§2. Абелевы категории и пучки

2.1. Линейные категории. Пусть R — произвольное кольцо с единицей. Категория $\mathcal{L}$ называется R-линейной слева, если бифунктор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(\,*\,,\,*\,)$ принимает значения в категории R-$\mathcal{M}od$ левых R-модулей и все композиции

$$\mathrm{Hom}(Y,Z)\times\mathrm{Hom}(X,Y)\to\mathrm{Hom}(X,Z)$$

билинейны над R. Например, сама категория R-$\mathcal{M}od$ R-линейна, категория векторных пространств над полем $\Bbbk$ линейна над $\Bbbk$, а категория абелевых групп $\mathbb{Z}$-линейна. Всякая R-линейная категория автоматически $\mathbb{Z}$-линейна: каждое множество стрелок $\mathrm{Hom}(X,Y)$ в R-линейной категории является аддитивной абелевой группой, и сложение морфизмов дистрибутивно композиции:

$$(\varphi_1+\varphi_2)\circ(\psi_1+\psi_2)=f_1\circ\psi_1+f_1\circ\psi_2+f_2\circ\psi_1+f_2\circ\psi_2\,.$$

Функтор между R-линейными категориями называется *R-линейным*, если он действует на стрелки R-линейными гомоморфизмами. Все функторы между R-линейными категориями далее будут по умолчанию предполагаться R-линейными.

Предостережение 2.1. Сложение морфизмов в (малой) R-линейной категории $\mathcal{L}$ не следует путать с формальным сложением в алгебре $K[\mathcal{L}]$ из прим. 1.3 на стр. 4 : между множествами $\mathrm{Mor}\,\mathcal{L}$ и $K[\mathcal{L}]$ может не случиться даже биекции.

2.1.1. Прямые суммы. Из равенства $\varphi\circ 0=\varphi\circ(0+0)=\varphi\circ 0+\varphi\circ 0$ вытекает, что в R-линейной категории $\varphi\circ 0=0$ для нулевого морфизма $0\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ и любой стрелки φ с началом в Y. По той же причине $0\circ\psi=0$ для стрелок ψ с концом в X.

Упражнение 2.1. Докажите равносильность друг другу следующих трёх условий на эндоморфизм $\varepsilon\in\mathrm{Hom}(X,X)$ в R-линейной категории: а) $\varepsilon=\mathrm{Id}_X$ б) $\varphi\circ\varepsilon=\varphi$ для всех стрелок φ с началом в X в) $\varepsilon\circ\varphi=\varphi$ для всех стрелок φ с концом в X и проверьте, что мономорфность[1] (соотв. эпиморфность) произвольного морфизма означает, что он не является левым (соотв. правым) делителем нуля[2].

Лемма 2.1

В R-линейной категории каждое произведение $X\times Y$ является одновременно и копроизведением, а каждое копроизведение $X\otimes Y$ — произведением, причём между каноническими морфизмами π_X,π_Y произведения в множители и каноническими морфизмами ι_X,ι_Y множителей в копроизведение выполняются соотношения:

$$\iota_X\pi_X+\iota_Y\pi_Y=\mathrm{Id}\,,\quad \pi_X\iota_X=\mathrm{Id}_X\,,\quad \pi_Y\iota_Y=\mathrm{Id}_Y\,,\quad \pi_X\iota_Y=0\,,\quad \pi_Y\iota_X=0\,,\tag{2-1}$$

Наоборот, всякий объект $X\oplus Y$, включающийся в коммутативную диаграмму

$$X\underset{\pi_X}{\overset{\iota_X}{\rightleftarrows}}X\oplus Y\underset{\pi_Y}{\overset{\iota_Y}{\leftrightarrows}}Y$$

стрелки которой удовлетворяют соотношениям (2-1), является одновременно произведением и копроизведением объектов X и Y.

[1]см. n° 1.1.1 на стр. 5

[2]т. е. $\varphi\psi=0\Rightarrow\psi=0$ (соотв. $\psi\varphi=0\Rightarrow\psi=0$)

Доказательство. Пусть есть произведение $X \times Y$. Морфизмы $\iota_X \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id}_X \times 0 : X \to X \times Y$ и $\iota_Y \overset{\text{def}}{=} 0 \times \mathrm{Id}_Y : Y \to X \times Y$ включаются в коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \\ X & X \arrow[l, "\mathrm{Id}_X"] \arrow[u, "0"'] \arrow[ul, "\iota_X"'] \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \\ X & Y \arrow[l, "0"] \arrow[u, "\mathrm{Id}_Y"'] \arrow[ul, "\iota_Y"'] \end{tikzcd}$$

и удовлетворяют последним четырём соотношениям (2-1). Из них вытекает, что

$$\pi_X(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \pi_X \quad \text{и} \quad \pi_Y(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \pi_Y \,.$$

Но по универсальному свойству произведения стрелка $\varphi : X \times Y \to X \times Y$, для которой $\pi_X\varphi = \pi_X$ и $\pi_Y\varphi = \pi_Y$ ровно одна — это $\varphi = \mathrm{Id}_{X\times X}$, что доказывает первое соотношение из (2-1).

Упражнение 2.2. Докажите соотношения (2-1) в случае, когда существует копроизведение $X \otimes Y$.

Из соотношений (2-1) следует, что для любой пары стрелок $\alpha : X \to Z$ и $\beta : Y \to Z$ стрелка $\gamma : X \oplus Y \to Z$ со свойствами $\gamma\iota_X = \alpha$ и $\gamma\iota_Y = \beta$ единственна и равна $\gamma = \gamma \circ \mathrm{Id}_{X\oplus Y} = \gamma(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \alpha\pi_X + \beta\pi_Y$, а для любой пары стрелок $\alpha' : W \to X$ и $\beta' : W \to Y$ стрелка $\gamma' : W \to X \oplus Y$ со свойствами $\pi_X\gamma' = \alpha'$ и $\pi_Y\gamma' = \beta'$ также единственна и равна $\gamma' = \mathrm{Id}_{X\oplus Y} \circ \gamma' = (\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y)\gamma' = \iota_X\alpha' + \iota_Y\beta'$. □

Определение 2.1 (прямые суммы)
Объект $X \oplus Y$, удовлетворяющий условиям лем. 2.1, называется *прямой суммой* объектов X и Y. Аналогично по индукции определяется прямая сумма $\mathcal{X} = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ любого конечного набора объектов и канонические морфизмы

$$\iota_\nu : X_\nu \to \mathcal{X}\,, \quad \pi_\nu : \mathcal{X} \to X_\nu\,, \quad \varepsilon_\nu \overset{\text{def}}{=} \iota_\nu\pi_\nu : \mathcal{X} \to \mathcal{X}\,,$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{gathered} \pi_\nu\iota_\mu = 0 \text{ при } \nu \neq \mu\,, \quad \pi_\nu\iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}\,, \\ \varepsilon_\nu\varepsilon_\mu = 0 \text{ при } \nu \neq \mu\,, \quad \varepsilon_\nu^2 = \varepsilon_\nu\,, \quad \sum_\nu \varepsilon_\nu = \mathrm{Id}_{\mathcal{X}}\,, \end{gathered} \tag{2-2}$$

эквивалентным тому, что $\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = X_1 \otimes X_2 \otimes \cdots \otimes X_n$.

Замечание 2.1. (бесконечные (ко произведения)) Прямой суммой $\bigoplus_\nu X_\nu$ бесконечного семейства объектов X_ν называется их копроизведение (если существует). Бесконечная прямая сумма не совпадает с произведением $\prod_\nu X_\nu$: например, в категории $\mathcal{A}b$ произведение состоит из всевозможных семейств векторов $\{v_\nu\}$, $v_\nu \in X_\nu$, с покомпонентным сложением, а прямая сумма образована такими семействами $\{v_\nu\}$, в которых лишь конечное число элементов $v_\nu \neq 0$. В силу универсальных свойств (ко)произведений имеются функториальные по X и Y изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_\nu X_\nu, Y) \simeq \prod_\nu \mathrm{Hom}(X_\nu, Y) \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}(Y, \prod_\nu X_\nu) = \prod_\nu \mathrm{Hom}(Y, X_\nu)\,. \tag{2-3}$$

Для каждого i набор стрелок $\pi_{\nu i} : X_i \to X_\nu$, нулевых при $\nu \neq i$ и тождественной для $\nu = i$, по-прежнему задаёт морфизмы $\pi_i : \bigoplus_\nu X_\nu \to X_i$, такие что $\pi_\nu \iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}$ при всех ν, и $\pi_\nu \iota_\mu = 0$ при $\mu \neq \nu$. Произведение стрелок π_ν задаёт морфизм

$$\sigma : \bigoplus_\nu X_\nu \to \prod_\nu X_\nu \,. \tag{2-4}$$

Упражнение 2.3. Убедитесь, что все ι_ν и σ инъективны, а π_ν сюрьективны.

Если все объекты X_ν являются одинаковыми копиями одного объекта X, занумерованными множеством N, мы обозначаем их прямую сумму через $N \otimes X \overset{\text{def}}{=} \coprod_\nu X_\nu$, а произведение — через $X^N \overset{\text{def}}{=} \prod_\nu X_\nu$.

Пример 2.1 (матричный формализм)

Прямым вычислением с использованием соотношений (2-2) проверяется, что для конечных прямых сумм $\mathcal{X} = \bigoplus_\nu X_\nu$ и $\mathcal{Y} = \bigoplus_\mu Y_\mu$ в R-линейной категории имеется канонический изоморфизм R-модулей $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \simeq \bigoplus_{\mu,\nu} \mathrm{Hom}(X_\nu, Y_\mu)$, сопоставляющий морфизму $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ матрицу $\Phi = (\varphi_{\mu\nu})$ из морфизмов $\varphi_{\mu\nu} = \pi_\mu \circ \varphi \circ \iota_\nu : X_\nu \to Y_\mu$. Из матрицы Φ морфизм $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ восстанавливается по формуле $\varphi = \sum_{\mu\nu} \iota_\mu \circ \varphi_{\mu\nu} \circ \pi_\nu$. При этом матрица композиции $\varphi \circ \psi$ равна произведению матриц $\Phi \cdot \Psi$.

Пример 2.2 (прямая сумма морфизмов)

Во всякой категории с (ко)произведениями любой набор морфизмов $\gamma_\nu : X_\nu \to Y_\nu$ канонически задаёт морфизм произведений $\prod X_\alpha \to \prod Y_\alpha$ и морфизм копроизведений $\coprod X_\alpha \to \coprod Y_\alpha$, которые отвечают, соответственно, наборам стрелок

$$\gamma_\nu \circ \pi_\nu : \prod X_\alpha \to Y_\nu \quad \text{и} \quad \iota_\nu \circ \gamma_\nu : X_\nu \to \coprod Y_\nu \,,$$

где $\pi_\nu : \prod X_\alpha \to X_\nu$ и $\iota_\nu : Y_\nu \to \coprod Y_\alpha$ — канонические морфизмы произведения в сомножители и сомножителей в копроизведение. Для конечных прямых сумм в R-линейных категориях эти два морфизма совпадают и называются *прямой суммой* морфизмов γ_ν. Прямая сумма морфизмов обозначается $\oplus\gamma_\nu$. В терминах прим. 2.1 она изображается диагональной матрицей со стрелками γ_ν по диагонали и нулями в остальных местах.

Замечание 2.2. (каноничность сложения морфизмов) Если в R-линейной категории $\mathcal{L}$ есть прямые суммы $X \oplus X$ и $Y \oplus Y$, то сложение в группе $\mathrm{Hom}(X, Y)$ канонически определяется композициями в категории $\mathcal{L}$, поскольку для любых стрелок $\varphi, \psi : X \to Y$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi+\psi"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & Y \\ X \oplus X \arrow[r, "\varphi\times\psi"'] & Y \oplus Y \arrow[u, "\nabla_Y"'] \end{tikzcd} \tag{2-5}$$

в которой диагональный морфизм $\Delta_X \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id} \times \mathrm{Id} : X \to X \times X$, кодиагональный морфизм $\nabla_Y \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} : Y \otimes Y \to Y$ и морфизм $\varphi \times \psi : X \times X \to Y \times Y$ не связаны с аддитивной структурой и имеются в в любой категории $\mathcal{L}$, где есть прозведения $X \times X$ и $Y \times Y = Y \otimes Y$.

Определение 2.2 (нулевой объект и нулевые морфизмы)
Объект $0 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ категории $\mathcal{C}$ называется *нулевым*, если он одновременно начальный и конечный. Такой объект единствен с точностью до единственного изоморфизма (если существует). Морфизм $\varphi : X \to Y$ в категории с нулевым объектом называется *нулевым*, если он распадается в композицию $X \to 0 \to Y$. В R-линейной категории такой морфизм является нулевым элементом аддитивной группы $\mathrm{Hom}(X, Y)$.

2.1.2. Ядра и коядра. В категории $\mathcal{C}$ с нулевым объектом уравнитель стрелки $\varphi : X \to Y$ и нулевого морфизма называется *ядром* φ и обозначается $\ker \varphi$. Если он существует, то вместе с такой универсальной стрелкой $\varkappa \ker \varphi \to X$, что $\varphi\varkappa = 0$ и

$$\forall \psi \quad \varphi\psi = 0 \;\Rightarrow\; \exists!\, \psi' : \psi = \varkappa\psi' ,$$

которую мы тоже будем называть *ядром*, и единствен с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с $\varkappa$. В $\mathbb{Z}$-линейной категории ядро представляет предпучок $Z \mapsto \ker \varphi_*^Z$, сопоставляющий объекту Z ядро гомоморфизма абелевых групп $\varphi_*^Z : \mathrm{Hom}(Z, X) \to \mathrm{Hom}(Z, Y)$, задающего действие над этим объектом естественного преобразования $\varphi_* : h_X \to h_Y$ левого умножения на φ.

Коуравнитель φ с нулевым морфизмом называется *коядром*, обозначается $\operatorname{coker} \varphi$. Если он существует, то с такой стрелкой $\varsigma : Y \to \operatorname{coker} \varphi$, что $\varsigma\varphi = 0$ и

$$\forall \psi \quad \psi\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \exists!\, \psi' : \psi = \psi'\varsigma ,$$

которая также называется *коядром*, и единствен с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с ς. В $\mathbb{Z}$-линейной категории коядро копредставляет функтор $Z \mapsto \ker \varphi_Z^*$, где гомоморфизм $\varphi_Z^* : \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$ задаёт действие над Z естественного преобразования $\varphi^* : h_Y \to h_X$ правого умножения на φ.

Упражнение 2.4. Убедитесь, что в любой $\mathbb{Z}$-линейной категории:
а) $\varphi = 0 \iff \varkappa = \mathrm{Id}_X \iff \varsigma = \mathrm{Id}_Y$
б) стрелка $\varkappa : \ker \varphi \to X$ мономорфна, а стрелка $\varsigma : Y \to \operatorname{coker} \varphi$ — эпиморфна
в) φ мономорфен $\iff \ker \varphi = 0$; φ эпиморфен $\iff \operatorname{coker} \varphi = 0$.

Ядро канонической стрелки $\varsigma : Y \to \operatorname{coker} \varphi$ называется *образом* морфизма φ и обозначается $\operatorname{im} \varphi \overset{\text{def}}{=} \ker \varsigma$. Коядро канонической стрелки $\varkappa : \ker \varphi \to X$ называется *кообразом*[1] морфизма φ и обозначается $\operatorname{coim} \varphi \overset{\text{def}}{=} \operatorname{coker} \varkappa$. Если морфизм $\varphi : X \to Y$ имеет ядро, коядро, образ и кообраз, то в силу универсальных свойств двух последних

$$\mathrm{Hom}(\operatorname{coim} \varphi, \operatorname{im} \varphi) \simeq \{\alpha : \operatorname{coim} \varphi \to Y \mid \varsigma\alpha = 0\} \simeq \{\beta : X \to Y \mid \varsigma\beta\varkappa = 0\} .$$

[1] в категории модулей кообраз $\varphi : X \to Y$ это фактор по ядру: $\operatorname{coim} \varphi = X / \ker \varphi$

Стрелка $\overline{\varphi} : \operatorname{coim}\varphi \to \operatorname{im}\varphi$, переводимая этими изоморфизмами в исходную стрелку $\varphi : X \to Y$, это единственный морфизм, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} \operatorname{coker}\varphi & Y \arrow[l, "\varsigma"'] & \operatorname{im}\varphi \arrow[l, "\varkappa'"'] \\ \ker\varphi \arrow[r, "\varkappa"] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varsigma'"] & \operatorname{coim}\varphi \arrow[u, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd} \tag{2-6}$$

в которой $\varkappa$, $\varkappa'$ — канонические морфизмы из ядер, а ς, ς' — в коядра.

Определение 2.3
Диаграмма (2-6) называется *каноническим разложением* морфизма φ.

Пример 2.3 (фильтрованные абелевы группы)
Рассмотрим категорию $F\mathcal{Ab}$, объектами которой являются абелевы группы

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\,,$$

профильтрованные возрастающими подгруппами $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, а морфизмами — такие гомоморфизмы абелевых групп $\varphi : A \to B$, что $\varphi(A_n) \subset B_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Эта категория аддитивна, и у каждого морфизма $\varphi : A \to B$ есть ядро и коядро, как группы совпадающие с ядром и коядром в $\mathcal{Ab}$, и имеющие фильтрации, индуцированные с A и B: $\ker\varphi = \bigcup A'_n$, где $A'_n = A_n \cap \ker\varphi$, и $\operatorname{coker}\varphi = \bigcup B'_n$, где B'_n — образ подгруппы $B_n \subset B$ в факторе $B\,/\,\varphi(A)$. Обозначим через $A[1]$ фильтрованную группу с компонентами $A[1]_p = A_{p+1}$. Отображение $s : A \to A[1]$, тождественно действующее на элементы группы, является морфизмом фильтрованных групп и имеет нулевые ядро и коядро, т. е. одновременно инъективно и сюрьективно, но не обратимо, если $A \neq 0$. В каноническом разложении (2-6) морфизма s стрелка $\overline{s} = s$ тоже не изоморфизм:

$$\begin{tikzcd} 0 & A[1] \arrow[l] & A[1] \arrow[l, "\mathrm{Id}_{A[1]}"'] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "s"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_A"] & A \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}.$$

2.2. Абелевы категории. Категория $\mathcal{A}$ называется *аддитивной*, если она $\mathbb{Z}$-линейна, и в ней имеются нулевой объект и прямые суммы любых двух[1] объектов. Аддитивная категория $\mathcal{A}$ называется *абелевой*, если любая стрелка φ в ней имеет ядро и коядро, причём канонический морфизм $\overline{\varphi}$ в её разложении (2-6) является изоморфизмом, т. е. образ любого морфизма канонически изоморфен его кообразу[2]. Отождествляя кообраз с образом при помощи этого изоморфизма, мы получаем для каждой стрелки $\varphi : X \to Y$ *пятичленное разложение*

$$\begin{tikzcd} \ker\varphi \arrow[r, hook, "\varkappa"] & X \arrow[r, two heads, "\varsigma'"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & \operatorname{im}\varphi \arrow[r, hook, "\varkappa'"] & Y \arrow[r, two heads, "\varsigma"] & \operatorname{coker}\varphi \end{tikzcd}, \tag{2-7}$$

[1]а значит — и любого конечного множества

[2]в начальном курсе алгебры этот факт обычно называют «теоремой о строении гомоморфизма» и доказывают для гомоморфизмов групп, колец и модулей над кольцами

где $\varkappa'$ мономорфен, ς' эпиморфен, $\varsigma'\varkappa = \varphi$ и $\operatorname{im}\varphi = \ker\varsigma = \operatorname{coker}\varkappa$.

Упражнение 2.5. Покажите, что во всякой абелевой категории $\mathcal{A}$:

а) ядро, коядро и образ являются функторами из категории $\mathcal{Ar}(\mathcal{A})$ диаграмм вида[1] $\bullet \to \bullet$ в категорию $\mathcal{A}$

б) пятичленное разложение (2-7) является функтором из $\mathcal{Ar}(\mathcal{A})$ в категорию диаграмм вида $\bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet$

в) φ обратим $\iff \ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$

г) каждый мономорфизм является ядром своего коядра, а каждый эпиморфизм — коядром своего ядра.

Поскольку (ко)коядро разности $\alpha - \beta$ является (ко)уравнителем стрелок α и β, в абелевой категории существуют (ко)пределы всех конечных диаграмм[2], в том числе послойные (ко)произведения[3].

Упражнение 2.6. Убедитесь, что $\lim\big(A \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} B\big) = \ker\big(A \oplus B \xrightarrow{\alpha\pi_A - \beta\pi_B} D\big)$, а $\operatorname{colim}\big(X \xleftarrow{\xi} C \xrightarrow{\eta} Y\big) = \operatorname{coker}\big(C \xrightarrow{\iota_X\xi - \iota_Y\eta} X \oplus Y\big)$, и покажите, что в декартовом и кодекартовом квадратах

$$\begin{tikzcd} A \times_D B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\beta'"] \\ B \arrow[r, "\alpha'"] & D \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\eta"'] & X \arrow[d, "\eta'"] \\ Y \arrow[r, "\xi'"] & X \otimes_C Y \end{tikzcd} \tag{2-8}$$

β изоморфно отображает $\ker\alpha$ на $\ker\alpha'$ и эпиморфность β' влечёт эпиморфность β, а ξ' изоморфно отображает $\operatorname{coker}\eta$ на $\operatorname{coker}\eta'$ и мономорфность ξ влечёт мономорфность ξ'.

Пример 2.4

Для любого кольца R категория R-$\mathcal{Mod}$ левых R-модулей, категория R-$\mathcal{FMod}$ свободных левых R-модулей и категория R-$\mathcal{mod}$ конечно представимых[4] левых R-модулей абелевы: ядра, коядра и образы в них суть обычные ядра, коядра и образы R-линейных отображений, а совпадение образа и кообраза проверяется в теореме о строении R-линейного гомоморфизма, утверждающей, что образ канонически изоморфен фактору по ядру. В частности, абелевы категория всех абелевых групп и категория конечно порождённых абелевых групп. Категория фильтрованных абелевых групп из прим. 2.3 аддитивна и имеет (ко)ядра всех стрелок, однако не является абелевой, т. к. в ней есть стрелки φ с $\operatorname{im}\varphi \neq \operatorname{coim}\varphi$.

Упражнение 2.7. Убедитесь, что в категории топологических абелевых групп и их не прерывных гомоморфизмов тоже есть ядра, коядра и прямые суммы, но она не является абелевой.

[1] т. е. категории функторов $\mathcal{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{A})$, где категория $\mathcal{N} = \{\bullet \to \bullet\}$ имеет 2 объекта и одну нетождественную стрелку

[2] см. зам. 1.1. на стр. 24

[3] т. е. декартовы и кодекартовы квадраты, см. диаграммы (1-24) и (1-25) на стр. 22 – 23

[4] модуль называется *конечно представимым*, если он изоморфен фактору свободного модуля конечного ранга по конечно порождённому подмодулю

Категории множеств, топологических пространств, групп и коммутативных колец не являются даже $\mathbb{Z}$-линейными, т. к. в них $X \times Y \neq X \otimes Y$.

Замечание 2.3. (короткий список аксиом абелевой категории) Данное выше определение абелевой категории не является логически минимальным и выбрано нами постольку, поскольку все абелевы категории, с которыми мы будем иметь дело в этом курсе, изначально линейны. Общепринятое в теории категорий «минималистское» определение таково: (произвольная) категория $\mathcal{C}$ называется *абелевой*, если в ней

(A0) есть нулевой объект[1] 0

(A1) у каждой пары объектов есть произведение и копроизведение

(A2) у каждого морфизма есть ядро и коядро

(A3) каждый мономорфизм[2] является ядром некоторой стрелки, а каждый эпиморфизм — коядром некоторой стрелки

Аксиомы самодвойственны: их выполнение в категории $\mathcal{C}$ равносильно их выполнению в $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$. Вывод нашего определения из этих аксиом намечен в следующем ниже упражнении и подробно изложен во второй главе книги: *P. Freyd*. «Abelian Categories».

Упражнение 2.8* (не трудное, но трудоёмкое). Пользуясь только предыдущими аксиомами (A0) – (A3), покажите, что в категории $\mathcal{C}$

а) сопоставления стрелке её ядра и коядра корректно задают взаимно обратные биекции между множествами подобъектов[3] и фактор объектов каждого объекта

б) любая одновременно мономорфная и эпиморфная стрелка обратима

в) в чуме подобъектов[4] любого объекта у каждых двух элементов есть максимальная нижняя грань[5]

г) любые две стрелки имеют уравнитель и коуравнитель[6]

д) образ и кообраз любого морфизма канонически изоморфны

е) для каждой пары объектов X, Y канонический морфизм $X \otimes Y \to X \times Y$, задаваемый стрелками $\mathrm{Id}_X \times 0 : X \to X \times Y \leftarrow Y : 0 \times \mathrm{Id}_Y$, обратим, и обратный морфизм задаёт посредством диаграммы (2-5) на стр. 30 структуру абелевой группы на $\mathrm{Hom}(X, Y)$, что в свою очередь вводит $\mathbb{Z}$-линейную структуру на категории $\mathcal{C}$.

2.2.1. Точные последовательности. Пара стрелок $\cdots \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{\psi} \cdots$ называется *точной*, если $\ker \psi = \operatorname{im} \varphi$. Более длинная цепочка стрелок называется *точной*, если каждая пара её последовательных стрелок точна. Например, точность последовательности $0 \to X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ означает, что $\varphi = \ker \psi$, а точность последовательности

[1] см. опр. 2.2 на стр. 31
[2] см. n° 1.1.1 на стр. 5
[3] см. опр. 1.1 на стр. 5
[4] см. упр. 1.2 на стр. 5
[5] она называется *пересечением* этих двух подобъектов
[6] и, стало быть, в $\mathcal{C}$ существуют все послойные произведения и копроизведения

$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \to 0$ означает, что $\psi = \operatorname{coker} \varphi$. Точные последовательности вида

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0 \tag{2-9}$$

называются *точными тройками*. Точность тройки (2-9) равносильна равенствам $\alpha = \ker \beta$ и $\beta = \operatorname{coker} \alpha$. В этой ситуации C называется *фактором* A по B и обозначается A/B. Точные тройки вида $0 \to A \xrightarrow{\iota_A} A \oplus B \xrightarrow{\pi_B} B \to 0$ называются *расщепимыми*.

Упражнение 2.9. Покажите, что для расщепимости точной тройки (2-9) необходимо и достаточно существования такого морфизма $\beta' : B \to A$, что $\beta'\alpha = \mathrm{Id}_A$ или такого морфизма $\alpha' : C \to B$, что $\beta\alpha' = \mathrm{Id}_C$, и приведите пример нерасщепляющейся точной тройки в категории конечных абелевых групп.

2.2.2. Точные функторы. Функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (соотв. $F : \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{B}$) между абелевыми категориями называется *точным слева*, если он переводит ядра (соотв. коядра) в ядра или, что то же самое, — точные последовательности вида $0 \to A \to B \to C$ (соотв. $A \to B \to C \to 0$) в точные последовательности $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ (соотв. в $0 \to F(C) \to F(B) \to F(A)$). Двойственным образом, F называется *точным справа*, если он переводит коядра (соотв. ядра) в коядра, или — точные последовательности вида $A \to B \to C \to 0$ (соотв. $0 \to A \to B \to C$) в точные последовательности $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ (соотв. в $F(C) \to F(B) \to F(A) \to 0$). Функтор называется *точным*, если он точен и справа и слева.

Упражнение 2.10. Убедитесь, что для точности функтора необходимо и достаточно, чтобы он переводил точные тройки в точные тройки, и в этом случае он будет сохранять точность любых последовательностей.

Пример 2.5 (представимые функторы)
Из определения ядра тавтологически следует, что всякий копредставимый функтор $h^A : X \mapsto \mathrm{Hom}(A, X)$ (соотв. представимый функтор $h_A : X \mapsto \mathrm{Hom}(X, A)$) переводит ядра (соотв. коядра) в ядра. Тем самым, все (ко)представимые функторы точны слева.

Пример 2.6 (сопряжённые функторы)
Так как (ко)ядро является (ко)пределом диаграммы, по предл. 1.6 на стр. 26 правые сопряжённые функторы точны слева, а левые — справа. В частности, пределы точны слева, а копределы — справа, так что сл. 1.5 на стр. 27 справедливо для диаграмм в любой абелевой категории[1].

Пример 2.7 (тензорное умножение)
По сл. 1.6 для любых колец R и S с единицами функтор $\mathcal{Mod}\text{-}R \to \mathcal{Mod}\text{-}S$, $X \mapsto X \otimes_R N$, тензорного умножения на любой R-S-бимодуль N точен справа.

Упражнение 2.11. В категории абелевых групп приведите примеры, показывающие, что (ко)представимый функтор может быть не точен справа, а тензорное умножение на фиксированную абелеву группу N может быть не точно слева.

[1] причём для конечных диаграмм существования (ко)пределов можно не требовать — они существуют автоматически

Определение 2.4
Объект Q абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *проективным* (соотв. *инъективным*), если функтор $h^Q : X \mapsto \mathrm{Hom}(Q, X)$ (соотв. функтор $h_Q : X \mapsto \mathrm{Hom}(X, Q)$) точен справа.

Упражнение 2.12. Покажите, что прямая сумма (даже бесконечная, коли существует) проективных объектов проективна, а прямое произведение (даже бесконечное) инъективных объектов инъективно.

Лемма 2.2
Проективность объекта P абелевой категории $\mathcal{A}$ равносильна каждому из свойств:

(P1) любая стрелка $\varphi : P \to X$ поднимается вдоль любого эпиморфизма[1] $\pi : Y \twoheadrightarrow X$

(P2) любой эпиморфизм $\pi : Z \twoheadrightarrow P$ расщепляется: существует такой изоморфизм $\gamma : Z \xrightarrow{\sim} \ker \pi \oplus P$, что $\pi = \pi_P \gamma$.

Инъективность объекта I абелевой категории $\mathcal{A}$ равносильна каждому из свойств:

(I1) любая стрелка $\varphi : X \to I$ продолжается на любое расширение[2] $\iota : X \hookrightarrow Y$

(I2) любое вложение $\iota : I \hookrightarrow Z$ расщепляется: $\iota = \gamma \iota_I$ для некоторого изоморфизма $\gamma : I \oplus \mathrm{coker}\, \iota \xrightarrow{\sim} Z$.

Доказательство. Условие (P1) означает эпиморфность морфизмов

$$h^P(\pi) = \pi_* : h^P(Y) \to h^P(X)$$

для всех сюрьекций $\pi : Y \twoheadrightarrow X$, в чём и заключается точность справа функтора h^P. Из (P1) следует, что тождественный морфизм Id_P можно поднять вдоль любого эпиморфизма $\pi : Z \twoheadrightarrow P$ до такой стрелки $\iota : P \to Z$, что $\pi\iota = \mathrm{Id}_P$, а это по упр. 2.9 и означает расщепимость точной тройки $0 \to \ker \pi \hookrightarrow Z \twoheadrightarrow P \to 0$. Наоборот, если любой эпиморфизм на P расщепляется, то достроив пару стрелок $Y \twoheadrightarrow X \leftarrow P$ до декартова квадрата

$$\begin{tikzcd} Y \times_X P \arrow[r, two heads, shift left, "\pi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & P \arrow[l, dotted, shift left, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, two heads, "\pi"'] & X \end{tikzcd}$$

в котором морфизм π' сюрьективен, коль скоро сюрьективен[3] π, мы можем поднять стрелку φ стрелкой $\psi = \varphi'\iota$, где $\iota : P \hookrightarrow Y \times_X P$ расщепляет π'. Эквивалентность условий (I1), (I2) инъективности объекта I доказывается обращением стрелок. □

Упражнение 2.13. Проведите эти рассуждения.

[1] т. е. $\exists \psi : P \to Y : \varphi = \pi\psi$
[2] т. е. $\exists \psi : Y \to I : \psi\iota = \varphi$
[3] см. упр. 2.6 на стр. 33

2.2.3. Проективные и инъективные модули В категории $\mathcal{M}od$-R правых модулей над произвольным кольцом R с единицей свободный модуль R ранга 1 проективен, поскольку имеется естественный изоморфизм функторов $h^R \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}$, который действует над модулем M преобразованием $\mathrm{Hom}(R, M) \xrightarrow{\sim} M$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$. По упр. 2.12 все свободные модули $E \otimes R$ тоже проективны, а по лем. 2.2 любой проективный модуль P изоморфен прямому слагаемому свободного модуля: каждый модуль M является образом эпиморфизма $S(M) \otimes R \twoheadrightarrow M$, где $S(M)$ — множество векторов модуля M, и для проективного M этот эпиморфизм расщепляется.

Упражнение 2.14. Убедитесь в обратном: если модуль $P \oplus Q = E \otimes R$ свободен, то и P и Q проективны.

Инъективность модуля I означает возможность в нём деления на любые необратимые элементы кольца:

Лемма 2.3
Правый R-модуль I инъективен, если и только если для любого правого идеала $\mathfrak{q} \subset R$ и любого R-линейного справа гомоморфизма $q : \mathfrak{q} \to I$ имеется такой вектор $e_q \in I$, что $q(x) = e_q \cdot x$ для всех $x \in \mathfrak{q}$, т. е. в I имеется частное $q(x)/x = e_q$.

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ вытекает из лем. 2.2: продолжим q до R-линейного справа гомоморфизма $q' : R \to I$ и возьмём $e_q = q'(1)$. Для доказательства обратной импликации рассмотрим произвольное расширение модулей $N \subset M$ и продолжим любой R-линейный гомоморфизм $\varphi : N \to M$ на M при помощи леммы Цорна: подмодули $N \subseteq N' \subseteq M$, на которые φ продолжается, образуют чум по включению, в котором каждая линейно упорядоченная цепочка мажорируется своим объединением. Поэтому существует максимальный по включению подмодуль $L \supseteq N$ с таким гомоморфизмом $\psi : L \to I$, что $\psi|_N = \varphi$. Если имеется вектор $m \in M \smallsetminus L$, то подмодуль L', порождённый L и m, строго больше L, и для завершения доказательства достаточно продолжить ψ на $L' \simeq L \oplus R/\ker \pi_m$, где $\pi_m : L \oplus R \twoheadrightarrow L'$, $(\ell, x) \mapsto \ell + mx$. Ядро

$$\ker \pi_m = \{(\ell, x) \mid mx = -\ell \in L\}$$

изоморфно правому идеалу $\mathfrak{k} = \{x \in K \mid mx \in L\}$ и R-линейно отображается в I по правилу $x \mapsto \psi(mx)$. Берём вектор $e = \psi(mx)/x \in I$, такой что $\psi(mx) = e \cdot x$ для всех $x \in \mathfrak{k}$, и задаём продолжение $\psi' : L' \to I$ правилом $\psi'(\ell + mx) = \psi(\ell) + e \cdot x$. □

Упражнение 2.15. Убедитесь в корректности последнего правила и проверьте, что $\mathbb{Z}$-модули $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективны, причём второй замечателен тем, что для любого $\mathbb{Z}$-модуля A и любого элемента $a \in A$ есть гомоморфизм $\varphi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\varphi(a) \neq 0$.

2.2.4. Порождающие объекты. Объект G абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *генератором*[1] (соотв. *когенератором*) категории $\mathcal{A}$, если функтор $h^G : X \mapsto \mathrm{Hom}(G, X)$ (соотв. функтор $h_G : X \mapsto \mathrm{Hom}(X, G)$) строг, т. е. переводит разные стрелки в разные[2]. Например, свободный модуль R ранга 1 порождает категорию $\mathcal{M}od$-R, ибо функтор $h^R \simeq \mathrm{Id}$ не только строг, но и вполне строг.

Упражнение 2.16. Покажите, что категория с генератором умеренно мощна[3].

[1](ко)генераторы также называют (*ко*)*порождающими объектами* категории $\mathcal{A}$

[2]или, эквивалентно, ненулевые — в ненулевые

[3]см. опр. 1.1 на стр. 5

Для произвольных объектов G, X рассмотрим прямую сумму

$$\mathrm{Hom}(G,X)\otimes G \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\varphi\,:\,G\to X} \varphi\otimes G$$

одинаковых копий G, занумерованных стрелками $\varphi\in\mathrm{Hom}(G,X)$, и отобразим слагаемое $\varphi\otimes G$ в X при помощи стрелки $\varphi : G\to X$. Получим морфизм

$$c : \mathrm{Hom}(G,X)\otimes G\to X\,, \tag{2-10}$$

который называется *канонической свёрткой*. Двойственным образом, рассмотрим для объектов Y, C прямое произведение

$$C^{\mathrm{Hom}(Y,C)} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\varphi\,:\,Y\to C} C^{\varphi}$$

одинаковых копий C, занумерованных стрелками $\varphi : Y\to C$, и отобразим Y в сомножитель C^{φ} при помощи стрелки $\varphi : Y\to C$. Получим морфизм

$$c' : Y\to C^{\mathrm{Hom}(Y,C)} \tag{2-11}$$

который называется *канонической косвёрткой*.

Лемма 2.4
Кополная абелева категория $\mathcal{A}$ тогда и только тогда порождается объектом G, когда для любого $X\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ каноническая свёртка (2-10) эпиморфна. Полная абелева категория тогда и только тогда копорождается объектом C, когда для любого $Y\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ каноническая косвёртка (2-11) мономорфна.

Доказательство. Докажем второе. Применим к морфизму (2-11) сохраняющий ядра функтор h^X с произвольным $X\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Получим точную последовательность

$$0\to\mathrm{Hom}(X,\ker c')\to\mathrm{Hom}(X,Y)\xrightarrow{c'_*}\mathrm{Hom}(X,C)^{\mathrm{Hom}(Y,C)}$$

морфизм c'_* которой переводит стрелку $\varphi : X\to Y$ в график отображения

$$\varphi^* : \mathrm{Hom}(Y,C)\to\mathrm{Hom}(X,C)\,,\quad \psi\mapsto\psi\varphi\,.$$

Тем самым, инъективность c'_* равносильна инъективности действия функтора

$$h_C : \mathrm{Hom}(X,Y)\to\mathrm{Hom}\left(h_C(Y),h_C(X)\right)\,.$$

Если $\ker c'=0$, отображение c'_* инъективно для всех X, Y, т. е. функтор h_C строг. Наоборот, если h_C строг, то $\mathrm{Hom}(X,\ker c')=0$ для всех X, и беря $X=\ker c'$, заключаем, что $\ker c'=0$. □

Упражнение 2.17. Докажите первую часть лем. 2.4 и покажите, что любой модуль является коядром гомоморфизма свободных модулей.

Следствие 2.1
Инъективная абелева группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ копорождает категорию абелевых групп.

Доказательство. Косвёртка $c' : A \to \left(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$ инъективна по упр. 2.15. □

Упражнение 2.18. Убедитесь, что абелева группа $I_R = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ со структурой правого R-модуля, задаваемой левым действием R на себе (соотв. со структурой левого R-модуля, задаваемой правым действием R на себе), является инъективным когенератором категории $\mathcal{Mod}$-R (соотв. категории R-$\mathcal{Mod}$).

2.2.5. Компактные объекты. Объект K козамкнутой абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *компактным*, если функтор $h^K : Z \mapsto \mathrm{Hom}(K, Z)$ коммутирует с бесконечными копределами. Поскольку любой копредел является коуравнителем пары стрелок между прямыми суммами[1], компактность равносильна тому, что h^K переводит прямые суммы в прямые суммы или, эквивалентно, что образ вложения (2-4)

$$\sigma_* : \mathrm{Hom}(K, \bigoplus_\nu X_\nu) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(K, \prod_\nu X_\nu) \simeq \prod_\nu \mathrm{Hom}(K, X_\nu)$$

лежит в $\bigoplus\limits_\nu \mathrm{Hom}(K, X_\nu) \subset \prod\limits_\nu \mathrm{Hom}(K, X_\nu)$. Например, проективный генератор R категории R-модулей компактен.

Упражнение 2.19. Покажите, что компактность проективного модуля равносильна его конечной порождённости.

2.2.6. Модули над кольцом. Выше мы уже видели, что абелева категория $\mathcal{Mod}$-R правых модулей[2] над произвольным кольцом R с единицей полна и кополна, обладает инъективным когенератором и компактным проективным генератором. Последнее свойство выделяет категории модулей среди прочих абелевых категорий.

Теорема 2.1
Козамкнутая абелева категория $\mathcal{A}$ с компактным проективным генератором P точно эквивалентна[3] категории $\mathcal{Mod}$-R правых R-модулей над кольцом $R = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P)$.

Доказательство. Функтор $h^P : \mathcal{A} \to \mathcal{Ab}$ принимает значение в $\mathcal{Mod}$-R: правое действие $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, P)$ на абелевой группе $h^P(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, X)$ задаётся правым умножением стрелок на f. В силу проективности P функтор h^P точен. Проверим, что он по-существу сюрьективен и вполне строг[4]. Из лем. 2.4 вытекает, что любой объект $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ представляется в виде коядра морфизма между прямыми суммами подходящих множеств I, J одинаковых копий генератора P:

$$I \otimes P \xrightarrow{\varphi} J \otimes P \twoheadrightarrow X \to 0\,. \tag{2-12}$$

Морфизм φ задаётся некоторой матрицей Φ формата $I \times J$ с элементами

$$\varphi_{ij} \in \mathrm{Hom}(j \otimes P, i \otimes P) \simeq \mathrm{Hom}(P, P) = R\,,$$

[1] см. доказательство предл. 1.4 на стр. 24
[2] равно как и категория R-$\mathcal{Mod}$ левых R-модулей
[3] т. е. имеется эквивалентность категорий, переводящая точные тройки в точные тройки
[4] см. лем. 1.1 на стр. 12

имеющей при каждом j лишь конечное число ненулевых φ_{ij}. Применяя к (2-12) функтор h^P и пользуясь компактностью P получаем для $h^P(X)$ представление в виде коядра морфизма свободных R-модулей

$$I \otimes R \xrightarrow{\varphi_*} J \otimes R \twoheadrightarrow h^P(X) \to 0\,, \tag{2-13}$$

который задаётся правым умножением строки $(x_i) \in I \otimes R$ на матрицу Φ. Так как каждый R-модуль является коядром гомоморфизма свободных R-модулей, функтор h^P по-существу сюрьективен. Для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ группа $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ является ядром стрелки $h_Y(\varphi)$, получающейся применением $h_Y : Z \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{Ab}}(Z,Y)$ к диаграмме (2-12), а группа $\operatorname{Hom}_R\left(h^P(X), h^P(Y)\right)$ является коядром стрелки $h_{h^P(Y)}(\varphi_*)$, получающейся применением $h_{h^P(Y)} : M \mapsto \operatorname{Hom}_R(Z, h^P(Y))$ к диаграмме (2-12). Эти стрелки совпадают друг с другом, представляя собою гомоморфизм $h^P(Y)^J \to h^P(Y)^I$ прямых произведений одинаковых копий группы $h^P(Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y)$, задаваемый транспонированной матрицей Φ^t. Тем самым, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq \operatorname{Hom}_R\left(h^P(X), h^P(Y)\right)$. □

Теорема 2.2 (эквивалентность Мориты)
Следующие три свойства колец R и S с единицами эквивалентны друг другу:

(1) категории $\mathcal{Mod}\text{-}R$ и $\mathcal{Mod}\text{-}S$ точно эквивалентны

(2) $R \simeq \operatorname{Hom}_S(P,P)$ для некоторого конечно порождённого проективного S-модуля P, являющегося генератором категории $\mathcal{Mod}\text{-}S$

(3) существует такой R-S бимодуль T, что тензорное умножение $\mathcal{Mod}\text{-}R \to \mathcal{Mod}\text{-}S$, $M \mapsto M \underset{R}{\otimes} T$, является точной эквивалентностью категорий.

Доказательство. Если выполнено (1), то по теор. 2.1, применённой к $\mathcal{A} = \mathcal{Mod}\text{-}S$, в $\mathcal{Mod}\text{-}S$ имеется компактный проективный генератор P с $\operatorname{Hom}_S(P,P) = R$, что даёт (2), поскольку компактный проективный модуль конечно порождён[1]. Если выполнено (2), положим[2] $T \stackrel{\text{def}}{=} P$ и покажем, что функторы

$$\mathcal{Mod}\text{-}R \to \mathcal{Mod}\text{-}S,\ M \mapsto M \underset{R}{\otimes} P\,, \quad \text{и} \quad \mathcal{Mod}\text{-}S \to \mathcal{Mod}\text{-}R\,,\ N \mapsto \operatorname{Hom}(P,N)\,,$$

квазиобратны друг другу. Так как эти функторы сопряжены[3]:

$$\operatorname{Hom}_S\big(M \underset{R}{\otimes} P, N\big) \simeq \operatorname{Hom}_R\big(N, \operatorname{Hom}_S(P,N)\big)\,,$$

имеется естественное преобразование[4] $\operatorname{Hom}_S(P,N) \underset{R}{\otimes} P \xrightarrow{\sim} N$, $\varphi \underset{R}{\otimes} p \mapsto \varphi(p)$, и естественное преобразование $M \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_S(P, M \underset{R}{\otimes} P)$, переводящее $m \in M$ в семейство

[1] см. упр. 2.19 на стр. 39

[2] отметим, что на правом S-модуле P имеется каноническая структура левого модуля над кольцом $R = \operatorname{End}_S(P)$

[3] см. предл. 1.1 на стр. 17

[4] см. формулу (1-14) на стр. 15

гомоморфизмов $\varphi_m : P \to M \bigotimes_R P$, $p \mapsto m \bigotimes_R p$. Если P является проективным генератором, то оба эти преобразования — изоморфизмы. □

Упражнение 2.20. Убедитесь в этом.

Определение 2.5
Кольца R и S, удовлетворяющие условиям теор. 2.2, называются *Морита-эквивалентными*, а функторы $M \mapsto M \bigotimes_R P$ и $N \mapsto \mathrm{Hom}(P, N)$ называются *эквивалентностями Мориты*.

Упражнение 2.21. Покажите, что категория R-модулей точно эквивалентна категории модулей над кольцом матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ любого конечного размера.

Теорема 2.3 (простая теорема Митчела о вложении)
Если абелева категория $\mathcal{B}$ полна и имеет проективный генератор[1], то любая её малая полная точная[2] абелева подкатегория $\mathcal{A}$ допускает точное вполне строгое вложение в категорию правых модулей над некоторым кольцом с единицей.

Доказательство. Обозначим через P проективный генератор категории $\mathcal{B}$, а через J — произведение множеств $\mathrm{Hom}(P, X)$ по всем $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Тогда $Q = J \otimes P$ тоже является генератором $\mathcal{B}$, и для каждого $X \in \mathcal{A}$ существует сюрьективный морфизм $\psi_X : Q \twoheadrightarrow X$. Положим $R = \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(Q)$ и как в доказательстве теор. 2.1 проверим, что точный строгий[3] функтор $h^Q : \mathcal{A} \to \mathcal{M}od\text{-}R$, $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Q, X)$, вполне строг. Для этого представим произвольный $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ как коядро гомоморфизма $\varphi = \psi_{\ker \psi_X}$:

$$Q \xrightarrow{\varphi} Q \xrightarrow{\psi_X} X \to 0\,.$$

Применение точного функтора h^Q задаёт $h^Q(X)$ как коядро левого умножения

$$R \xrightarrow{\varphi_*} R \to h^Q(X) \to 0$$

на элемент $\varphi \in R$. Применяя к этой диаграмме $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\left(\,*\,, h^Q(Y)\right)$, а к предыдущей — $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\,(\,*\,, Y)$, получаем для $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\left(h^Q(X), h^Q(Y)\right)$ одинаковое представление в виде ядра правого умножения на φ в модуле $h^Q(Y)$. □

2.3. Предпучки на малой категории. Зафиксируем малую категорию $\mathcal{U}$. Категория $p\mathcal{S}h(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ предпучков[4] объектов категории $\mathcal{A}$ на $\mathcal{C}$ наследует свойства категории $\mathcal{A}$. Например, если категория $\mathcal{A}$ K-линейна, то и категория предпучков $p\mathcal{S}h(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ K-линейна, т. к. естественные преобразования предпучков $f : X \to Y$, будучи семействами морфизмов $f(U) : X(U) \to Y(U)$, занумерованных объектами $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$, образуют K-подмодуль в прямом произведении модулей $\prod_U \mathrm{Hom}\big(X(U), Y(U)\big)$, и композиции

[1] не обязательно компактный
[2] т. е. такая, что точные тройки из $\mathcal{A}$ точны и в $\mathcal{B}$
[3] ибо Q — проективный генератор
[4] см. прим. 1.11 на стр. 11

естественных преобразований K-билинейны, что проверяется покомпонентно, над каждым U в отдельности.

Аналогично проверяется, что категория предпучков $pSh(\mathcal{U},\mathcal{A})$ со значениями в (ко)замкнутой категории $\mathcal{A}$ (ко)замкнута: диаграмма $X : \mathcal{N} \to pSh(\mathcal{U},\mathcal{A})$ естественных преобразований $X_{\mu\to\nu} : X_\mu \to X_\nu$ предпучков $X_\nu : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ представляет собою семейство диаграмм $X(U) : \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ в категории $\mathcal{A}$, занумерованных объектами $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ и таких, что отображения ограничения сечений $\varphi^* : X_\nu(W) \to X_\nu(U)$, отвечающие стрелкам $\varphi : U \to W$ в $\mathcal{U}$, являются естественными преобразованиями диаграмм. В силу (ко)замкнутости $\mathcal{A}$, каждая такая диаграмма $X(U)$ имеет в $\mathcal{A}$ предел $L(U) = \lim X(U)$ и копредел $C(U) = \operatorname{colim} X(U)$, которые функториальны по отношению к естественным преобразованиям диаграмм[1] и, стало быть, задают предпучки $L : U \mapsto L(U)$ и $C : U \mapsto C(U)$ на категории $\mathcal{U}$.

Упражнение 2.22. Убедитесь, что предпучки L и C являются пределом и копределом диаграммы $X : \mathcal{N} \to pSh(\mathcal{U},\mathcal{A})$ в категории предпучков.

В частности, если категория $\mathcal{A}$ абелева, то и категория предпучков $pSh(\mathcal{U},\mathcal{A})$ абелева. Как следствие, мы видим, что категории предпучков множеств, предпучков колец и предпучков абелевых групп замкнуты и козамкнуты, причём последняя из них — абелева.

2.3.1. Плотность представимых предпучков. С каждым предпучком множеств F на малой категории $\mathcal{U}$ функториально связана малая категория $\mathcal{N}_F$ с множеством объектов $\bigsqcup\limits_{U\in\operatorname{Ob}\mathcal{U}} F(U)$, элементы которого мы будем изображать символами $s\underset{F}{\otimes} U$, указывающими на то, что $s \in F(U)$, а $\operatorname{Hom}_{\mathcal{N}_F}(s\underset{F}{\otimes} U, t\underset{F}{\otimes} W) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to W \mid t\varphi = s\}$, где мы обозначили правым умножением $t \mapsto t\varphi$ действие контравариантной стрелки $F(\varphi) : F(W) \to F(U)$, ограничивающей сечения предпучка F вдоль морфизма $\varphi : U \to W$ категории $\mathcal{U}$. Например, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{X})$ это категория открытых множеств топологического пространства $\mathcal{X}$, то множество $\operatorname{Hom}_{\mathcal{N}_F}(s\underset{F}{\otimes} U, t\underset{F}{\otimes} W)$ либо пусто, либо состоит из одного элемента, и последнее означает, что $U \subset W$ и $t|_U = s$. Малая категория $\mathcal{N}_F$ порождает две согласованных с вложением Ионеды диаграммы:

$$\begin{tikzcd} & pSh(\mathcal{U}) \\ \mathcal{N}_F \arrow[ur, "H_F"] \arrow[dr, "D_F"'] & \\ & \mathcal{U} \,. \arrow[uu, hook, "h_*"', "\begin{smallmatrix}\text{вложение}\\ \text{Ионеды}\end{smallmatrix}"] \end{tikzcd} \tag{2-14}$$

Диаграмма $H_F : \mathcal{N}_F \to pSh(\mathcal{U})$ переводит каждое сечение $s\underset{F}{\otimes} U$ в отдельный представимый предпучок h_U, который мы обозначим $s \cdot h_U$, чтобы помнить, из какого сечения s он произошёл, а стрелку $\varphi : (t\varphi)\underset{F}{\otimes} U \to t\underset{F}{\otimes} W$ в естественное преобразование $(t\varphi)\cdot h_U = h_U \xrightarrow{\varphi_*} h_W = t \cdot h_W$, задаваемое левым умножением на φ:

[1]см. n° 1.6.2 на стр. 26

$(t\varphi)\cdot\psi \mapsto t\cdot(\varphi\psi)$. Диаграмма $D_F : \mathcal{N}_F \to \mathcal{U}$ переводит каждое сечение $s \underset{F}{\otimes} U$ в отдельную копию подлежащего объекта U, которую мы также обозначим через $s\cdot U$, а стрелку $\varphi : (t\varphi)\underset{F}{\otimes} U \to t\underset{F}{\otimes} W$ в подлежащую стрелку $(t\varphi)\cdot U = U \xrightarrow{\varphi} W = \cdot W$.

Лемма 2.5

Каждый предпучок множеств F на малой категории $\mathcal{U}$ является копределом функториально зависящей от F диаграммы представимых предпучков: $F = \operatorname{colim} H_F$.

Доказательство. Из каждого объекта $s\cdot h_U$ диаграммы H_F имеется каноническая стрелка $s\cdot h_U = h_U \to F$, задающая естественное преобразование, отвечающее по Ионеде[1] элементу $s \in F(U)$: над каждым объектом $W \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ оно переводит лежащую в $h_U(W)$ стрелку $\psi : W \to U$ в элемент $s\psi \in F(W)$.

Упражнение 2.23. Убедитесь, что стрелки $s : s\otimes h_U \to F$ перестановочны со всеми стрелками диаграммы H_F.

Если имеется такой предпучок G, в который тоже ведут естественные преобразования $g_{s,U} : s\cdot h_U \to G$, перестановочные со стрелками диаграммы H_F, то по лемме Ионеды эти преобразования однозначно задаются такими элементами $g_{s,U} \in G(U)$, что $g_{t,W}\varphi = g_{t\varphi,U}$ для любой стрелки $\varphi : U \to W$. Поэтому правило $g_U : F(U) \to G(U)$, $s \mapsto g_{s,U}$, корректно задаёт морфизм предпучков $g : F \to G$, перестановочный со всеми ведущими в них из диаграммы H_F стрелками, причём это единственный способ задать такой морфизм предпучков. □

Теорема 2.4 (о продолжении по непрерывности)

Для любого ковариантного функтора $G : \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ в произвольную козамкнутую категорию $\mathcal{C}$ существует единственный с точностью до естественного изоморфизма перестановочный с копределами функтор $G^{\frown} : pSh(\mathcal{U}) \to \mathcal{C}$, такой что $G^{\frown}\circ h_* \simeq G$, где $h_* : \mathcal{U} \to pSh(\mathcal{U})$ — вложение Ионеды. Этот функтор сопряжён слева функтору $h_*^G : \mathcal{C} \to pSh(\mathcal{U})$, который переводит объект $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в предпучок

$$h_C^G : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et, \quad U \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(U), C\big).$$

Упражнение 2.24. Проверьте, что правило $C \mapsto h_C^G$ и впрямь задаёт ковариантный функтор $\mathcal{C} \to pSh(\mathcal{U})$.

Доказательство. Поскольку каждый предпучок F на $\mathcal{U}$ является копределом диаграммы $H_F = h_*\circ D_F$ из (2-14), равенство $G^{\frown}\circ h_* \simeq G$ и требование перестановочности функтора $G^{\frown}$ с копределами не оставляют иной возможности, как положить

$$G^{\frown}(F) = G^{\frown}\operatorname{colim} H_F = G^{\frown}\operatorname{colim} h_*D_F = \operatorname{colim} G^{\frown}h_*D_F = \operatorname{colim} GD_F\,, \tag{2-15}$$

где $GD_F : \mathcal{N}_F \to \mathcal{D}$ это диаграмма в категории $\mathcal{D}$, полученная применением функтора G к диаграмме D_F из (2-14). Диаграмма GD_F состоит из объектов $s\cdot G(U) = G(U) \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, занумерованных парами (s,U), $s \in F(U)$, $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$, а стрелки в этой диаграмме суть морфизмы $(t\varphi)\cdot G(U) = G(U) \xrightarrow{G(\varphi)} G(W) = t\cdot G(W)$ со всевозможными

[1] см. лем. 1.2 на стр. 13

$\varphi : U \to W$. Естественное преобразование диаграммы GD_F в постоянную диаграмму $\overline{C}$, ассоциированную с объектом $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, представляет собою такой набор стрелок $c_{s,U} : s \cdot G(U) \to C$, что $c_{t,W} \circ G(\varphi) = c_{t\varphi,U}$ для всех морфизмов $\varphi : U \to W$ категории $\mathcal{U}$. С другой стороны, этот же набор данных задаёт естественное преобразование предпучка $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ в предпучок $h_C^G : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(U), C\big)$, который посылает стрелку $\varphi : U \to W$ в правое умножение на $G(\varphi)$: а именно, сечение $s \in F(U)$ переводится этим преобразовании в стрелку $c_{s,U} : G(U) = s \cdot G(U) \to C$. Таким образом, имеется функториальный по предпучку F на $\mathcal{U}$ и объекту категории C изоморфизм $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{colim}\, GD_F, C) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}_F,\mathcal{C})}(GD_F, \overline{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{pSh(\mathcal{C})}(F, h_C^G)$, означающий[1], что правило $F \mapsto \mathrm{colim}\, GD_F$ задаёт левый сопряжённый к функтору $h_*^G : \mathcal{C} \to pSh(\mathcal{U})$, $C \mapsto h_C^G$, а значит, перестановочный с копределами, функтор $G^{\frown} : pSh(\mathcal{U}) \to \mathcal{D}$. □

Пример 2.8 (тензорное умножение на бимодуль)
Рассмотрим R-линейную категорию $\mathcal{U}$ с одним объектом U, эндоморфизмы которого образуют кольцо R. Предпучок абелевых групп $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}b$ на такой категории — это правый R-модуль $F = F(U)$, так что $pSh(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{M}od\text{-}R$. Объекты категории $\mathcal{N}_F$ суть элементы $s \in F$, и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{N}_F}(s, t) = \{\varphi \in R \mid t\varphi = s\}$ это *трансформатор* из t в s. Представимый предпучок абелевых групп h_U это кольцо R, рассматриваемое как правый модуль над собой. Диаграмма $H_F : \mathcal{N}_F \to \mathcal{M}od\text{-}R$ имеет объектами такие модули $s \cdot R$, занумерованные элементами $s \in F$, а стрелкамио тображения $(t\varphi) \cdot R \to t \cdot R$, $(t\varphi) \mapsto t \cdot \varphi$, и лем. 2.5 утверждает, что копредел этой диаграммы канонически изоморфен модулю F.

Упражнение 2.25. Убедитесь в этом.

Если в качестве козамкнутой категории $\mathcal{C}$ взять категорию $\mathcal{M}od\text{-}S$ правых модулей над каким-либо кольцом S, то ковариантный функтор $G : \mathcal{U} \to \mathcal{M}od\text{-}S$ это R-S-бимодуль $G = G(U)$. Функтор $h_*^G : \mathcal{M}od\text{-}S \to pSh(\mathcal{U}) = \mathcal{M}od\text{-}R$ сопоставляет S-модулю C R-модуль $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(G, C)$, правое действие R на котором состоит в левым действии на G. Предыдущая теор. 2.4 утверждает, что у этого функтора имеется левый сопряжённый функтор $G^{\frown} : F \mapsto \mathrm{colim}\, GD_F$. Объектами диаграммы GD_F являются одинаковые копии $s \cdot G$ модуля G, занумерованные элементами $s \in F$, а стрелками — морфизмы $\varphi : (t\varphi) \cdot G \to t \cdot G$, $(t\varphi) \cdot g \mapsto t \cdot (\varphi g)$.

Упражнение 2.26. Убедитесь, что $\mathrm{colim}\, GD_F = F \underset{R}{\otimes} G$.

Так что мы снова получаем канонический изоморфизм из предл. 1.1 на стр. 17:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(F \underset{R}{\otimes} G, C\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\big(F, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(G, C)\big)\,.$$

Пример 2.9 (геометрическая реализация симплициальных множеств)
Для симплициальной категории $\mathcal{U} = \Delta$ и симплициального множества $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ диаграмма $H_F : \mathcal{N}_F \to pSh(\Delta)$ состоит из объектов $s \cdot h_{[n]}$, занумерованных числами $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и точками $s \in F_n = F([n])$, причём предпучок $h_{[n]} : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ можно воспринимать как комбинаторное описание стандартной триангуляции правильного

[1] см. предл. 1.2 на стр. 19

симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Стрелка $(t\varphi)\cdot h_{[n]} = h_{[n]} \xrightarrow{\varphi_*} h_{[m]} = t \cdot h_{[m]}$ состоит в левом умножении стрелок из h_U на φ.

Упражнение 2.27. Убедитесь, что копредел этой диаграммы в категории симплициальных множеств изоморфен F.

Функтор геометрической реализации $G : \Delta \to \mathcal{T}op$ переводит комбинаторный симплекс $[n]$ в геометрический симплекс $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и по теор. 2.4 канонически продолжается на все симплициальные множества перестановочным с копределами функтором $G^{\smile}$, переводящим F в копредел в категории $\mathcal{T}op$ диаграммы GD_F, получающейся из предыдущей диаграммы H_F заменой каждого комбинаторного симплекса $h_{[n]}$ настоящим геометрическим симплексом Δ^n, а левых умножений на $\varphi : h_{[n]} \to h_{[m]}$ — аффинными отображениями $\varphi : \Delta^n \to \Delta^m$.

Упражнение 2.28. Убедитесь, что этот копредел гомеоморфен топологическому пространству $|F|$, о котором шла речь в прим. 1.7 на стр. 7

Правый сопряжённый к геометрической реализации функтор $h^G_* : C \to h^G_C$ сопоставляет топологическому пространству C симплициальное множество его сингулярных симплексов $h^G_C = S(C) : [n] \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, C)$, и теор. 2.4 в этом случае описывает изоморфизм из прим. 1.17 на стр. 18:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(|F|, C) = \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\Delta)}(F, S(C))$$

Пример 2.10 (этальное пространство предпучка)
В случае, когда $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ является категорией открытых множеств топологического пространства X, а $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ — предпучком на X, диаграмма H_F состоит из занумерованных всеми локальными сечениями представимых предпучков $s \cdot h_U$, $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$, $s \in F(U)$, с пустым множеством сечений над всеми $V \not\subset U$ и одноточечным множеством сечений над всеми[1] $V \subseteq U$, и для каждого включения $\varphi : U \hookrightarrow W$ и сечения $t \in F(W)$ в диаграмме H_F имеется стрелка $t|_U \cdot h_U \hookrightarrow \varphi_* \cdot t \cdot h_W$ переводящая над каждым $V \subseteq U \subseteq W$ единственный элемент в $h_U(V)$ в единственный элемент $h_W(V)$.

Упражнение 2.29. Убедитесь, что копредел этой диаграммы в категории предпучков на X равен F.

Возьмём в качестве козамкнутой категории $\mathcal{C}$ в теор. 2.4 категорию $\mathcal{T}op(X)$ топологических пространств над X, объектами которой являются непрерывные отображения $p : Y \to X$ в категории $\mathcal{T}op$, а $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}(p, q) = \{\psi \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{T}op \mid \exists q\psi = p\}$, т. е. морфизм из $p : Y \to X$ в $q : Z \to X$ это непрерывное отображение $\psi : Y \to Z$, для каждого $x \in X$ переводящее слой $p^{-1}x$ в слой $q^{-1}x$. Имеется естественный функтор $G : \mathcal{U}(X) \to \mathcal{T}op(X)$ переводящий открытое подмножество $U \subset X$ в его тавтологическое вложение $\iota_U : U \hookrightarrow X$. Согласно теор. 2.4 этот функтор продолжается по непрерывности до функтора $G^{\smile} : p\mathcal{S}h(X) \to \mathcal{T}op(X)$, сопоставляющего предпучку F на X топологическое пространство над X, которое называется *этальным пространством* предпучка F, обозначается $\mathcal{E}_F \overset{\text{def}}{=} G^{\smile}F$ и представляет собою копредел в категории $\mathcal{T}op(X)$ диаграммы GD_F, объектами которой являются открытые вложения $\iota_{s,U} : s \cdot U \simeq U \hookrightarrow X$, по одному для каждого открытого $U \subset X$ и каждого $s \in F(U)$,

[1] это единственное сечение правильно воспринимать как $s|_V$

а стрелками — вложения $\varphi_t : (t|U) \cdot U \simeq U \hookrightarrow W \simeq t \cdot W$, по одному для каждого вложения $\varphi : U \hookrightarrow W$ и каждого $t \in F(W)$. Слоем пространства $\mathcal{E}_F$ над точкой $x \in X$ является копредел сечений $\mathrm{colim}_{U \supset x} F(U)$ над всеми окрестностями точки x относительно отображений ограничесния сечений. Он называется *слоем* предпучка F в точке x и обозначается F_x. Поскольку открытые окрестности точки образуют обратную направленность[1] каждая точка $\sigma_x \in F_x$ представляет собой класс $[s]_x$ некоторого сечения $s \in F(U)$ по модулю отождествления $[s]_x = [t]_x$, когда $s|_V = t|_V$ для некоторого $V \subset U \cap W$. Такие классы называются *ростками* сечений предпучка F в точке x. Множество $\mathcal{W} \subset \mathcal{E}_F$ открыто тогда и только тогда, когда когда открыты его прообразы относительно всех отображений $s : U \hookrightarrow \mathcal{E}_F$, $x \mapsto [s]_x$, со всевозможными $U \subset X$ и $s \in F(U)$ (это слабейшая топология, в которой все эти отображения непрерывны). Согласно теор. 2.4 функтор $F \mapsto \mathcal{E}_F$ сопряжён слева функтору $h_*^G : \mathcal{T}op(X) \to p\mathcal{S}h(X)$, сопоставляющему непрерывному отображению $p : Y \to X$ пучок его сечений[2] $h_Y^G = \Gamma_Y : U \mapsto \{s : U \to Y \mid ps = \mathrm{Id}_U\}$. Таким образом, мы имеем функториальный по F и $p : Y \to X$ изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}(\mathcal{E}_F, Y) = \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}(F, \Gamma_Y) \tag{2-16}$$

и знаем, что функтор $F \mapsto \mathcal{E}_F$ перестановочен с копределами, а $Y \mapsto \Gamma_Y$ — с пределами.

Упражнение 2.30. Убедитесь, что базу открытых окрестностей точки $\sigma_x \in \mathcal{E}_F$ в этальном пространстве $\mathcal{E}_F$ произвольного предпучка F составляют семейства ростков $\mathcal{W}_(s, U) = \{[s]_y \in F_y \mid y \in U,\ U \ni x,\ [s]_x = \sigma_x\}$, состоящие из ростков над всеми точками y какой-либо открытой окрестности U точки x любого такого сечения $s \in F(U)$, что $[y]_x = \sigma_x$ в F_x, и что проекция $\mathcal{E}_F \to X$, $\sigma_x \mapsto x$, является локальным гомеоморфизмом[3].

2.4. Пучки на топологическом пространстве. Поскольку предпучок сечений непрерывного отображения является пучком[4], композиция функторов $\Gamma \circ \mathcal{E} : p\mathcal{S}h(X) \to \mathcal{S}h(X)$ функториально сопоставляет каждому предпучку F пучок F^s, сечения которого над открытым множеством U — это непрерывные сечения $s : U \hookrightarrow \mathcal{E}_F$ этального пространства $\mathcal{E}_F \to X$, т. е. такие семейства ростков

$$\{\sigma_x\} \in \prod_{x \in U} F_x\,,$$

что для каждой точки $y \in U$ имеются открытая окрестность $W: U \supset W \ni y$ и сечение $t \in F(W)$: $\sigma_x = [t]_x$ в F_x для всех $x \in W$. Иначе говоря, сечение пучка F^s над множеством U задаётся покрытием $P = \{W_p \to U\}$ множества U семейством открытых

[1] для любых U, W найдётся $V = U \cap W = U \underset{X}{\times} W$, содержащееся и в U и в W, ср. с прим. 1.23 на стр. 24

[2] см. прим. 1.8 на стр. 8

[3] непрерывное отображение $p : Y \to X$ называется *локальным гомеоморфизмом*, если у любой точки $y \in Y$ есть такая открытая окрестность $U \ni y$, что $f|_U : U \xrightarrow{\sim} f(U)$ является гомеоморфизмом с открытым подмножеством $f(U) \subset X$

[4] см. прим. 1.8 на стр. 8

множеств U_p, $p \in P$, и набором согласованных на пересечениях сечений

$$s_p \in F(U_p) \;:\quad \forall\, p, q \;\; s_p\big|_{U_p \cap U_q} = s_q\big|_{U_p \cap U_q} \,,$$

причём два таких набора данных задают одно и то же сечение, когда их ограничения на некоторое покрытие, вписанное в оба данных покрытия, совпадают.

Упражнение 2.31. Выведите непосредственно из этих описаний, что предпучок F^s является пучком и что для любого пучка F имеется канонический изоморфизм $F^s \simeq F$, в частности $F^{ss} \simeq F^s$.

В силу того, что функтор $\mathcal{E}$ сопряжён слева функтору Γ, имеется естественное преобразование[1] $s : \mathrm{Id}_{p\mathcal{S}h(X)} \to \Gamma \circ \mathcal{E}$, т. е. функториальный по F морфизм предпучков $s : F \to F^s$, называемый *пучкованием*. Над каждым открытым U он отображает $F(U)$ в $F^s(U)$, переводя $t \in F(U)$ в набор его классов $[t]_x$ во всех слоях F_x.

Упражнение 2.32. Покажите, что канонический морфизм $s : F \to F^s$ инъективен , если и только если предпучок F отделим[2], и является изоморфизмом, , если и только если F — пучок.

Тем самым, ограничение композиции функторов $\Gamma\mathcal{E}$ на подкатегорию пучков естественно изоморфно тождественному функтору $\mathrm{Id}_{\mathcal{S}h(X)}$. Это наполовину доказывает

Предложение 2.1
Ограничения функтора $\mathcal{E} : F \mapsto \mathcal{E}_F$ на подкатегорию пучков и ограничение функтора $\Gamma : Y \mapsto \Gamma_Y$ на подкатегорию локальных гомеоморфизмов являются квазиобратными друг другу эквивалентностями категорий.

Доказательство. Согласно упр. 2.30 проекция $p : \mathcal{E}_F \to X$, $\sigma_x \mapsto x$, этального пространства любого предпучка F на X является локальным гомеоморфизмом. Так как функтор $\mathcal{E}$ сопряжён слева функтору Γ, имеется преобразование $e : \mathcal{E} \circ \Gamma \to \mathrm{Id}_{\mathcal{T}op(X)}$, действие которого $e_Y : \mathcal{E}_{\Gamma_Y} \to Y$ над объектом $p : Y \to X$ переводит росток сечений $\sigma_x \in \mathcal{E}_{\Gamma_Y}$, лежащий в слое над точкой $x \in X$, в значение $s(x) \in Y$ любого локального сечения $s : U \hookrightarrow Y$ с $[s]_x = \sigma_x$. Если p — локальный гомеоморфизм, то имеется обратное отображение $\varepsilon : Y \to \mathcal{E}_{\Gamma_Y}$, переводящее точку $y \in Y$ в росток в точке $x = p(y)$ любой такой открытой окрестности U точки y, которая гомеоморфно отображается на $p(U) \subset X$ и, тем самым, может рассматриваться как локальное сечение p над $f(U)$.

Упражнение 2.33. Убедитесь, что e и ε непрерывны и обратны друг другу.

Тем самым, сужение $\mathcal{E}\Gamma$ на подкатегорию локальных гомеоморфизмов эквивалентно тождественному функтору. □

Следствие 2.2
Для любых пучков G, H на X и любых двух локальных гомеоморфизмов $Y \to X$, $Z \to X$ имеются функториальные изоморфизмы:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}h(X)}(G, H) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}(\mathcal{E}_G, \mathcal{E}_H) \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}h(X)}(\Gamma_Y, \Gamma_Z)\,.$$

[1] см. формулу (1-14) на стр. 15
[2] см. прим. 1.8 на стр. 8

Следствие 2.3
Функтор пучкования $F \mapsto F^s$ сопряжён слева к вложению $\mathcal{S}h(X) \hookrightarrow p\mathcal{S}h(X)$, т. е. имеется функториальный по предпучку F и пучку G изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(F, G) \simeq \mathrm{Hom}(F^s, G)\,.$$

В частности, пучкование перестановочно с копределами, и естественное преобразование $s : F \to F^s$ универсально: любой морфизм $\varphi : F \to G$ предпучка F в пучок G имеет вид $\varphi = \varphi^s \circ s$ для единственного морфизма $\varphi^s : F^s \to G$. □

Доказательство. Пользуясь функториальными по F и G изоморфизмами $G \simeq G^s$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}\left(\mathcal{E}_F, \mathcal{E}_G\right) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}\left(\Gamma_{\mathcal{E}_F}, \Gamma_{\mathcal{E}_G}\right)$, получаем:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}(F, G) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}\left(F, G^s\right) \simeq \\ \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}\left(F, \Gamma_{\mathcal{E}_G}\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}\left(\mathcal{E}_F, \mathcal{E}_G\right) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}\left(\Gamma_{\mathcal{E}_F}, \Gamma_{\mathcal{E}_G}\right) \simeq \\ \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}h(X)}\left(F^s, G^s\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}h(X)}\left(F^s, G\right)\end{aligned}$$

□

Предложение 2.2
Категория $\mathcal{A}b(X)$ пучков абелевых групп на топологическом пространстве X абелева.

Доказательство. Как мы видели в самом начале n° 2.3 на стр. 41, категория предпучков абелевых групп на любой малой категории абелева.

Упражнение 2.34. Убедитесь в том, что нулевой предпучок, прямая сумма пучков и ядро любого морфизма пучков являются пучками.

Остаётся показать, что в категории пучков имеются коядра, а кообразы изоморфны образам. Первое следует из того, что опучковывание сохраняет копределы, и значит, опучкованное коядро в категории предпучков является коядром в категории пучков. Второе очевидно, поскольку совпадавшие друг с другом образ и кообраз в категории предпучков совпадут и после пучкования. □

Предостережение 2.2. Тавтологическое строгое полное вложение $\mathcal{S}h(X) \hookrightarrow p\mathcal{S}h(X)$ *не является точным*, поскольку опучкованное коядро, вообще говоря, не изоморфно коядру в категории предпучков.

Пример 2.11 (дифференциальные формы на окружности)
Рассмотрим на окружности S^1 пучок C гладких функций и пучок Ω гладких дифференциальных 1-форм. Морфизм $d : C \to \Omega$, $f \mapsto df$, имеет ядром постоянный *пучок* $\mathbb{R}^s$ *локально* постоянных функций. Его образ $B = \mathrm{im}\, d$ в категории предпучков имеет в качестве сечений над открытым U точные 1-формы df, где $f : U \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Этот предпучок не является пучком: покрывая S^1 двумя связными дугами, мы имеем на каждой из этих дуг дифференциалы dt от функции длины дуги t, исчисляемой против часовой стрелки, и эти дифференциалы совпадают на пересечении дуг, поскольку функции t у разных дуг отличаются на аддитивную константу, однако никакого глобального дифференциала $df \in B(S^1)$, ограничивающегося в dt

на каждую из дуг нет, поскольку $\int_{S^1} df = f(2\pi) - f(0) = 0$, ибо $f(0) = f(2\pi)$, а сумма интегралов от форм dt по двум полуокружностям, лежащим каждая в своей покрывающей дуге, равна $\pi + \pi = 2\pi$. Пучок B^s, являющийся коядром d в категории пучков, имеет глобальными сечениями такие наборы (U_i, df_i), что $df_i \in B(U_i)$, $\bigcup U_i = S^1$ и $df_i|_{U_i \cap U_j} = df_j|_{U_i \cap U_j}$. В частности, среди его глобальных сечений имеется и форма dt, ибо она представима в таком виде.

Упражнение 2.35. Убедитесь, что в категории пучков на S^1 последовательность

$$0 \to \mathbb{R}^s \hookrightarrow C \xrightarrow{d} \Omega \to 0$$

является *точной тройкой*, а в категории предпучков $\operatorname{coker} d \neq 0$ имеет группы сечений $\operatorname{coker} d(S^1) \simeq \mathbb{R}$ и $\operatorname{coker} d(U) = 0$ при $U \neq S^1$, и проверьте напрямую, что $(\operatorname{coker} d)^c = 0$.

2.4.1. Прямой образ. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ задаёт функтор

$$f^{-1} : \mathcal{U}(Y) \to \mathcal{U}(X), \quad U \mapsto f^{-1}Y$$

между категориями открытых множеств. Подъём предпучка $F \in pSh(X)$ вдоль этого функтора называется *прямым образом*[1] предпучка F и обозначается $f_*F \stackrel{\text{def}}{=} F \circ f^{-1}$. Множество его сечений над открытым $U \subset Y$ по определению совпадает с $F\left(f^{-1}(U)\right)$.

Упражнение 2.36. Проверьте, что прямой образ пучка всегда является пучком, а прямой образ предпучка, не являющегося пучком, может быть, а может и не быть пучком.

В ситуации, когда $f : X \hookrightarrow Y$ является открытым или замкнутым вложением, прямой образ f_*F обычно называют *тривиальным продолжением* предпучка F с X на Y, поскольку над всеми открытыми $U \subset Y$, не пересекающимися с X, его сечения пусты[2], а над открытыми $U \subset Y$, задевающими X, сечения $f_*F(U) = F(U \cap X)$.

Упражнение 2.37. Выведите отсюда, что на достаточно отделимом пространстве Y слой $\left(f_*F\right)_y$ совпадает с F_y, если $y \in X$, и пуст[3], если $y \notin X$ (по этой причине для собственных замкнутых $X \subset Y$ пучки вида f_*F на Y называют *пучками-небоскрёбами*, сосредоточенным на X.).

У функтора прямого образа, имеется левый сопряжённый функтор. Строить его удобно в самой общей ситуации, вернувшись к условиям теор. 2.4 на стр. 43.

Теорема 2.5 (об обратном образе)
Любой функтор $Q : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ между малыми категориями индуцирует функтор

$$Q^{\star} : pSh(\mathcal{W}) \to pSh(\mathcal{U}), \quad S \mapsto SQ,$$

[1] по-английски *direct image*

[2] для предпучка абелевых групп можно по определению положить их нулевыми, и тогда f_*F называется *продолжением нулём*

[3] равен нулю, если F — пучок абелевых групп

у которого имеется левый сопряжённый функтор $Q_{\star} : pSh(\mathcal{U}) \to pSh(\mathcal{W})$, переводящий предпучок $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ в копредел диаграммы предпучков на $\mathcal{W}$, объектами которой являются представимые предпучки $s \cdot h_{Q(U)} = h_{Q(U)}$, по одному для каждого $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ и каждого $s \in F(U)$, а стрелками — отображения

$$Q(\varphi)_* : (t\varphi) \cdot h_{Q(U)} \to t \cdot h_{Q(V)}, \quad (t\varphi) \cdot \psi \mapsto t \cdot (Q(\varphi)\psi),$$

по одному для каждой стрелки $\varphi : U \to V$ категории $\mathcal{U}$ и каждого $t \in F(V)$. Таким образом, имеется функториальная по предпучку F на $\mathcal{U}$ и предпучку S на $\mathcal{W}$ биекция

$$\operatorname{Hom}_{pSh(\mathcal{W})}\left(Q^{\star}F, S\right) \simeq \operatorname{Hom}_{pSh(\mathcal{W})}\left(G, Q_{\star}S\right).$$

Доказательство. Положим в теор. 2.4 на стр. 43 $\mathcal{D} = pSh(\mathcal{W})$ и $G : U \mapsto h_{Q(U)}$. Тогда для каждого $S \in pSh(\mathcal{W})$ получим $h_S^G \simeq Q^{\star}S$, т. к. по лемме Ионеды имеется функториальный по $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ и $S : \mathcal{W}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{pSh(\mathcal{W})}\big(G(U), S\big) \simeq \operatorname{Hom}_{pSh(\mathcal{W})}\big(h_{Q(U)}, S\big) \simeq S\big(Q(U)\big).$$

Согласно теор. 2.4 левый сопряжённый к функтору $Q^{\star} = h_*^G : S \mapsto h_S^G = SQ$ функтор $Q_{\star} = G^{\smile} : pSh(\mathcal{U}) \to pSh(\mathcal{W})$ переводит предпучок F на $\mathcal{U}$ в копредел диаграммы GD_F, которая выглядит именно так, как указано в теореме. □

2.4.2. Обратный образ предпучка. В ситуации, когда $\mathcal{U} = \mathcal{U}(Y)$ и $\mathcal{W} = \mathcal{U}(X)$ являются категориями открытых множеств топологических пространств Y и X, а функтор $Q = f^{-1} : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ задаётся непрерывным отображением $f : X \to Y$, левый сопряжённый к функтору подъёма $Q^{\star} = f_* : pSh(X) \to pSh(Y)$ функтор

$$f^* \stackrel{\text{def}}{=} Q_{\star} : pSh(Y) \to pSh(X)$$

называется *обратным образом*. По теор. 2.5 множество сечений предпучка f^*F над открытым $W \subset X$ представляет собою копредел диаграммы множеств $s \cdot U = U$, по одному множеству для каждого открытого $U \supset f(W)$ и каждого $s \in F(U)$, и вложений $(t|_U) \cdot U \hookrightarrow t \cdot V$, по одному для каждой пары $U \subset V$ с $U \supset f(W)$ и каждого $t \in F(V)$. Тем самым, сечение $s \in f^*F(W)$ это такое семейство занумерованных точками $x \in W$ ростков $\sigma_x \in F_{f(x)}$ сечений пучка F над точками $f(x) \in Y$, что для каждого $x \in W$ существует открытая окрестность $V \ni x$ в W, открытое множество $U \supset f(W)$ в Y и сечение $t \in F(U)$, росток которого совпадает с σ_z для всех $z \in V$.

Упражнение 2.38. Убедитесь в этом и покажите, что обратный образ любого предпучка F на Y является пучком, а именно, пучком сечений послойного произведения $X \underset{Y}{\times} \mathcal{E}_F$ отображения $f : X \to Y$ и канонической проекции $\mathcal{E}_F \to Y$ этального пространства предпучка F.

Сравнение определений показывает, что опучковывание $F \mapsto F^s$ является ни чем иным, как обратным образом относительно тождественного отображения: $F^s = \operatorname{Id}_X^* F$.

Упражнение 2.39. Проверьте, что постоянный пучок со слоем S на X является подъёмом постоянного предпучка со слоем S на одноточечном пространстве вдоль отображения, стягивающего X в точку.

2.5. Пучки на малой категории. Вернёмся к рассмотрению произвольной малой категории $\mathcal{U}$. Подпредпучки представимого предпучка h_U называются *решётами*[1] над объектом U. Иначе говоря, решето над U — это правый идеал стрелок с концом в U, т. е. такое множество стрелок $\Phi \subset h_U$, что $\varphi \in \Phi \Rightarrow \varphi\psi \in \Phi$ всякий раз, когда композиция $\varphi\psi$ определена. Всякий набор стрелок $\varphi_i : W_i \to U$ порождает решето, состоящее из всех стрелок с концом в U, пропускающихся[2] через одну из стрелок φ_i. Множество всех решёт над U мы будем обозначать через $R(U)$. Оно частично упорядочено по включению: $\Phi \leqslant \Psi$ если $\Phi \subseteq \Psi$, причём у любых двух элементов Φ, Ψ есть максимальная нижняя грань — пересечение $\Phi \cap \Psi$, и максимальная нижняя грань — объединение $\Phi \cup \Psi$, которые также являются решётами. Сопоставление $R \mapsto R(U)$ является предпучком: всякая стрелка $\psi : U \to W$ задаёт *ограничение решёт* $\psi^{-1} : R(W) \to R(U)$, переводящее решето $\Phi \in R(W)$ в решето $\psi^{-1}\Phi \overset{\text{def}}{=} \{\eta \in h_U \mid \psi\eta \in \Phi\} \in R(U)$.

Определение 2.6 (топология Гротендика)
Подпредпучок $J \subset R$ предпучка решёт называется *J-топологией Гротендика* или *пучком покрытий* на категории $\mathcal{U}$, если для всех $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ полное решето h_U является элементом $J(U)$ и для любого $\Phi \in J(U)$ каждое решето $\Psi \in R(U)$, подъём которого $\varphi^{-1}\Psi$ вдоль всех стрелок $\varphi : V \to U$ из Φ лежит в $J(V)$, тоже является элементом[3] $J(U)$. Решёта из предпучка J называются *покрытиями*. Прямо Категория $\mathcal{U}$ с зафиксированной J-топологией называется *сайтом*[4].

Упражнение 2.40. Введите из определения, что вместе с каждым решетом $\Phi \in J(U)$ все решёта, содержащие (т. е. большие) Φ, тоже лежат в $J(U)$.

Пример 2.12 (обычная топология)
Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ является категорией открытых множеств топологического пространства X. Объявляя покрытием любой идеал в h_U, содержащий набор стрелок, образы которых покрывают U, мы получаем предпучок (убедитесь в этом!) покрытий J, содержащий над каждым U полное решето h_U, порождённое тождественной сюрьекцией $\mathrm{Id}_U : U \to U$, и локализуемый, т. к. если множества U_i покрывают U, и при каждом i множества V_{ij} покрывают U_i, то V_{ij} покрывают и U. Тем самым, покрытия обычной топологии составляют топологию Гротендика.

Пример 2.13 (эпи-топология на абелевой категории)
Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{A}$ — произвольная абелева категория. Назовём правый идеал в h_U покрытием объекта $U \in \mathcal{A}$, если он содержит какой-нибудь эпиморфизм $W \twoheadrightarrow U$. Очевидно, что h_U является таким идеалом, и если подъём какого-то решета $\Psi \subset h_U$ вдоль эпиморфизма $\pi : W \twoheadrightarrow U$ содержит эпиморфизм $\psi : V \twoheadrightarrow W$, то Ψ содержит эпиморфизм $\pi\psi : V \twoheadrightarrow U$, т. е. покрывает U. Наконец, поскольку любой эпиморфизм $\pi : W \twoheadrightarrow U$ и

[1] или *ситами*

[2] т. е. представимых в виде $\varphi_i\psi$

[3] это свойство предпучка J называется *локализуемостью*, и ниже в упр. 2.41 мы увидим, что оно означает, что сам J является пучком в J-топологии

[4] или *ситусом*

любая стрелка $\varphi : V \to U$ включаются в декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} W \underset{U}{\times} V \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\psi'"'] \arrow[dr, dashed] & V \arrow[d, "\psi"] \\ W \arrow[r, "\pi"'] & U \end{tikzcd}$$

в котором стрелка $\pi' : W \underset{U}{\times} V \twoheadrightarrow V$ тоже эпиморфна[1], подъём любого содержащего эпиморфизм решета содержит эпиморфизм. Тем самым, содержащие эпиморфизм идеалы образуют подпредпучок в R.

2.5.1. Пучки. Предпучок $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на сайте $\mathcal{U}$ называется *J-пучком*, если для каждого $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ и каждого покрытия $\Phi \in J(U)$ вложение предпучков $f : \Phi \hookrightarrow h_U$ индуцирует биекцию $f^* : \operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{U})}(h_U, F) = F(U) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{U})}(\Phi, F)$. Подробнее последнее условие означает, что любое естественное преобразование $\Phi \to F$, т. е. выбор для каждой стрелки $\varphi : V \to U$ из решета Φ элемента $s_\varphi \in F(V)$ так, что вдоль каждой стрелки $\psi : W \to V$ ограничение $s_\varphi \psi = s_{\varphi\psi}$, должно единственным образом подниматься до естественного преобразования $h_U \to F$, т. е. однозначно задавать такой элемент $s \in F(U)$, что все $s_\varphi = s\varphi$ являются его ограничениями вдоль стрелок $\varphi \in \Phi$.

Упражнение 2.41. Убедитесь, что предпучок покрытий является пучком.

Будучи предпучками пучка решёт, пучки покрытий частично упорядочены по включениям: $P_1 \leqslant P_2$, если $P_1(U) \subseteq P_2(U)$ для всех $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$. Максимальным элементом относительно этого порядка является *макимальная*[2] топология $P = R$, в которой все решёта являются покрытиями.

Упражнение 2.42. Убедитесь, что пучками в максимальной топологии являются лишь начальный и конечный объекты категории $p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$.

Минимальная топология — это постоянный предпучок $p(U) = \{h_U\}$, единственным покрытием в котором является полное решето.

Упражнение 2.43. Убедитесь, что пересечение любого множества пучков покрытий также является пучком покрытий.

Таким образом, любое множество топологий имеет единственную наибольшую нижнюю грань. Применяя это наблюдение к множеству верхних граней какого-либо множества топологий, заключаем, что у любого множества топологий есть и единственная наименьшая верхняя грань.

Лемма 2.6
Для любого множества предпучков существует единственная наибольшая топология Гротендика, в которой все эти предпучки являются пучками.

Доказательство. В силу упр. 2.43 достаточно построить такую топологию для одного предпучка F. Назовём решето $\Phi \subset h_U$ покрывающим, если для всех стрелок $\psi : V \to U$ вложения $\psi^{-1}\Phi \hookrightarrow h_V$ задают изоморфизмы $\operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{U})}(h_V, F) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{U})}(\psi^{-1}\Phi, F)$.

[1] см. упр. 2.6 на стр. 33

[2] *или тривиальная*

Ясно, что это свойство должно выполняться для покрытий любой топологии J, в которой F является пучком. Проверим, что определённые таким образом покрытия образуют пучок покрытий. □

Определение 2.7
Наибольшая топология, в которой все представимые предпучки являются пучками, называется канонической.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 2.1. Всё вытекает из дистрибутивности: $\varphi\alpha = \varphi\beta \iff \varphi(\alpha - \beta) = 0$.

Упр. 2.3. Инъективность ι_ν и сюръективность π_ν вытекает из равенства $\pi_\nu\iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}$. Инъективность σ редуцируется к инъективности морфизма $X \oplus Y \to X \oplus Y$ суммы *двух* объектов при помощи леммы Цорна: рассмотрите чум таких подмножеств $S \subset N$, что отображение $\bigoplus_{\nu\in S} X_\nu \to \prod_{\nu\in S} X_\nu$ инъективно.

Упр. 2.5. В (а) по предл. 1.2 ядро задаёт правый сопряжённый функтор к функтору $\mathcal{A} \to \mathcal{A}r$, $X \mapsto \{X \to 0\}$, а коядро — левый сопряжённый функтор к функтору $\mathcal{A} \to \mathcal{A}r$, $X \mapsto \{X \to 0\}$ В (в) если φ обратим, то он не делит нуль, откуда $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$. Если $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$, то по упр. 2.4 диаграмма (2-6) приобретает вид

$$\begin{tikzcd} 0 & Y \arrow[l] & Y \arrow[l, "\mathrm{Id}_Y"'] \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_X"] & X \arrow[u, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd},$$

и обратимость $\overline{\varphi}$ влечёт обратимость φ. Если φ мономорфен или эпиморфен, его каноническое разложение (2-6) имеет, соответственно, вид

$$\begin{tikzcd} \operatorname{coker}\varphi & Y \arrow[l, "\varsigma"'] & \ker\varsigma \arrow[l, "\varkappa'"'] \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_X"] & X \arrow[u, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd} \quad \text{или} \quad \begin{tikzcd} 0 & Y \arrow[l] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_Y"] & Y \\ \ker\varphi \arrow[r, "\varkappa"] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varsigma'"] & \operatorname{coker}\varkappa \arrow[u, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd},$$

и $\overline{\varphi}$ задаёт канонические изоморфизмы $X \xrightarrow{\sim} \ker\varsigma$ и $\operatorname{coker}\varkappa \xrightarrow{\sim} Y$.

Упр. 2.7. Коядро является фактором по *замыканию* образа. Вложение дискретной группы $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ со стандартной топологией и плотные обмотки торов мономорфны и эпиморфны, но не обратимы.

Упр. 2.9. Если существует β', то $\iota_A\beta' + \iota_B\beta : B \to A \oplus C$ является изоморфизмом. Если существует α', то изоморфизмом является $\alpha\pi_A + \alpha'\pi_B : A \oplus B \to B$.

Упр. 2.10. Если функтор F сохраняет точность троек, то он переводит каноническое разложение (2-7) любого морфизма φ в каноническое разложение морфизма $F(\varphi)$, в частности — переводит $\operatorname{im}\varphi$ в $\operatorname{im}\big(F(\varphi)\big)$.

Упр. 2.15. $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}//\mathbb{Z}$ очевидно удовлетворяют условиям лем. 2.3 на стр. 37. Гомоморфизм $\varphi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\varphi(a) \neq 0$ сначала строится на порождённом элементом a подмодуле $\mathbb{Z} \cdot a$ (изоморфном либо $\mathbb{Z}$ либо $\mathbb{Z}/(n)$), а потом по инъективности продолжается на весь модуль A.

Упр. 2.16. Подобъекты любого объекта X инъективно вкладываются в множество подгрупп группы $h^P(X) = \mathrm{Hom}(P, X)$.

Упр. 2.17. Для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ функтор $h_Y : Z \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, Y)$ переведёт точную последовательность $\mathrm{Hom}(G, X) \otimes G \xrightarrow{c} X \to \operatorname{coker} c \to 0$ в точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(\operatorname{coker} c, Y) to\, \mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{c^*} \mathrm{Hom}(G, Y)^{\mathrm{Hom}(G,X)},$$

в которой c^* сопоставляет стрелке $\varphi : X \to Y$ график функции

$$h^G(\varphi) = \varphi^* : \mathrm{Hom}(G, X) \to \mathrm{Hom}(G, Y), \quad \psi \mapsto \varphi\psi .$$

Инъективность c^* равносильна инъективности $h^G : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(h^G(X), h^G(Y)$. Если coker $c = 0$, отображение c^* инъективно и h^G строг. Наоборот, если h^G строг, то $\mathrm{Hom}(\mathrm{coker}\, c, Y) = 0$ для всех Y, и беря $Y = \mathrm{coker}\, c$, заключаем, что $Y = 0$.

Упр. 2.18. Воспользуйтесь функториальным по X изоморфизмом $\mathrm{Hom}_R\left(X, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(X \bigotimes_{\mathbb{Z}} R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big)$.

Упр. 2.43. Пересечение предпучков — предпучок, содержащий все h_U, коль скоро все пересекаемые предпучки его содержали. Условие локальности столь же очевидно.