, является фильтрующейся категорией[1]. Если категория индексов $\mathcal{F}$ фильтрующаяся, то диаграммы $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ и $\mathcal{F}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}$ принято называть *прямыми* и *обратными фильтрами*[2], а их (ко)пределы обозначать через $\underrightarrow{\lim}$, $\underrightarrow{\operatorname{colim}}$ и $\underleftarrow{\lim}$, $\underleftarrow{\operatorname{colim}}$. Копредел индуктивной системы множеств $X : \mathcal{F} \to \mathcal{S}et$ изоморфен фактору дизъюнктного объединения $\coprod\limits_{\nu\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{F}} X_\nu$ по отношению эквивалентности, отождествляющему $x_\nu \in X_\nu$ и $x_\mu \in X_\mu$, если $X(\nu \to \eta)x_\nu = X(\mu \to \eta)x_\mu$ в X_η для некоторой пары стрелок $\nu \to \eta \leftarrow \mu$.

Упражнение 1.27. Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности и убедитесь, что множество классов эквивалентности изоморфно $\operatorname{colim} X$.

[1] ср. с прим. 1.2 на стр. 3
[2] или *индуктивными* и *проективными* системами

Пример 1.24 (разбиения отрезка)
Конечные наборы точек $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_\infty = 1$, разбивающие отрезок $[0, 1]$ на непересекающиеся интервалы (как в определении интеграла Римана), образуют прямую систему в категории ∇_{big} относительно морфизмов включения, отвечающих измельчениям разбиения. Копределом этой системы в категории всех (не обязательно конечных) упорядоченных множеств с отмеченными максимальным и минимальным элементами является $[0, 1]$. В категории ∇_{big} предела не существует.

Пример 1.25 (открытые окрестности и слой предпучка)
Множество открытых окрестностей любого подмножества $Z \subset X$ топологического пространства X является проективной системой в категории $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств в X: для любых окрестностей $U, W \subset Z$ окрестность $U \cap W = U \underset{X}{\times} V$ вкладывается и в U, и в W. Пределом этой системы в категории $\mathcal{S}et$ является пересечение всех открытых окрестностей Z. В категории $\mathcal{U}$ предела может и не быть.

Упражнение 1.28. Убедитесь, что $U \underset{X}{\times} V = U \cap V$ в категории $\mathcal{U}(X)$.

Для любого предпучка $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ множества сечений $F(U)$ над открытыми окрестностями U произвольно заданного подмножества $Z \subset X$ образуют индуктивную систему в $\mathcal{S}et$. Её копредел называется *слоем* предпучка F над Z и обозначается F_Z. Согласно предыдущему описанию, каждый элемент $\sigma \in F_Z$ представляет собою класс $[s]_Z$ некоторого сечения $s \in F(U)$ над некоторым $U \supset Z$ по модулю эквивалентности, отождествляющей $[s]_Z$ и $[t]_Z$, когда $s|_V = t|_V$ над некоторым $Z \subset V \subset U \cap W$. Такие классы называются *ростками сечений* предпучка F над Z. В частности, когда $Z = \{x\}$ это одна точка, слой F_x называется *слоем F в точке x*.

Пример 1.26 (локализация коммутативного кольца)
Рассмотрим любую не содержащую нуля мультипликативную систему[1] S в произвольном коммутативном кольце K с единицей. Зададим на S структуру категории, полагая $\mathrm{Hom}_S(s, t) \overset{\text{def}}{=} \{a \in K \mid as = t\}$, и определим функтор $S \to \mathcal{M}od_K$ из этой категории в категорию K-модулей, посылая каждый объект $s \in S$ в свободный K-модуль ранга один с образующей, которую мы обозначим символом $\left[\frac{1}{s}\right]$, а каждую стрелку $a \in \mathrm{Hom}_S(s_1, s_2)$ — в гомоморфизм, переводящий базисный элемент $\left[\frac{1}{s_1}\right]$ в $a \cdot \left[\frac{1}{s_2}\right]$.

Упражнение 1.29. Покажите, что копредел получившейся диаграммы в категории $\mathcal{M}od_K$ существует и изоморфен локализации[2] KS^{-1}.

1.6.3. Функториальность (ко) пределов. Естественное преобразование f диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ в диаграмму $Y : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ — это набор стрелок $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$, по одной для каждого $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, перестановочных со стрелками из диаграмм. Если диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и $Y : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ имеют в категории $\mathcal{C}$ пределы $L_X = \lim X_\nu$ и $L_Y = \lim Y_\mu$, то для любого функтора $\tau : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ и любого естественного преобразования $f : X \circ \tau \to Y$ существует единственный морфизм $\lim f : L_X \to L_Y$, такой что при

[1] напомню, что это означает, что $1 \in S$ и $s, t \in S \Rightarrow st \in S$

[2] т. е. модулю дробей a/s с $a \in K$, $s \in S$, где под дробью понимается класс эквивалентности пары a/s по отношению $a_1/s_1 \sim a_2/s_2$, означающему, что $\exists\, s \in S : s \cdot (a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$

всех $\mu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$ коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} L_X \arrow[r, "\pi_{\tau(\mu)}"] \arrow[d, "\lim f"'] & X_{\tau(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"] \\ L_Y \arrow[r, "\pi_\mu"] & Y_\mu \end{tikzcd}, \tag{1-26}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из предела в элементы диаграммы. В самом деле, композиции $f_\mu \circ \pi_{\tau(\mu)} : L_X \to Y_\mu$ задают систему стрелок из L_X в элементы диаграммы Y, перестановочные со всеми её стрелками, что даёт единственный морфизм $L_X \to \lim Y = L_Y$, делающий все диаграммы (1-26) коммутативными. Двойственным образом, если существуют копределы $C_X = \operatorname{colim} X_\nu$ и $C_Y = \operatorname{colim} Y_\mu$, то для любого функтора $\tau : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ и любого естественного преобразования $f : X \to Y \circ \tau$ существует единственный морфизм $\operatorname{colim} f : C_X \to C_Y$, такой что коммутативны все диаграммы

$$\begin{tikzcd} X_\nu \arrow[r, "\iota_\nu"] \arrow[d, "f_\nu"'] & C_X \arrow[d, "\operatorname{colim} f"] \\ Y_{\tau(\nu)} \arrow[r, "\iota_{\tau(\nu)}"] & C_Y \end{tikzcd},$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из вершин диаграммы в копредел. При $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ и $\tau = \mathrm{Id}$ из предл. 1.2 на стр. 18 и равенств (1-22) и (1-23) на стр. 20 получаем

Предложение 1.5
Для заданных малой категории $\mathcal{N}$ и (ко)замкнутой категории $\mathcal{C}$ копредел и предел являются, соответственно, левым и правым сопряжёнными к функтору $\mathcal{C} \to \mathcal{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{C})$, переводящему $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ в постоянную диаграмму $\overline{C}$. □

Замечание 1.2. Если не предполагать (ко)замкнутости, то (ко)предел будет функториален на всех диаграммах, где определён.

Определение 1.2 (перестановочность с (ко) пределами)
Скажем, что функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *перестановочен с (ко) пределами*, если для любого $L \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любой диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ из того, что L является (ко) пределом X в $\mathcal{C}$, вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F \circ X$ в $\mathcal{D}$.

Предложение 1.6
Если функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, то F перестановочен с копределами, а G — с пределами.

Доказательство. В силу сопряжённости F и G имеем функториально по $D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(\operatorname{colim} X), D\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\operatorname{colim} X, G(D)\big) \simeq$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Fun}(\mathcal{N},\mathcal{C})}\left(X, \overline{G(D)}\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Fun}(\mathcal{N},\mathcal{D})}\left(F \circ X, \overline{D}\right).$$

Тем самым, $F(\operatorname{colim} X) \simeq \operatorname{colim}(F \circ X)$. Рассуждение про пределы аналогично. □

Следствие 1.4

Пределы коммутируют с пределами, а копределы — с пределами всякий раз, когда они существуют: если задана такая диаграмма $F : \mathcal{M} \to \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ естественных преобразований $F(\mu_1 \to \mu_2)$ диаграмм $\{F_\mu : \mathcal{N} \to \mathcal{C}\}$, что для всех $\mu \in \mathcal{M}$ и $\nu \in \mathcal{N}$ μ-тая диаграмма $F_\mu : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и диаграмма $F(\nu)$, задающая действие стрелок $F(\mu_1 \to \mu_2)_\nu$ между элементами $F_\mu(\nu)$ с фиксированным номером ν, обе имеют (ко)предел в $\mathcal{C}$, то $\lim\limits_\mu \lim\limits_\nu F_\mu \simeq \lim\limits_\nu \lim\limits_\mu F(\nu)$ и $\operatorname{colim}\limits_\mu \operatorname{colim}\limits_\nu F_\mu \simeq \operatorname{colim}\limits_\nu \operatorname{colim}\limits_\mu F(\nu)$. □

Следствие 1.5

Пусть стрелки $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$ задают естественное преобразование между диаграммами $X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{A}b$. Если существуют копределы $C_X = \operatorname{colim} X_\nu$ и $C_Y = \operatorname{colim} Y_\nu$, то существует и $\operatorname{colim} \operatorname{coker} f_\nu \simeq \operatorname{coker} \left(\operatorname{colim} f_\nu : C_X \to C_Y\right)$, а если существуют пределы $L_X = \lim X_\nu$ и $L_Y = \lim Y_\nu$, то существует и $\lim \ker \varphi_\nu \simeq \ker \left(\lim f_\nu : L_X \to L_Y\right)$.

Доказательство. Будучи (ко)уравнителем f_ν и нулевого морфизма (ко)ядро является (ко)пределом. □

Следствие 1.6

Тензорное умножение на (левый) модуль N над произвольным кольцом S с единицей перестановочно с копределами диаграмм (правых) S-модулей. В частности, для любого $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(K, L)$ имеется канонический изоморфизм абелевых групп

$$\operatorname{coker}\left(\varphi \underset{S}{\otimes} \operatorname{Id}_N : K \underset{S}{\otimes} N \to L \underset{S}{\otimes} N\right) \simeq \operatorname{coker}(\varphi) \underset{S}{\otimes} N\,.$$

Доказательство. По предл. 1.1 на стр. 16, применённому к кольцам S и $R = \mathbb{Z}$, функтор $\mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{A}b$, $X \mapsto X \underset{S}{\otimes} N$, сопряжён слева функтору $Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}b}(N, Y)$. □

Упр. 1.2. Транзитивность очевидна, рефлексивность — взять $\xi = \mathrm{Id}$, кососимметричность: в силу возможности сокращать слева (соотв. справа), равенства $\varphi = \psi\xi = \varphi\xi'\xi$ (соотв. $\varphi = \xi\psi = \xi\xi'\psi$) влекут $\xi'\xi = \mathrm{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \mathrm{Id}$), а равенства $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$ (соотв. $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$) влекут $\xi\xi' = \mathrm{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \mathrm{Id}$)

Упр. 1.7. Типичный ответ: «$\ln|x| + C$, где C — произвольная константа» *неверен*[1]. На самом деле деле C является сечением *постоянного пучка* $\mathbb{R}^{\sim}$ над несвязным открытым множеством $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Упр. 1.12. Элементу $a \in F(A)$ отвечает естественное преобразование $f_X : \mathrm{Hom}(A, X) \to F(X)$, посылающее стрелку $\varphi : A \to X$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратное отображение сопоставляет естественному преобразованию f_* значение отображения $f_A : h^A(A) \to F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h^A(A)$. Проверяется это с помощью построенной по произвольной стрелке $\varphi : A \to X$ диаграммы

$$\begin{tikzcd} h^A(A) = \mathrm{Hom}(A,A) \arrow[r, "h^A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \mathrm{Hom}(A,X) = h^A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X)\,, \end{tikzcd} \tag{3-41}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\mathrm{Id}_A)\big)$.

Упр. 1.22. Начальное множество и начальное топологическое пространство пусты, конечное множество и конечное топологическое пространство это одна точка. Начальный и конечный объекты категории групп это единичная группа. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей начальный и конечный объект это нуль.

Упр. 1.25. Гомоморфизмы коммутативных колец $A \leftarrow K \to A$ наделяют A и B структурами K-алгебр, и копроизведение $A \underset{K}{\otimes} B$ это *тензорное произведение* K-алгебр, т. е. фактор свободного K-модуля с базисом $A \times B$ (произведение в категории множеств) по подмодулю, порождённому всевозможными разностями

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \varkappa_1 b_1 + \varkappa_2 b_2) - \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \varkappa_j (a_i, b_j)$$

с $\lambda_i, \varkappa_i \in K$, $a_i \in A$, $\beta_j \in B$ (ср. с n° 1.5.1). Произведение на классах эквивалентности задаётся покомпонентно: $(a_1 \underset{K}{\otimes} b_1) \cdot (a_2 \underset{K}{\otimes} b_2) = (a_1 a_2) \underset{K}{\otimes} (b_1 b_2)$.

Упр. 1.27. По упр. 1.26 $\mathrm{colim}_{\to} X$ является фактором $\coprod_{\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}} X_\nu$ по наименьшему отношению эквивалентности, отождествляющему $x_\nu \in X_\nu$ с $X(\nu \to \mu)x_\nu$ для всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\mathcal{F}$. Это отношение склеивает $x_\nu \in X_\nu$ и $x_\mu \in X_\mu$ при наличии такой пары стрелок $\nu \longrightarrow \eta \longleftarrow \mu$, что $X(\nu \to \eta)x_\nu = X(\mu \to \eta)x_\mu$ в X_η. Тем самым, достаточно сделать лишь первую часть упражнения, в которой не очевидна лишь транзитивность.

[1] и в былые годы случалось, что абитуриентам ставили за такой ответ двойку на устном вступительном экзамене по математике

Если x_α эквивалентен x_β, а x_β эквивалентен x_γ, то в категории индексов $\mathcal{F}$ имеется (не обязательно коммутативная) диаграмма из таких стрелок

$$\begin{tikzcd}
 & & \varepsilon & & \\
 & & \delta \arrow[u, "\xi"] & & \\
 & \eta \arrow[ur, "\psi_{\delta\eta}"] & & \zeta \arrow[ul, "\psi_{\delta\zeta}"'] & \\
\alpha \arrow[ur, "\varphi_{\eta\alpha}"] & & \beta \arrow[ul, "\varphi_{\eta\beta}"] \arrow[ur, "\varphi_{\zeta\beta}"'] & & \gamma \arrow[ul, "\varphi_{\zeta\gamma}"']
\end{tikzcd}$$

что $X\left(\varphi_{\eta\alpha}\right)x_\alpha = X\left(\varphi_{\eta\alpha}\right)x_\beta$ и $X\left(\varphi_{\zeta\beta}\right)x_\beta = X\left(\varphi_{\zeta\gamma}\right)x_\gamma$ в категории $\mathcal{S}et$, а $\xi\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\beta} = \xi\psi_{\delta\zeta}\varphi_{\zeta\beta}$ в $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\beta, \varepsilon)$. Обозначая стрелку из последнего равенства через $\varkappa$, имеем

$$X\left(\varepsilon\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\alpha}\right)x_\alpha = X(\varkappa)x_\beta = X\left(\varepsilon\psi_{\delta\zeta}\varphi_{\zeta\gamma}\right)x_\gamma\,.$$