§3. Комплексы и когомологии

По умолчанию в этом параграфе речь идёт о модулях над фиксированным кольцом K.

3.1. Терминология и обозначения. Под *градуированным K-модулем* мы понимаем прямую сумму K-модулей $V = \bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}} V^\nu$, элементы которой суть *конечные* суммы вида $v_{\nu_1} + v_{\nu_2} + \dots + v_{\nu_m}$, в которых каждый $v_d \in V^d$. Векторы $v_d \in V^d$ называются *однородными* степени d, и степень однородного вектора обозначается $|v_d| \overset{\text{def}}{=} d$. Если компоненты $V^d = 0$ при всех $d \ll 0$ (соотв. при всех $d \gg 0$) градуированный модуль V называется *ограниченным слева* (соотв. *справа*).

Через $V[k]$ обозначается градуированный модуль с компонентами $V[k]^\nu \overset{\text{def}}{=} V^{\nu+k}$.

Гомоморфизм градуированных модулей $f : V \to W$ называется *однородным* степени m, если $f(V^\nu) \subset W^{\nu+m}$ при всех ν. Например, *сдвиг градуировки* $s : V \to V[1]$, тождественно действующий на элементы модуля: $s(v) \overset{\text{def}}{=} v$, однороден степени -1. Все K-линейные гомоморфизмы $V \to W$ образуют градуированный K-модуль

$$\mathrm{GrHom}(V,W) = \bigoplus_\nu \mathrm{GrHom}^\nu(V,W)\,, \tag{3-1}$$

компонента степени ν которого состоит из однородных гомоморфизмов ν-той степени. При композиции однородных гомоморфизмов их степени складываются: $|fg| = |f| + |g|$. Таким образом, эндоморфизмы градуированного модуля V образуют *градуированную алгебру* $\mathrm{GrHom}(V,V)$, в которой $\mathrm{GrHom}^\nu \cdot \mathrm{GrHom}^\mu \subset \mathrm{GrHom}^{\nu+\mu}$.

Тензорное произведение[1] $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ градуированных модулей V_i определяется как градуированный модуль с компонентами

$$\left(V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n\right)^\nu \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\sum \nu_i = \nu} V_1^{\nu_1} \otimes V_2^{\nu_2} \otimes \dots \otimes V_n^{\nu_n}\,.$$

3.1.1. Кошулево правило знаков. При работе с градуированными модулями мы по умолчанию используем так называемые s-версии[2] стандартных полилинейных операций линейной алгебры, которые получаются из обычных применением *кошулева правила знаков*: если некая операция над буквами $f_1, f_2, \dots, f_n$ определяется в неградуированной теории как линейная комбинация (некоммутативных) мономов от этих букв, в которой мономы отличаются друг от друга перестановками букв, то в s-версии такой операции каждая транспозиция букв f_ν и f_μ дополнительно сопровождается умножением соответствующего монома на $(-1)^{|f_\nu|\cdot|f_\mu|}$. Например, *s-коммутатор* однородных эндоморфизмов градуированного модуля определяется как

$$[f,g] \overset{\text{def}}{=} f\circ g - (-1)^{|f||g|} g \circ f\,,$$

а *s-правило Лейбница* для однородного оператора F на градуированной алгебре выглядит так:

$$F(ab) = (Fa)b + (-1)^{|F|\cdot|a|} a(Fb)\,.$$

[1] по умолчанию, все тензорные произведения берутся в категории K-модулей

[2] т. е. подкрученные на знак (*sign*) или, как ещё говорят, *супер*- (или *skew*-) версии

Аналогично, результат применения тензорного произведения $f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n$ однородных гомоморфизмов $f_i : V_i \to V_i$ к тензорному моному

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$$

из однородных векторов v_i определяется как

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_m \left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m\right) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\varepsilon} f_1(v_1) \otimes \cdots \otimes f_m(v_m)\,, \tag{3-2}$$

где $\varepsilon = |f_m|\big(|v_1| + \cdots + |v_{m-1}|\big) + |f_{m-1}|\big(|v_1| + \cdots + |v_{m-2}|\big) + \cdots + |f_2||v_1|$. Аналогично вычисляется и композиция тензорных мономов от гомоморфизмов:

$$\left(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m\right) \circ \left(g_1 \otimes \cdots \otimes g_m\right) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\varepsilon} (f_1 \circ g_1) \otimes \cdots \otimes (f_m \circ g_m) \tag{3-3}$$

где $\varepsilon = |f_m|\big(|g_1| + \cdots + |g_{m-1}|\big) + |f_{m-1}|\big(|g_1| + \cdots + |g_{m-2}|\big) + \cdots + |f_2||g_1|$.

3.1.2. Комплексы и (ко)гомологии. Градуированный K-модуль V, оснащённый однородным K-линейным оператором $d : V \to V$ степени $|d| = 1$ с $d^2 = 0$ называется *комплексом*. Действие оператора d удобно изображать диаграммой

$$\cdots \xrightarrow{d} V^{\nu-1} \xrightarrow{d} V^{\nu} \xrightarrow{d} V^{\nu+1} \xrightarrow{d} \cdots\,. \tag{3-4}$$

Равенство $d^2 = 0$ означает, что $\ker d \supset \operatorname{im} d$. Оператор d с таким свойством называется *дифференциалом*. Фактор модуль $H(V) \stackrel{\text{def}}{=} \ker d / \operatorname{im} d$ называется *модулем когомологий* комплекса V. Он естественно градуирован:

$$H(V) = \bigoplus H^{\nu}(V)\,, \quad \text{где} \quad H^{\nu}(V) = \frac{\ker\left(d : V^{\nu} \to V^{\nu+1}\right)}{\operatorname{im}\left(d : V^{\nu-1} \to V^{\nu}\right)}\,.$$

Элементы из $\ker d$ называются *коциклами*, а элементы из $\operatorname{im} d$ — *кограницами*. Если $H(V) = 0$, т. е. $\ker d = \operatorname{im} d$, комплекс V называется *точным* или *ациклическим*.

Формально, комплекс можно определить в любой категории как последовательность стрелок (3-4) со свойством $d^2 = 0$, а когомологии комплекса — в любой абелевой категории[1], и все обсуждаемые в этом параграфе свойства когомологий остаются справедливыми для любой абелевой категории.

Иногда удобно бывает считать, что степень дифференциала равна не $+1$, а -1. В этом случае однородные компоненты комплекса нумеруют нижними индексами, дифференциал обозначают буквой ∂, так что диаграмма (3-4) превращается в диаграмму

$$\cdots \xrightarrow{\partial} V_{\nu+1} \xrightarrow{\partial} V_{\nu} \xrightarrow{\partial} V_{\nu-1} \xrightarrow{\partial} \cdots\,, \tag{3-5}$$

факторы $H_{\nu}(V) = \ker\left(\partial : V_{\nu} \to V_{\nu-1}\right) / \operatorname{im}\left(\partial : V_{\nu+1} \to V_{\nu}\right)$ называют *гомологиями*, элементы из $\ker \partial$ — *циклами*, а элементы из $\operatorname{im} \partial$ — *границами*[2]. Одни обозначения превращаются в другие формальной сменой знака у всех индексов с одновременным их опусканием или поднятием.

[1] и в более общих категориях, где есть обладающее надлежащими свойствами понятие *точной последовательности* стрелок

[2] и только комплексы так и остаются *комплексами* ☺

Пример 3.1 (цепной комплекс симплициального множества)
Пусть $X : \Delta^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ — симплициальное множество[1], и K-произвольное коммутативное кольцо. Свободный K-модуль с базисом $X_n = X([n])$ обозначается через $C_n = C_n(X, K)$ и называется модулем *n-мерных цепей* симплициального множества X с коэффициентами из K. Линейный оператор $\partial : C_n \to C_{n-1}$, действие которого на базисный вектор $x \in X_n$ задаётся правилом

$$\partial x \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i X(\partial_i) x \,, \tag{3-6}$$

где $\partial_i : [n-1] \hookrightarrow [n]$ — возрастающее вложение, не содержащее в образе числа i, называется *граничным оператором*. Он сопоставляет ориентированному симплексу его ориентированную границу[2] и имеет $\partial^2 = 0$.

Упражнение 3.1. Убедитесь в этом.

Комплекс (C, ∂) называется *цепным комплексом*, а его гомологии — *гомологиями* симплициального множества X с коэффициентами в K. В случае, когда $X = S(\mathcal{X})$ является множеством сингулярных симплексов[3] топологического пространства $\mathcal{X}$, эти гомологии называются *сингулярными гомологиями* топологического пространства $\mathcal{X}$ с коэффициентами в K и обозначаются $H_n(\mathcal{X}, K)$. Сказанное в равной степени применимо и к полусимплициальным множествам $X : \Delta_{\text{s}}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$. Получающиеся при этом гомологии называют *симплициальными гомологиями* триангулированного пространства $|X|$.

Упражнение 3.2. Вычислите симплициальные гомологии $H(T, \mathbb{Z})$ тора T, полученного склейкой дуг с другом пар противоположных сторон квадрата $ABCD$, триангулированного диагональю AC, так что $X_0 = \{A = B = C = D\}$ — одна точка, $X_1 = \{[AC], [AB] = [DC], [AD] = [BC]\}$ — три отрезка, $X_2 = \{[ABC], [ACD]\}$ — два треугольника.

Пример 3.2 (тензорное произведение комплексов)
На тензорном произведении $U \otimes V$ комплексов U и V имеется каноническая структура комплекса с дифференциалом

$$d = d_{U \otimes V} \overset{\text{def}}{=} d_U \otimes 1 + 1 \otimes d_V \,. \tag{3-7}$$

Равенство $d^2 = 0$ обеспечивается кошулевым правилом знаков, согласно которому

$$(1 \otimes d_V) \circ (d_U \otimes 1) = -d_U \otimes d_V \,,$$

ибо $|d_U| = |d_V| = 1$. Поэтому $d^2 = d_U^2 \otimes 1 + d_U \otimes d_V - d_U \otimes d_V + 1 \otimes d_V^2 = 0$. Отметим, что в силу того же правила знаков результат применения обеих частей формулы (3-7) к однородным элементам выглядит так:

$$d(u \otimes v) = (d_U \otimes 1)(u \otimes v) + (1 \otimes d_V)(u \otimes v) = (d_U u) \otimes v + (-1)^{|v|} v \otimes (d_V v)$$

[1] см. прим. 1.7 на стр. 7

[2] например, границей треугольника будет его контур, обходимый в порядке возрастания номеров вершин

[3] см. прим. 1.17 на стр. 18

Аналогично определяется тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_m$ любого множества комплексов. Дифференциал на нём продолжает дифференциалы $d_i : V_i \to V_i$ по s-правилу Лейбница и равен

$$d_{\otimes V_i} = \sum_{i=1}^{m} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes d_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

(отдельные слагаемые написанной суммы перемножаются и применяются к элементам с учётом кошулева правила знаков).

3.1.3. Мультикомплексы. Мы называем *m-комплексом* $\mathbb{Z}^m$-градуированный K-модуль $V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}^m} V^\mu$, одновременно являющийся градуированным модулем над грассмановой алгеброй от m переменных $K\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m \rangle$, также рассматриваемой с $\mathbb{Z}^m$ гадуировкой, в которой мультистепень образующей ε_i равна i-тому стандартному базисному вектору в $\mathbb{Z}^m$. Иначе говоря, на V должно быть задано m таких K-линейных дифференциалов $d_i : V \to V$, что для каждого $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{Z}^m$

$$d_i(V^\mu) \subset V^{\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_i + 1, \mu_{i+1}, \dots, \mu_m}$$

и $d_i d_j + d_j d_i = 0 = d_i^2$ для всех i, j. Чаще всего мы будем иметь дело с *бикомплексами* $V = \bigoplus_{p,q} V^{p,q}$, на которых действует пара дифференциалов $d_1, d_2 : V \to V$, таких что $d_1^2 = 0$, $d_2^2 = 0$, $d_1 d_2 = -d_2 d_1$, $d_1(V^{p,q}) \subset V^{p+1,q}$, $d_2(V^{p,q}) = V^{p,q+1}$.

С каждым m-комплексом V можно связать обычный $\mathbb{Z}$-градуированный комплекс $\operatorname{Tot} V$, называемый *свёрткой* или *тотальным комплексом* m-комплекса V и имеющий

$$\operatorname{Tot}^\nu V \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\sum \mu_i = \nu} V^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m} \quad \text{и} \quad d_{\operatorname{Tot}} = \sum d_i : \operatorname{Tot}^\nu V \to \operatorname{Tot}^{\nu+1} V .$$

Например, попарные тензорные произведения $U^p \otimes W^q$ однородных компонент комплексов (U, d_U) и (W, d_W) образуют бикомплекс с дифференциалами $d_1 = d_U \otimes 1_W$ и $d_2 = 1_U \otimes d_W$, и тензорное произведение комплексов $U \otimes V$ из предыдущего прим. 3.2 представляет собою тотальный комплекс этого бикомплекса.

Упражнение 3.3. Убедитесь, что для любых двух комплексов (U, d_U) и (W, d_W) модули $H^{p,q} = \operatorname{Hom}(U^{-p}, W^q)$ образуют бикомплекс с дифференциалами

$$d_1 : \varphi \mapsto (-1)^{q+p} \varphi \circ \partial_U \quad \text{и} \quad d_2 : \varphi \mapsto \partial_W \circ \varphi .$$

3.2. Категории комплексов. В этом курсе мы будем рассматривать три разных категории комплексов с одним и тем же классом объектов — комплексами K-модулей — но с разными классами морфизмов.

3.2.1. DG-категория комплексов. Аддитивная категория $\mathcal{C}$, в которой на каждом множестве стрелок $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ имеется структура комплекса, а дифференциалы композиций вычисляются по s-правилу Лейбница:

$$d(\varphi \circ \psi) = (d\varphi) \circ \psi + (-1)^{|\varphi|} \varphi \circ (d\psi) \tag{3-8}$$

называется *дифференциальной градуированной* (или *DG*-) категорией. Примером такой категории является *DG-категория комплексов*, объектами которой являются комплексы K-модулей (V, d_V), а морфизмами из (U, d_U) в (W, d_W) являются произвольные K-линейные гомоморфизмы $U \to W$, образующие градуированный модуль (3-1)

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V,W) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{GrHom}(V,W) = \bigoplus_{\nu} \mathrm{GrHom}^{\nu}(V,W) \tag{3-9}$$

с дифференциалом $d : \mathrm{GrHom}^{\nu}(V,W) \to \mathrm{GrHom}^{\nu+1}(V,W)$, переводящим однородный морфизм $\psi : V \to W$ в его s-коммутатор с дифференциалами:

$$\psi \mapsto [d,\psi] \overset{\mathrm{def}}{=} d_W \circ \psi - (-1)^{|\psi|}\psi \circ d_V \,.$$

Упражнение 3.4. Убедитесь, что комплекс $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V,W)$ является свёрткой бикомплекса $\mathrm{Hom}(U^p, W^q)$ из упр. 3.3, и проверьте, что $d^2 = 0$ и что дифференциал композиции вычисляется по s-правилу Лейбница (3-8).

Мы будем использовать обозначение $\mathrm{Hom}^{\nu}_{\mathrm{DG}}(V,W) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{GrHom}^{\nu}(V,W)$ для однородных компонент комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V,W)$.

3.2.2. Просто категория комплексов обозначается $\mathcal{C}om$ и имеет морфизмами K-линейные отображения степени нуль, перестановочные с дифференциалами:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}om}(V,W) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(V,W) \cap \ker d = \{\varphi : V \to W \mid \forall \nu\ \varphi(V^{\nu}) \subset W^{\nu}\ \&\ d_W\varphi = \varphi d_V\}\,.$$

Такие отображения называются *морфизмами комплексов*. Каждый морфизм комплексов $\varphi : V \to W$ корректно задаёт морфизм когомологий $\varphi_* : H(V) \to H(W)$, переводящий класс коцикла ξ по модулю кограниц в класс коцикла $\varphi(\xi)$.

Упражнение 3.5. Убедитесь в этом.

Для любой абелевой категории $\mathcal{A}$ категория $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$ комплексов из объектов категории $\mathcal{A}$ тоже абелева: ядро морфизма комплексов $\varphi : V \to W$ это подкомплекс в V, образованный ядрами морфизмов $\varphi_\nu = \varphi|_{V^\nu} : V^\nu \to W^\nu$, а коядро — фактор комплекса W, состоящий из коядер морфизмов φ_ν.

Упражнение 3.6. Убедитесь, что $\ker \varphi_\nu$ действительно образуют подкомплекс[1] в V, а дифференциал d_W корректно задаёт структуру комплекса на факторе $W/\varphi(V)$, и проверьте, что образ морфизма φ является подкомплексом в W и канонически изоморфен кообразу $\mathrm{coim}\,\varphi = V/\ker\varphi$.

Другой способ проверить, что категория $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$ абелева, — сказать, что комплекс K-модулей V это градуированный модуль над градуированной алгеброй[2] грассмановых многочленов от одной переменной $K\langle\varepsilon\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} K[\varepsilon]/\left(\varepsilon^2\right) = K\cdot 1 \oplus K\cdot\varepsilon$, в которой константы имеют степень 0, а переменная ε — степень 1 и $\varepsilon^2 = 0$: действие элемента ε на V это и есть дифференциал.

Упражнение 3.7. Покажите, что категория градуированных модулей $M = \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} M_k$ над любым градуированным кольцом $A = \bigoplus\limits_{k\geqslant 0} A_k$ с сохраняющими градуировку A-линейными отображениями в качестве стрелок абелева.

[1] т. е. d_V переводит $\ker\varphi_\nu$ в $\ker\varphi_{\nu+1}$

[2] по определению это означает, что однородные степени m элементы алгебры действуют на модуле однородными K-линейными операторами степени m

Предложение 3.1
С любой точной тройкой комплексов $0 \to U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \to 0$ функториально[1] связана длинная точная последовательность когомологий

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_*} H^i(V) \xrightarrow{\psi_*} H^i(W) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(V) \xrightarrow{\psi_*} \cdots , \tag{3-10}$$

в которой *связывающий гомоморфизм* $\delta : H^i(W) \to H^{i+1}(U)$ переводит когомологический класс коцикла $\xi \in \ker d_W$ в когомологический класс коцикла $d_V(\eta)$, где $\eta \in \in \psi^{-1}(\xi)$ — произвольный подъём коцикла ξ в модуль V.

Доказательство. Корректность определения гомоморфизма δ проверяется ползаньем по коммутативной диаграмме с точными строками

$$\begin{tikzcd}
{} & {} & {} \\
U^{i+1} \arrow[u, "d_U"] \arrow[r, hook, "\varphi"] & V^{i+1} \arrow[u, "d_V"] \arrow[r, two heads, "\psi"'] & W^{i+1} \arrow[u, "d_W"] \\
U^{i} \arrow[u, "d_U"] \arrow[r, hook, "\varphi"] & V^{i} \arrow[u, "d_V"] \arrow[r, two heads, "\psi"'] & W^{i} \arrow[u, "d_W"] \arrow[ull, dotted, "\delta"] \\
U^{i-1} \arrow[u, "d_U"] \arrow[r, hook, "\varphi"] & V^{i-1} \arrow[u, "d_V"] \arrow[r, two heads, "\psi"'] & W^{i-1} \arrow[u, "d_W"] \arrow[ull, dotted, "\delta"] \\
{} \arrow[u, "d_U"] & {} \arrow[u, "d_V"] & {} \arrow[u, "d_W"]
\end{tikzcd}$$

Упражнение 3.8. Убедитесь, что образ $d_V(\eta)$ любого элемента $\eta \in \psi^{-1}(\xi)$ лежит в $\ker d_V \cap \ker \psi \subset \ker d_U \subset U$, а его класс в $H(U)$ не зависит от выбора η и не меняется при добавлении к ξ кограницы.

Функториальная зависимость морфизмов φ_*, ψ_* и δ от точной тройки очевидна из их конструкции, как и то, что последовательность (3-10) является комплексом. Проверку его точности мы оставляем читателю. □

Упражнение 3.9. Проверьте точность последовательности (3-10).

Определение 3.1 (сдвиг градуировки)
Функтор сдвига $S : \mathcal{C}om \to \mathcal{C}om$, $V \mapsto SV = V[1]$, действует на комплекс по правилу $SV^\nu = V^{\nu+1}$, $d_{SV} = -d_V$, так что *отображение сдвига* $s : V \to V[1]$, тождественно действующее на элементы и лежащее в $\mathrm{Hom}^{-1}_{\mathrm{DG}}(V, V[1])$, s-коммутирует с дифференциалом: $[d, s] = d_{SV}s + sd_V = 0$. Действие функтора S на морфизмы тождественно. Функтор S обратим. Его итерации обозначаются $S^k V = V[k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

[1]в том смысле, что сопоставление точной тройке её длинной последовательности когомологий является функтором из категории точных трёхчленных комплексов в категорию точных комплексов (в качестве стрелок в обеих категориях рассматриваются морфизмы комплексов)

Пример 3.3 (конус морфизма)
С каждым морфизмом комплексов $\varphi : U \to W$ функториально связан сосредоточенный в двух столбцах с номерами -1 и 0 бикомплекс

$$
\begin{tikzcd}
 & \\
U^{i+1} \arrow[u, "-d_U"] \arrow[r, "\varphi"] & W^{i+1} \arrow[u, "d_W"'] \\
U^{i} \arrow[u, "-d_U"] \arrow[r, "\varphi"] & W^{i} \arrow[u, "d_W"'] \\
U^{i-1} \arrow[u, "-d_U"] \arrow[r, "\varphi"] & W^{i-1} \arrow[u, "d_W"'] \\
 \arrow[u, "-d_U"] & \arrow[u, "d_W"']
\end{tikzcd}
\tag{3-11}
$$

свёртка которого называется *конусом* морфизма φ и обозначается $\mathrm{Con}(\varphi)$. Как градуированный модуль $\mathrm{Con}(\varphi) \simeq U[1] \oplus W$ имеет $\mathrm{Con}^i(\varphi) = U^{i+1} \oplus W^i$, но дифференциал

$$d_{\mathrm{Con}(\varphi)} : U[1] \oplus W \to U[1] \oplus W\,, \quad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -d_U & 0 \\ \varphi & d_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \tag{3-12}$$

не равен прямой сумме дифференциалов. Комплекс $W \subset \mathrm{Con}(\varphi)$ является подкомплексом в $\mathrm{Con}(\varphi)$ и фактор $\mathrm{Con}(\varphi)/W \simeq V[1]$, однако точная тройка комплексов

$$0 \to W \xrightarrow{\iota_\varphi} \mathrm{Con}(\varphi) \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1] \to 0\,, \tag{3-13}$$

вообще говоря, *не расщепляется* в категории $\mathcal{Com}$. Длинная точная последовательность когомологий тройки (3-13) имеет вид

$$\cdots \to H^i(\mathrm{Con}\,\varphi) \xrightarrow{\pi_{\varphi*}} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(W) \xrightarrow{\iota_{\varphi*}} H^{i+1}(\mathrm{Con}\,\varphi) \to \cdots\,, \tag{3-14}$$

и её связывающий гомоморфизм $\delta : H^i(U[1]) = H^{i+1}(U) \to H^{i+1}(W)$ совпадает с φ_*.

Упражнение 3.10. Убедитесь в этом.

3.2.3. Гомотопическая категория комплексов обозначается $\mathcal{Ho}$ и имеет в качестве морфизмов нулевые когомологии комплексов $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Ho}}(V,W) \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^0\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V,W)\right) = \frac{\mathrm{Hom}_{\mathcal{Com}}(V,W)}{\mathrm{im}\left(d : \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathrm{DG}}(V,W) \to \mathrm{Hom}^{0}_{\mathrm{DG}}(V,W)\right)}\,.$$

Иначе говоря, морфизмы в гомотопической категории $\mathcal{Ho}$ суть морфизмы комплексов $\varphi : V \to W$, рассматриваемые с точностью до сложения с морфизмами вида $[d,\gamma] = d_W\gamma - \gamma d_V$, где $\gamma : V \to W$ — любое K-линейное отображение степени -1. Морфизмы комплексов вида $[d,\gamma]$ называются *гомотопными нулю*. Морфизмы комплексов φ и ψ с гомотопной нулю разностью $\varphi - \psi = [d,\gamma]$ называются *гомотопными*, а отображение γ называется в этой ситуации *гомотопией* между φ и ψ, что записывается как $\varphi \underset{\gamma}{\sim} \psi$. Итак, морфизмы в категории $\mathcal{H}o$ это морфизмы комплексов с точностью до гомотопии.

Упражнение 3.11. Убедитесь, что гомотопные нулю морфизмы образуют двусторонний идеал в $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}om)$, т. е. $\varphi \underset{\gamma}{\sim} 0 \Rightarrow \varphi\psi \underset{\gamma\psi}{\sim} 0$ и $\eta\varphi \underset{\eta\gamma}{\sim} 0$ для всех таких стрелок $\psi, \eta \in \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}om)$, что композиции $\varphi\psi$ и $\eta\varphi$ определены.

Тем самым, композиция морфизмов корректно определена на классах гомотопных морфизмов, и $\mathcal{H}o$ действительно является категорией.

Гомотопный нулю морфизм $\varphi = d_W\gamma + \gamma d_V : V \to W$ задаёт нулевой морфизм когомологий $\varphi_* : H(V) \to H(W)$, т. к. для любого коцикла $\xi \in \ker d_V$ коцикл $\varphi(\xi) = = d_W(\gamma\xi) + \varphi\gamma(d_V\xi) = d_W(\gamma\xi)$ является кограницей. Поэтому гомотопные морфизмы комплексов одинаково действуют на когомологиях. В частности, при вычислении когомологий произвольного комплекса $V \in \mathcal{C}om$ можно заменить этот комплекс любым другим комплексом W, изоморфным V в категории $\mathcal{H}o$ — когомологии у W будут те же, что и у V, хотя изоморфизма между V и W в категории $\mathcal{C}om$ при этом может и не быть.

Определение 3.2

Комплекс V называется *стягиваемым*, если $\mathrm{Id}_V \underset{\gamma}{\sim} 0$. Гомотопия γ между нулевым и тождественным эндоморфизмами называется *стягивающей гомотопией*.

Упражнение 3.12. Убедитесь, что в категории $\mathcal{H}o$ все стягиваемые комплексы изоморфны нулевому комплексу и, в частности, ацикличны.

Пример 3.4 (конус тождественного морфизма)

Конус $\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)$ тождественного морфизма $\mathrm{Id}_V : V \to V$ стягиваем посредством стягивающей гомотопии, которая тождественно отображает слагаемое $V \subset \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)$ в такое же слагаемое $V \subset \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)[-1]$ и аннулирует слагаемое $V[1] \subset \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)$:

$$\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V) = V[1] \oplus V \xrightarrow{\gamma} V \oplus V[-1] = \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)[-1] \ : \quad \begin{pmatrix} v' \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

В самом деле, s-коммутатор $\left[d_{\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)}, \gamma\right]$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d_V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & d_V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)}.$$

3.3. Отмеченные треугольники. Конус $\mathrm{Con}(\varphi)$ произвольного морфизма комплексов $\varphi : U \to W$ включается в категории $\mathcal{C}om$ в точную тройку[1]

$$0 \to W \xrightarrow{\iota_\varphi} \mathrm{Con}(\varphi) \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1] \to 0 \tag{3-15}$$

Мы собираемся построить в категории $\mathcal{H}o$ изоморфизмы

$$\alpha' : W[1] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Con}\left(\pi_\varphi\right) \quad \text{и} \quad \alpha'' : \mathrm{Con}\left(\iota_\varphi\right) \xrightarrow{\sim} U[1] \tag{3-16}$$

[1]см. прим. 3.3 на стр. 58

включающиеся в бесконечную коммутативную в $\mathcal{H}o$ периодическую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\pi_\varphi"] & U \arrow[r, "\iota_{\pi_\varphi}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Con}(\pi_\varphi)[-1] \arrow[r, "\pi_{\pi_\varphi}"] & \mathrm{Con}(\varphi) \arrow[r, "\pi_\varphi"] \arrow[d, equal] & U[1] \arrow[r, "\iota_{\pi_\varphi}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Con}(\pi_\varphi) \arrow[r, "\pi_{\pi_\varphi}"] & {} \\
{} \arrow[r, "\pi_\varphi"] & U \arrow[r, "\varphi"] & W \arrow[r, "\iota_\varphi"] \arrow[u, "\alpha'"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Con}(\varphi) \arrow[r, "\pi_\varphi"] \arrow[d, equal] & U[1] \arrow[r, "\varphi"] & W[1] \arrow[r, "\iota_\varphi"] \arrow[u, "\alpha'"] \arrow[d, equal] & {} \\
{} \arrow[r, "\iota_\varphi"] & \mathrm{Con}(\iota_\varphi)[-1] \arrow[r, "\pi_{\iota_\varphi}"] \arrow[u, "\alpha''"] & W \arrow[r, "\iota_\varphi"] & \mathrm{Con}(\varphi) \arrow[r, "\iota_{\iota_\varphi}"] & \mathrm{Con}(\iota_\varphi) \arrow[r, "\pi_{\iota_\varphi}"] \arrow[u, "\alpha''"] & W[1] \arrow[r, "\iota_\varphi"] & {}
\end{tikzcd}$$

означающую, что в категории $\mathcal{H}o$ любой морфизм $\varphi : U \to W$ производит бесконечную периодическую последовательность

$$\cdots \xrightarrow{\varphi} W[-1] \xrightarrow{\iota_\varphi} \mathrm{Con}(\varphi)[-1] \xrightarrow{\pi_\varphi} U \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\iota_\varphi} \mathrm{Con}(\varphi) \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1] \xrightarrow{\varphi} \cdots \tag{3-17}$$

каждый член X которой канонически изоморфен конусу морфизма между двумя предыдущими членами, причём эти изоморфизмы превращают входящую в X и выходящую из X стрелки последовательности (3-17) в тройку (3-15). Поскольку

$$\mathrm{Con}\left(\pi_\varphi\right)[-1] = \mathrm{Con}(\varphi) \oplus U = U[1] \oplus W \oplus U$$
$$\mathrm{Con}\left(\iota_\varphi\right) = W[1] \oplus \mathrm{Con}(\varphi) = W[1] \oplus U[1] \oplus W$$

как градуированные модули, а их дифференциалы задаются матрицами[1]:

$$\partial' = \begin{pmatrix} -d_U & 0 & 0 \\ \varphi & d_W & 0 \\ -1_U & 0 & d_U \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \partial'' = \begin{pmatrix} -d_W & 0 & 0 \\ 0 & -d_U & 0 \\ 1_W & \varphi & d_W \end{pmatrix}.$$

W является подкомплексом в $\mathrm{Con}\left(\pi_\varphi\right)[-1]$, а $\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_W)$ — подкомплексом в $\mathrm{Con}\left(\iota_\varphi\right)$, и в категории $\mathcal{C}om$ имеются точные тройки комплексов:

$$0 \to W \xrightarrow{\alpha'} \mathrm{Con}\left(\pi_\varphi\right)[-1] \to \mathrm{Con}(-\mathrm{Id}_U) \to 0 \tag{3-18}$$

$$0 \to \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_W) \to \mathrm{Con}\left(\iota_\varphi\right) \xrightarrow{\alpha''} U[1] \to 0\,. \tag{3-19}$$

Зададим морфизмы комплексов $\beta' : \mathrm{Con}\left(\pi_\varphi\right)[-1] \to W$ и $\beta'' : U[1] \to \mathrm{Con}\left(\iota_\varphi\right)$ как

$$\beta' : \begin{pmatrix} u_1 \\ w \\ u \end{pmatrix} \mapsto w + \varphi u \quad \text{и} \quad \beta'' : u_1 \mapsto \begin{pmatrix} -\varphi u_1 \\ u_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3.13. Убедитесь, что $\alpha'\varphi = \iota_{\pi_\varphi}$, $\alpha''\iota_{\iota_\varphi} = \pi_\varphi$, $\varphi\alpha'' = \pi_{\iota_\varphi}$, $\pi_{\pi_\varphi}\alpha' = \iota_\varphi$ в категории $\mathcal{C}om$ и что β' и β'' являются, соответственно, левым обратным к α' и правым обратным к α'' морфизмами комплексов, т. е. $\beta'\partial' = d_W\beta'$, $\beta'' d_{U[1]} = \partial''\beta''$, $\beta'\alpha' = \mathrm{Id}_W$, $\alpha''\beta'' = \mathrm{Id}_{U[1]}$.

[1] см. формулу (3-12) на стр. 59

Стягивающая конус тождественного морфизма гомотопия из прим. 3.4 поднимается на средние члены троек (3-18) и (3-19) до гомотопий

$$\gamma' : U[1] \oplus W \oplus U = \mathrm{Con}\left(\pi_\varphi\right)[-1] \to \mathrm{Con}\left(\pi_\varphi\right)[-2] = U \oplus W \oplus U[-1], \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ w \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma'' : W[1] \oplus U[1] \oplus W = \mathrm{Con}\left(\iota_\varphi\right) \to \mathrm{Con}\left(\iota_\varphi\right)[-1] = W \oplus U \oplus W[-1], \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ u_1 \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

стягивающих фактор $\mathrm{Con}(-\mathrm{Id}_U)$ в (3-18) и подкомплекс $\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_W)$ (3-19) и устанавливающих эквивалентности $1-\alpha'\beta' \underset{\gamma'}{\sim} = 0$ и $1-\alpha''\beta'' \underset{\gamma''}{\sim} = 0$:

$$\begin{tikzcd}
 & & \begin{pmatrix} -du_1 \\ \varphi u_1 + dw \\ -u_1 + du \end{pmatrix} \arrow[rr, mapsto, "\gamma'"] & & \begin{pmatrix} u_1 - du \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[dr, dash, dotted] & \\
\begin{pmatrix} 0 \\ w + \varphi u \\ 0 \end{pmatrix} & w + \varphi u \arrow[l, mapsto, "\alpha'"'] & & \begin{pmatrix} u_1 \\ w \\ u \end{pmatrix} \arrow[ul, mapsto, "\partial'"'] \arrow[dl, mapsto, "\gamma'"] \arrow[ll, mapsto, "\beta'"'] \arrow[rr, mapsto, "\partial'\gamma'+\gamma'\partial'"] & & \begin{pmatrix} u_1 \\ -\varphi u \\ u \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} -u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[rr, mapsto, "\partial'"'] & & \begin{pmatrix} du \\ -\varphi u \\ u \end{pmatrix} \arrow[ur, dash, dotted] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{pmatrix} w_1 + \varphi u_1 + dw \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[dl, dash, dotted] & & \begin{pmatrix} -dw_1 \\ -du_1 \\ w_1 + \varphi u_1 + dw \end{pmatrix} \arrow[ll, mapsto, "\gamma''"'] & \\
\begin{pmatrix} w_1 + \varphi u_1 \\ 0 \\ w \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} w_1 \\ u_1 \\ w \end{pmatrix} \arrow[ll, mapsto, "\partial''\gamma''+\gamma''\partial''"'] \arrow[ur, mapsto, "\partial''"] \arrow[dr, mapsto, "\gamma''"] \arrow[r, mapsto, "\alpha''"] & u_1 \arrow[r, mapsto, "\beta''"] & \begin{pmatrix} -\varphi u_1 \\ u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} -dw \\ 0 \\ w \end{pmatrix} \arrow[ul, dash, dotted] & & \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[ll, mapsto, "\partial''"] &
\end{tikzcd}$$

означающие, что α' обратен β', а α'' обратен β'' в категории $\mathcal{H}o$.

Определение 3.3

Периодическая последовательность в гомотопической категории комплексов $\mathcal{H}o$ вида

$$\cdots \xrightarrow{\alpha} B[-1] \xrightarrow{\beta} C[-1] \xrightarrow{\gamma} A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1] \xrightarrow{\alpha} B[1] \xrightarrow{\beta} \cdots$$

называется *отмеченным треугольником*, если она изоморфна в категории $\mathcal{H}o$ последовательности (3-17), т. е. когда каждый её член X можно отождествить с конусом морфизма между двумя предыдущими членами таким изоморфизмом, который переводит входящую в X и выходящую из X стрелки в тройку (3-15).

Предложение 3.2
Каждый морфизм $A \xrightarrow{\varphi} B$ в категории $\mathcal{H}o$ включается в отмеченный треугольник

$$\cdots \xrightarrow{\pi} A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\iota} \operatorname{Con}(\varphi) \xrightarrow{\pi} A[1] \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\iota} \cdots, \tag{3-20}$$

и сопоставление $\varphi \mapsto \operatorname{Con}\varphi$ задаёт функтор из категории диаграмм вида $\bullet \to \bullet$ в категорию отмеченных треугольников, т. е. любой коммутативный квадрат $\beta\varphi = \varphi'\alpha$ продолжается до морфизма отмеченных треугольников

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\pi"] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\beta"] & \operatorname{Con}(\varphi) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\gamma"] & A[1] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & B[1] \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\beta"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\pi'"] & A' \arrow[r, "\varphi'"] & B \arrow[r, "\iota"] & \operatorname{Con}(\varphi') \arrow[r, "\pi'"] & A'[1] \arrow[r, "\varphi'"] & B'[1] \arrow[r, "\iota'"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

где все квадраты коммутативны, и композиция морфизмов между диаграммами $\bullet \to \bullet$ переходит в композицию морфизмов между треугольниками.

Доказательство. Первое уже было проверено выше. Морфизм $\gamma : A[1] \oplus B \to A'[1] \oplus B'$ задаётся диагональной матрицей из морфизмов α и β. □

Предложение 3.3 (точная последовательность когомологий)
Для каждого отмеченного треугольника $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1]$ в гомотопической категории $\mathcal{H}o(\mathcal{A})$ комплексов объектов абелевой категории $\mathcal{A}$ в самой категории $\mathcal{A}$ имеет место длинная точная последовательность когомологий

$$\cdots \xrightarrow{\gamma_*} H^i(A) \xrightarrow{\alpha_*} H^i(B) \xrightarrow{\beta_*} H^i(C) \xrightarrow{\gamma_*} H^{i+1}(A) \xrightarrow{\alpha_*} \cdots. \tag{3-21}$$

Доказательство. С каждым из морфизмов α, β, γ связана точная тройка (3-15) в категории $\mathcal{C}om$. Выше мы видели, что в категории $\mathcal{H}o$ все эти тройки соединяются в одну коммутативную диаграмму, строки которой — треугольники (3-20)

$$\begin{tikzcd}
C[-1] \arrow[r, hook] & \operatorname{Con}(\beta)[-1] \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & B \arrow[d, equal] & & & \\
& A \arrow[r, hook] \arrow[ur, "\alpha"] & \operatorname{Con}(\gamma)[-1] \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & C \arrow[d, equal] & & \\
& & B \arrow[r, hook] \arrow[ur, "\beta"] & \operatorname{Con}(\alpha) \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & A[1] \arrow[d, equal] & \\
& & & C \arrow[r, hook] \arrow[ur, "\gamma"] & \operatorname{Con}(\beta) \arrow[r, two heads] & B[1]
\end{tikzcd}$$

а вертикальные равенства — изоморфизмы в категории $\mathcal{H}o$. Поэтому длинные точные последовательности когомологий всех треугольников отождествляются друг с другом в одну длинную точную последовательность (3-21). □

Предложение 3.4 (конус композиции или диаграмма октаэдра) Для любой пары отмеченных треугольников $A \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} B$ и $C \xrightarrow{\gamma} E \xrightarrow{\delta} D$ с общей вершиной E имеется такой канонический изоморфизм конусов композиций

$$\mathrm{Con}(\delta\alpha) \simeq \mathrm{Con}(\beta\gamma)\,,$$

что будучи отождествлёнными при помощи этого изоморфизма, они включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, "\delta\alpha"] \arrow[ddr, "\alpha"'] & & & \\
& & D \arrow[dr, "\delta'"] & \\
& E \arrow[ur, "\delta"] \arrow[dr, "\beta"] & & F = \mathrm{Con}(\delta\alpha) = \mathrm{Con}(\beta\gamma) \\
& & B \arrow[ur, "\beta'"'] & \\
C \arrow[uur, "\gamma"] \arrow[urr, "\beta\gamma"'] & & &
\end{tikzcd} \tag{3-22}$$

где $F = \mathrm{Con}(\delta\alpha) = \mathrm{Con}(\beta\gamma)$, а $A \xrightarrow{\delta\alpha} D \xrightarrow{\delta'} F$ и $C \xrightarrow{\beta\gamma} B \xrightarrow{\beta'} F$ — отмеченные треугольники. Иначе говоря, на картинке ниже левая диаграмма производит правую

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "\delta\alpha"'] & & B \arrow[ll, squiggly, "\varphi"'] \\
& E \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dl, "\delta"] & \\
D \arrow[rr, squiggly, "\psi"'] & & C \arrow[ul, "\gamma"] \arrow[uu, "\beta\gamma"']
\end{tikzcd}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[dd, "\delta\alpha"'] & & B \arrow[ll, squiggly, "\varphi"'] \arrow[dl, "\beta'"] \\
& F \arrow[ul, squiggly, "\alpha'"] \arrow[dr, squiggly, "\gamma'"] & \\
D \arrow[ur, "\delta'"] \arrow[rr, squiggly, "\psi"'] & & C \arrow[uu, "\beta\gamma"']
\end{tikzcd} \tag{3-23}$$

в которой $\alpha'\beta' = \varphi$, $\gamma'\delta' = \psi$, и обе они соединяются в одну диаграмму из рёбер октаэдра с экватором $ABCD$, треугольные грани которого состоят из чередующихся в шахматном порядке коммутативных и отмеченных треугольников[1], а меридиан $EBFD$ коммутативен.

Доказательство. □

[1] в диаграммах (3-23) стрелки каждого отмеченного треугольника задают циклический порядок на его вершинах, а стрелки каждого коммутативного — линейный, при этом волнистые стрелки вроде $B \rightsquigarrow A$ обозначают морфизмы степени 1, т. е. стрелки вида $B \to A[1]$ в соответствующих отмеченных треугольниках

3.4. Комплексы Кошуля. Рассмотрим коммутативное кольцо K и для произвольного элемента $f \in K$ обозначим через K_f двучленный комплекс

$$0 \to K \xrightarrow{f} K \to 0\,, \tag{3-24}$$

сосредоточенный в степенях -1 и 0, дифференциалом в котором является гомоморфизм умножения на $f\colon x \mapsto fx$. Когомологии комплекса K_f суть

$$\begin{aligned} H^{-1}(K_f) &= \operatorname{Ann} f = \{a \in K \mid af = 0\} \\ H^0(K_f) &= K/(f) \end{aligned}$$

Лемма 3.1
Любой комплекс K-модулей C вписывается в категории $\mathcal{C}om$ в точную тройку комплексов

$$0 \to C \hookrightarrow K_f \otimes C \twoheadrightarrow C[1] \to 0 \tag{3-25}$$

которая производит длинную точную последовательность когомологий

$$\cdots \to H^i(C) \xrightarrow{f} H^i(C) \to H^i(K_f \otimes C) \to H^{i+1}(C) \xrightarrow{f} H^{i+1}(C) \to \cdots$$

со связывающим гомоморфизмом $\delta\,:\,H^i(C[1]) = H^{i+1}(C) \to H^{i+1}(C) =, \delta(x) = fx\,.$

Доказательство. Комплекс $K_f \otimes C$ имеет компонентой степени k сумму $K_f^{-1} \otimes C^{k+1} \oplus K_f^0 \otimes C^k = C^{k+1} \oplus C^k$, и как K-модуль изоморфен $C[1] \oplus C$, а его дифференциал $f \otimes 1 + 1 \otimes d_C$ действует, согласно Кошулеву правилу знаков, так: $1 \otimes c^{k+1} \mapsto f \otimes c^{k+1} - 1 \otimes dc^{k+1}$, $1 \otimes c^k \mapsto 1 \otimes dc^k$. Таким образом комплекс $K_f \otimes C$ совпадает с конусом морфизма $f\,:\,C \to C$, $c \mapsto fc$, и все утверждения вытекают из прим. 3.3 на стр. 58. □

Следствие 3.1
Если $f \in K$ обратим, то комплекс $K_f \otimes C$ ацикличен для любого комплекса C. □

Следствие 3.2
Если $f \in K$ не делит нуль, то комплекс $H^i\left(K_f \otimes C\right) \simeq H^i(C)/f \cdot H^i(C)$ при всех i. □

Пример 3.5 (комплекс Кошуля последовательности элементов)
Для конечной последовательности элементов $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ тензорное произведение

$$K_{f_1 f_2 \dots f_m} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\alpha=1}^{m} K_{f_\alpha}$$

двучленных комплексов (3-24) называется *комплексом Кошуля* последовательности $f_1, f_2, \dots, f_m$. Комплекс Кошуля сосредоточен в степенях от $-m$ до 0, и его компонента степени $-k$ является прямой суммой $\binom{m}{k}$ свободных модулей $K^{\otimes m} = K \otimes K \otimes \cdots \otimes K \simeq K$ ранга 1, занумерованных возрастающими последовательностями $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ индексов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant m$, равных номерам тех k из m тензорных сомножителей, что имеют степень -1. Если сопоставить базисному вектору $1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ того произведения, у которого степени единиц, стоящих в позициях $i_1, i_2, \dots, i_k$ равны -1, а степени остальных единиц равны 0, грассманов моном $\xi_I = \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_k}$, то компонента степени $-k$ комплекса $K_{f_1 f_2 \dots f_m}$ изоморфно отобразится на компоненту степени k грассмановой алгебры $\Lambda(K^m)$ свободного K-модуля ранга m с базисом $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$. При этом отождествлении дифференциал комплекса Кошуля запишется грассмановым дифференциальным оператором

$$\partial = \sum_{\alpha=1}^{m} f_\alpha \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} : \Lambda^k\left(K^m\right) \to \Lambda^{k-1}\left(K^m\right), \quad \omega \mapsto \sum_{\alpha=1}^{m} f_\alpha \cdot \partial\omega / \partial\xi_\alpha, \tag{3-26}$$

а сам комплекс приобретёт вид

$$0 \to \Lambda^m\left(K^m\right) \to \Lambda^{m-1}\left(K^m\right) \to \cdots \to \Lambda^2\left(K^m\right) \to K^m \to K \to 0 \tag{3-27}$$

(самый правый ненулевой дифференциал переводит ξ_i в $f_i \in K$). Последовательность $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ называется *регулярной*, если класс элемента f_i не делит нуль в факторе $K/(f_{i+1}, \dots, f_m)$ при всех[1] $0 \leqslant i \leqslant m$. Из сл. 3.1 и из сл. 3.2 убывающей индукцией по m мы получаем

Следствие 3.3

Если элементы $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ образуют регулярную последовательность, комплекс Кошуля (3-27) ацикличен во всех отрицательных степенях и имеет $H^0(K_{f_1 f_2 \dots f_m}) \simeq K/(f_1, f_2, \dots, f_m)$. В частности, если один из элементов f_i обратим в K, комплекс Кошуля ацикличен всюду.

Пример 3.6 (комплексы Кошуля и Де Рама кольца многочленов)

Полагая в прим. 3.5 $K = SV^*$ и $f_i = x_i$, где V^* — конечномерное векторное пространство над полем $\Bbbk$ с базисом $x_1, x_2, \dots, x_n$, мы получаем из (3-27) ацикличный комплекс свободных модулей над кольцом многочленов $SV^* = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$:

$$0 \to \Lambda^m V^* \otimes SV^* \to \Lambda^{m-1} V^* \otimes SV^* \to \cdots \to \Lambda^2 V^* \otimes SV^* \to V^* \otimes SV^* \to SV^* \to \Bbbk \to 0 \tag{3-28}$$

сосредоточенный в степенях от $-m$ до $+1$ с дифференциалом

$$\partial = \sum x_i \partial/\partial\xi_i : \Lambda^k V^* \otimes S^m V^* \to \Lambda^{k-1} V^* \otimes S^{k+1} V^*, \quad \omega \otimes f \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\omega}{\partial\xi_i} \otimes x_i \cdot f, \tag{3-29}$$

где x_i и ξ_i — базисные векторы пространства V^* рассматриваемые как образующие симметрической и внешней алгебр пространства V соответственно, а самый правый ненулевой дифференциал это факторизация $SV^* \twoheadrightarrow SV^*/(x_1, x_2, \dots, x_n) \simeq \Bbbk$ кольца многочленов по идеалу многочленов без свободного члена. Ацикличность комплекса (3-28) можно установить без использования (сл. 3.3) при помощи следующих гомотопических соображений. На пространстве $\Lambda V^* \otimes SV^*$ помимо дифференциала Кошуля, который является гомоморфизмом SV^*-модулей и имеет бистепень $(-1, 1)$ по грассмановым и коммутирующим переменным, есть ещё и *дифференциал ДеРама*, который

[1] при $i = m$ это означает, что f_m не делит нуль в K

линеен по грассманову сомножителю и имеет бистепень $(1,-1)$. Он задаётся известной из анализа формулой:

$$d=\sum \xi_i\partial/\partial x_i \,:\, \Lambda^k V^*\otimes S^m V^*\to \Lambda^{k+1}V^*\otimes S^{k-1}V^*\,,\quad \omega\otimes f\mapsto \sum_{i=1}^{n}\xi_i\wedge\omega\otimes\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

и является ($\mathbb{Z}$-линейным) эндоморфизмом степени -1 комплекса (3-28).

Упражнение 3.14. Убедитесь, что $d^2=0$ и что коммутатор $[\partial,d]=\partial d+d\partial$ действует на компоненте $\Lambda^k V^*\otimes S^m V^*$ гомотетией с коэффициентом[1] $(k+m)$.

Из упражнения вытекает, что дифференциал Де Рама стягивает эндоморфизм комплекса (3-28), действующий на каждую однородную компоненту $\Lambda^k V^*\otimes S^m V^*$ умножением на полную степень $k+m$. Поэтому такое умножение действует нулём на когомологиях комплекса (3-28), откуда мы заключаем, что комплекс (3-28) ацикличен во всех членах, кроме разве что самого правого, где ацикличность была с самого начала очевидна. Это же рассуждение доказывает ацикличность *комплекса ДеРама*

$$\cdots\xrightarrow{d} S^3V^*\otimes\Lambda V^*\xrightarrow{d} S^2V^*\otimes\Lambda V^*\xrightarrow{d} V^*\otimes\Lambda V^*\xrightarrow{d}\Bbbk\to 0$$

который представляет собою бесконечный влево комплекс свободных модулей над алгеброй грассмановых многочленов ΛV^*.

3.4.1. Комплекс Кошуля квадратичной алгебры. Предыдущий пример допускает следующее некоммутативное обобщение. Градуированная алгебра $A=T(V)/(I)$, являющаяся фактором свободной ассоциативной алгебры $T(V)=\bigoplus_{k\geqslant 0}V^{\otimes k}$ конечномерного векторного пространства V над полем $\Bbbk$ по двустороннему идеалу $(I)\subset T(V)$, порождённому векторным подпространством $I\subset V\otimes V$, называется *квадратичной алгеброй*. Внешняя алгебра SV и грассманова алгебра ΛV являются примерами квадратичных алгебр и их идеалы соотношений порождаются линейными оболочками тензоров вида $v_1\otimes v_2-v_2\otimes v_1$ и вида $v\otimes v$ соответственно. Квадратичная алгебра $B=A^!\overset{\text{def}}{=}T(V^*)/(I^\perp)$, где $I^\perp=\operatorname{Ann}I\subset V^*\otimes V^*$, называется *двойственной* к квадратичной алгебре $A=T(V)/(I)$. Очевидно, что эта двойственность рефлексивна: $A^{!!}\simeq A$.

Упражнение 3.15. Убедитесь, что квадратичные алгебры SV и ΛV^* двойственны друг другу.

Из пары двойственных квадратичных алгебр A и $B=A^!$ можно изготовить ещё одну ассоциативную алгебру $B\otimes A$, задав на тензорном произведении векторных пространств $B\otimes A$ умножение мономов правилом

$$(a_1\otimes b_1)\cdot(a_2\otimes b_2)\overset{\text{def}}{=}(-1)^{|a_2||b_1|}(a_1a_2)\otimes(b_1b_2)$$

(знак в правой части согласуется с Кошулевым правилом) и распространив его по линейности на разложимые тензоры.

Упражнение 3.16. Убедитесь, что так определённое умножение корректно определено и ассоциативно.

[1] этот факт известен как *теорема Эйлера об однородных функциях*

Тензор $\mathrm{Id}_V \in \mathrm{End}\, V \simeq V^* \otimes V \subset B \otimes A$ называется *элементом Казимира* алгебры $B \otimes A$ и обозначается $\varkappa$. В двойственных базисах x_i и e_i пространств V^* и V он записывается как $\varkappa = \sum x_i \otimes e_i$.

Упражнение 3.17. Покажите, что $\varkappa^2 = 0$ в алгебре $B \otimes A$.

На тензорном произведении векторных пространств $K_B \stackrel{\text{def}}{=} B \otimes A^*$ имеется правое действие алгебры $B \otimes A$, в котором $\beta \otimes a$ действует оператором $\varrho_b \otimes \lambda_a^*$, где $\varrho_b : B \to B$, $\beta \mapsto \beta b$, — оператор правого умножения на b в B, а $\lambda_a{*} : A^* \to A^*$ — оператор, двойственный к оператору $\lambda_a : A \to A$, $\alpha \mapsto a\alpha$, левого умножения на a в A. В силу упр. 3.17 правое действие оператора Казимира $\varkappa$ задаёт на K_B структуру комплекса левых B-модулей. Этот комплекс называется *комплексом Кошуля* квадратично двойственных алгебр. В терминах пары двойственных базисов $x_i \in V^*$ и $e_i \in V$ действие дифференциала задаётся формулой

$$\partial : \beta \otimes \alpha \mapsto \sum (\beta \cdot x_i) \otimes (e_i \llcorner \alpha),$$

где $\alpha \in T(V^*)$ рассматривается как полилинейная форма на пространстве V, и $e_i \llcorner \alpha$ означает подстановку в её первый аргумент вектора e_i.

Упражнение 3.18. Убедитесь, что для алгебр $A = S(V)$ и $B = \Lambda(V^*)$ оператор Казимира $\varkappa$ переводит $\Lambda^k V^* \otimes S^m V^*$ в $\Lambda^{k-1} V^* \otimes S^{k+1} V^*$ и его действие на этой однородной компоненте связано с кошулевым дифференциалом ∂ из форм. (3-29) на стр. 66 соотношением $\varkappa = m^{-1}\partial$.

3.5. Спектральные последовательности. Рассмотрим последовательность таблиц $E_0, E_1, E_2, \dots$, клетки которых занумерованы целыми числами (p, q), где p увеличивается по горизонтали, а q по вертикали. Если при каждом r

- в клетках таблицы E_r располагаются модули $E_r^{p,q}$ и задан дифференциал d_r бистепени $(r, 1-r)$ по (p, q), действующий из клеток диагонали $p+q = n$ в клетки следующей диагонали $p + q = n + 1$ со сдвигом на r единиц вправо:
$$d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r}\,, \quad d_r^2 = 0$$
- очередная таблица E_{r+1} состоит из когомологий предыдущей таблицы E_r:
$$E_{r+1}^{p,q} = \ker(d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r})/d_r(E_r^{p-r,q-1+r})$$

то говорят, что эти таблицы образуют *спектральную последовательность*[1] (когомологического типа[2]). Скажем, что спектральная последовательность *стабилизируется*, если содержимое каждой клетки с какого-то момента перестаёт меняться, т. е.

$$\forall\,(p,q)\ \exists\, N = N(p,q) : \forall\, r \geqslant N \quad d_r\left(E_r^{p,q}\right) = 0 \quad \text{и} \quad d_r\left(E_r^{p-r,q+r-1}\right) = 0\,. \tag{3-30}$$

[1]в просторечии *спектралку*

[2]в спектралке гомологического типа таблицы нумеруют верхним индексом: $E^0, E^1, E^2, \dots$ и заполняют модулями $E_{p,q}^r$ с дифференциалами $\partial_r : E_{p,q}^r \to E_{p-r,q+r-1}^r$ бистепени $(-r, r-1)$, бьющими из клеток диагонали $p + q = n$ в клетки предыдущей диагонали $p + q = n - 1$ со сдвигом на r единиц в влево

Например, такое заведомо происходит, когда в одной из таблиц E_r на каждой диагонали $p+q=\mathrm{const}$ имеется лишь конечное число ненулевых модулей. Если спектральная последовательность стабилизируется, то модуль $E_r^{p,q}$ с $r \geqslant N(p,q)$ из условия (3-30) обозначается $E_\infty^{p,q}$ и называется *предельным*. В этой ситуации говорят, что спектралка *сходится* к градуированным модулям

$$E_\infty^n \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$$

и пишут $E_r^{p,q} \Rightarrow E_\infty^n$. Спектралки являются основным инструментом для получения информации о когомологиях комплексов, тем или иным способом «собранных» из более элементарных комплексов. Простейшим примером этой ситуации является

3.5.1. Спектральная последовательность фильтрованного комплекса. Пусть комплекс C обладает убывающей системой подкомплексов

$$F^pC \subset C\,, \quad \text{где} \quad p \in \mathbb{Z}\,, \quad F^pC \supseteq F^{p+1}C \quad \text{и} \quad d_C(F^pC) \subset F^pC\,. \tag{3-31}$$

Фильтрация (3-31) задаёт убывающую фильтрацию на когомологиях $H(C)$, относящую в подмодуль $F^pH(C)$ все коциклы, лежащие F^pC, по модулю кограниц, попавших в F^pC. Присоединённые факторы этой фильтрации

$$\mathrm{Gr}^pH(C) = F^pH(C)/F^{p+1}H(C) \tag{3-32}$$

можно вычислять при помощи спектральной последовательности, начинающейся с таблицы E_0, столбцы которой суть присоединённые фактор комплексы Gr^pC фильтрации FC, выровненные по вертикалям так, чтобы n-тый член C^n комплекса C был распределён вдоль n-той диагонали $p+q=n$ и подмодуль $F^pC^n \subset C^n$ занимал клетки с горизонтальными координатами $\geqslant p$, т. е.

$$E_0^{p,q} = \mathrm{Gr}^pC^{p+q} = F^pC^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q}\,, \tag{3-33}$$

а дифференциал $d_0 \,:\, \mathrm{Gr}^pC^{p+q} \to \mathrm{Gr}^pC^{p+q+1}$ индуцирован дифференциалом d комплекса C. Следующая таблица $E_1 = H(E_0)$ состоит из модулей когомологий дифференциала d_0:

$$E_1^{p,q} = \frac{\ker\left(d_0 \,:\, F^pC^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q} \to F^pC^{p+q+1}/F^{p+1}C^{p+q+1}\right)}{d_0\left(F^pC^{p+q-1}/F^{p+1}C^{p+q-1}\right)}$$

которые удобно отождествить с подфакторами модуля F^pC^{p+q}:

$$\begin{gathered} E_1^{p,q} \simeq Z_0^{p,q}/\left(B_0^{p,q} \cap Z_0^{p,q}\right) \simeq \left(Z_0^{p,q} + B_0^{p,q}\right)/B_0^{p,q}\,, \quad \text{где} \\ Z_0^{p,q} = \{c \in F^pC^{p+q} \mid dc \in F^{p+1}C^{p+q+1}\} \quad \text{и} \quad B_0^{p,q} = d\left(F^pC^{p+q-1}\right) + F^{p+1}C^{p+q}\,. \end{gathered} \tag{3-34}$$

Иначе говоря, таблица E_1 состоит из таких элементов $c \in F^pC^n$, которые отображаются дифференциалом d не в нуль, а в более глубокую фильтрационную компоненту $F^{p+1}C^{n+1}$ следующего члена комплекса, и рассматриваются они не по модулю кограниц $d\left(C^{n-1}\right)$, а по модулю элементов, лежащих в $d\left(F^pC^{n-1}\right) + F^{p+1}C^n$. Дифференциал

d комплекса C корректно задаёт на таких классах отображение $d_1 : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$ с $d_1^2 = 0$, действующее вдоль строк таблицы E_1.

Упражнение 3.19. Убедитесь в этом.

В следующей таблице $E_2 = H(E_1)$ стоят модули когомологий дифференциала d_1. Как подфакторы в F^pC^{p+q} они имеют вид

$$E_2^{p,q} = Z_1^{p,q}/\left(Z_1^{p,q} \cap B_1^{p,q}\right) \simeq \left(Z_1^{p,q} + B_1^{p,q}\right)/B_1^{p,q}, \quad \text{где}$$
$$Z_1^{p,q} = \{c \in F^pC^{p+q} \mid dc \in F^{p+2}C^{p+q+1}\} \quad \text{и} \quad B_1^{p,q} = d\left(F^{p-1}C^{p+q-1}\right) + F^{p+1}C^{p+q},$$

Упражнение 3.20. Убедитесь в этом.

В общем виде переход от $(r+1)$-й таблицы к $(r+2)$-й таков. Для каждого $r \geqslant 0$ положим

$$Z_r^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \{c \in F^pC^{p+q} \mid dc \in d\left(F^{p+r}C^{p+q}\right)\} \tag{3-35}$$
$$B_r^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} d\left(F^{p-r}C^{p+q-1}\right) + F^{p+1}C^{p+q} \tag{3-36}$$
$$E_{r+1}^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} Z_r^{p,q}/\left(B_r^{p,q} \cap Z_r^{p,q}\right) \simeq \left(Z_r^{p,q} + B_r^{p,q}\right)/B_r^{p,q}. \tag{3-37}$$

Правило $c \mapsto dc$ корректно задаёт дифференциал $d_{r+1} : E_{r+1}^{p,q} \to E_{r+1}^{p+r+1,q-r}$, т. к. для всех $\eta \in F^{p-r}C^{p+q-1}$ и $\zeta \in F^{p+1}C^{p+q}$ с $d(c+d\eta+\zeta) \in F^{p+r+1}C^{p+q+1}$, элемент $d(c+d\eta+\zeta) = = dc+d\zeta \in dc+d\left(F^{p+1}C^{p+q}\right)$ лежит в $Z_r^{p+r+1,q-r}$ (даже в $\ker d$) и сравним с dc по модулю $B_r^{p+r+1,q-r} \cap Z_r^{p+r+1,q-r} \supset d(F^{p+1}C^{p+q})$.

Упражнение 3.21. Убедитесь, что в клетке (p,q) ядро $\ker d_{r+1} \simeq Z_{r+1}^{p,q}/\left(B_r^{p,q} \cap Z_{r+1}^{p,q}\right)$, а образ $d_{r+1}\left(E_{r+1}^{p-r-1,q+r}\right) \simeq \left(B_{r+1}^{p,q} \cap Z_{r+1}^{p,q}\right)/\left(B_r^{p,q} \cap Z_{r+1}^{p,q}\right)$.

Тем самым, модуль когомологий дифференциала d_{r+1} в клетке (p,q) изоморфен

$$\frac{Z_{r+1}^{p,q}/\left(B_r^{p,q} \cap Z_{r+1}^{p,q}\right)}{\left(B_{r+1}^{p,q} \cap Z_{r+1}^{p,q}\right)/\left(B_r^{p,q} \cap Z_{r+1}^{p,q}\right)} \simeq \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{Z_{r+1}^{p,q} \cap B_{r+1}^{p,q}} = E_{r+2}^{p,q}.$$

Итак, таблицы E_r, составленные из модулей (3-37), образуют спектральную последовательность, начинающуюся таблицами (3-33) и (3-34).

Предложение 3.5
Пусть на комплексе C задана такая убывающая фильтрация (3-31), что для каждого n подмодули F^pC^n совпадают с C при всех $p \ll 0$ и зануляются при всех $p \gg 0$. Тогда существует спектральная последовательность с $E_1^{p,q} = H^{p+q}\left(\mathrm{Gr}^pC\right)$, сходящаяся к присоединённым факторам индуцированной убывающей фильтрации на $H(C)$, т. е. имеющая $E_\infty^{p,q} \simeq \mathrm{Gr}^pH^{p+q}(C) = F^pH^{p+q}(C)/F^{p+1}H^{p+q}(C)$.

Доказательство. В условиях предложения на каждой диагонали $p+q = \mathrm{const}$ таблицы (3-33) имеется лишь конечное число ненулевых модулей. Поэтому спектральная последовательность стабилизируется и сходится к модулям $E_\infty^{p,q} = Z_\infty^{p,q}/\left(B_\infty^{p,q} \cap Z_\infty^{p,q}\right)$, где по формулам (3-35) и (3-36) $Z_\infty^{p,q} = \{c \in F^pC^{p+q} \mid dc \in F^\infty C^{p+q+1}\} = F^pC^{p+q} \cap \ker d$, а

$B^{p,q}_\infty \cap Z^{p,q}_\infty = \big(d(F^{-\infty}C^{p+q-1}) + F^{p+1}C^{p+q}\big) \cap Z^{p,q}_\infty = \operatorname{im} d \cap F^pC^{p+q} + F^{p+1}C^{p+q} \cap \ker d$, т. е.

$$
\begin{aligned}
E^{p,q}_\infty \simeq \frac{F^pC^{p+q} \cap \ker d}{\operatorname{im} d \cap F^pC^{p+q} + F^{p+1}C^{p+q} \cap \ker d} \\
\simeq \frac{\big(F^pC^{p+q} \cap \ker d\big) / \big(F^pC^{p+q} \cap \operatorname{im} d\big)}{\big(F^{p+1}C^{p+q} \cap \ker d\big) / \big(F^{p+1}C^{p+q} \cap \operatorname{im} d\big)} \simeq \\
\simeq \frac{F^pH^{p+q}(C)}{F^{p+1}H^{p+q}(C)} = \operatorname{Gr}^p H^{p+q}(C)\,.
\end{aligned}
$$

□

Пример 3.7 (двучленная фильтрация)
Точная тройка комплексов $0 \to U \to V \to W \to 0$ задаёт на среднем комплексе V двучленную фильтрацию $V = F^0V \supset U = F^1V \supset 0 = F^2V$ с присоединёнными факторами $\operatorname{Gr}^0 V = V/U = W$ и $\operatorname{Gr}^1 V = U$. В этом случае таблица E_1 спектральной последовательности из предл. 3.5 сосредоточена в двух столбцах $p = 0, 1$ и имеет вид

$$
\begin{tikzcd}
H^{p+1}(W) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, dotted, no head] & H^{p+2}(U) \\
H^{p}(W) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, dotted, no head] & H^{p+1}(U) \\
H^{p-1}(W) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, dotted, no head] & H^{p}(U) \\
H^{p-2}(W) \arrow[r, "\delta"] & H^{p-1}(U)
\end{tikzcd}
$$

Таблица её когомологий $E_2 = H(E_1)$ совпадает с предельной таблицей E_∞ и состоит из присоединённых факторов индуцированной двучленной фильтрации на $H(V)$:

$$0 \to \operatorname{coker}\big(H^{n-1}(W) \to H^n(U)\big) \hookrightarrow H^n\,(V) \twoheadrightarrow \ker\big(H^n(W) \to H^{n+1}(U)\big) \to 0\,,$$

что согласуется с длинной последовательностью когомологий (3-10)

$$\cdots \to H^{n-1}(W) \xrightarrow{\delta} H^n(U) \to H^n(V) \to H^n(W) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(U) \to \cdots\,,$$

исходной точной тройки комплексов $0 \to U \to V \to W \to 0$. Таким образом, спектральная последовательность двучленной фильтрации содержит ровно столько же информации, что и длинная последовательность когомологий.

3.5.2. Спектральная последовательность бикомплекса. На тотальном комплексе[1] $C^n = \operatorname{Tot}^n(V) = \bigoplus\limits_{p+q=n} V^{p,q}$ бикомплекса $V = V^{p,q}$ имеются две симметричных фильтрации, получающиеся одна из другой отражением $p \leftrightarrow q$ относительно диагонали $p = q$. Первая имеет

$$F^p \operatorname{Tot}^n(V) = \bigoplus_{\nu \geqslant p} V^{\nu, n-\nu}$$

[1] см. n° 3.1.3 на стр. 56

и индуцирует убывающую фильтрацию на $H^n\left(\mathrm{Tot}^n(V)\right)$, присоединённые градуированные факторы которой можно вычислять при помощи спектральной последовательности из предл. 3.5, имеющей в столбцах начальной таблицы E_0 фактор комплексы

$$E_0^{p,*} = G^p\,\mathrm{Tot}(V) \simeq V^{p,*}$$

с дифференциалом d_0, индуцированным на них дифференциалом $d = d_\mathrm{h} + d_\mathrm{v}$ бикомплекса V, где $d_\mathrm{h} : V^{p,q} \to V^{p+1,q}$ и $d_\mathrm{v} : V^{p,q} \to V^{p,q+1}$ суть горизонтальный и вертикальный дифференциалы на V.

Упражнение 3.22. Убедитесь, что фактор комплексы $G^p\,\mathrm{Tot}(V)$ с дифференциалом d_0 суть столбцы бикомплекса V с вертикальным дифференциалом d_v.

Таким образом, таблица $E_1 = H(E_0)$ состоит из когомологий комплексов-столбцов

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}\Big(\mathrm{Gr}^p\left(\mathrm{Tot}(V)\right)\Big) = H^q_\mathrm{v}\left(V^{p,*}\right)$$

бикомплекса V, а действие на них горизонтального дифференциала d_1 таблицы E_1, индуцированного дифференциалом $d = d_\mathrm{h} + d_\mathrm{v}$ тотального комплекса, совпадает с действием на когомологии $H^q_\mathrm{v}\left(V^{p,*}\right)$ комплексов-столбцов оператора $d_{\mathrm{h}*}$, индуцированного горизонтальной составляющей d_h дифференциала бикомплекса V.

Упражнение 3.23. Убедитесь, что всякий гоморфизм нулевой степени $\varphi \in \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(U,W)$, антикоммутирующий[1] с дифференциалами d_U, d_W комплексов U, W, корректно определает морфизм когомологий[2] $\varphi_* : H(U) \to H(W)$.

Следовательно, таблица E_2 состоит из модулей $E_2^{p,q} = H^p_\mathrm{h}\left(H^q_\mathrm{v}(V)\right)$. Меняя местами буквы p и q, получаем ещё одну спектральную последовательность с $E_2^{p,q} = H^p_\mathrm{v}\left(H^q_\mathrm{h}(V)\right)$ с дифференциалами $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p-r+1,q+r}$, наклоняющимися с ростом r влево и вверх, сходящуюся к присоединённым градуированным факторам фильтрации на когомологиях $H^n(\mathrm{Tot}(V))$ тотального комплекса, индуцированной фильтрацией

$$F^q\,\mathrm{Tot}^n(V) = \bigoplus_{\nu\geqslant q} V^{n-\nu,\nu}$$

Суммируем сказанное как

Предложение 3.6 (спектралки бикомплекса)
Каждый бикомплекс V производит пару спектральных последовательностей с E_2-членами

$$ {}^{I}E_2^{p,q} = H^p_\mathrm{h}\left(H^q_\mathrm{v}(V)\right) \quad \text{и} \quad {}^{II}E_2^{p,q} = H^p_\mathrm{v}\left(H^q_\mathrm{h}(V)\right)\,. \tag{3-38}$$

Если на каждой диагонали $p+q = \mathrm{const}$ бикомплекса V имеется лишь конечное число ненулевых модулей $V^{p,q}$, обе спектралки сходятся к присоединённым градуированным факторам некоторых фильтраций на $H^{p+q}(\mathrm{Tot}(V))$.

[1] в том смысле, что $d_W\varphi + \varphi d_U = 0$
[2] ср. с упр. 3.5 на стр. 57

3.5.3. Спектральная последовательность точной пары. Более общими, чем фильтрации, источниками спектральных последовательностей являются *точные пары*[1], т. е. точные в каждом члене диаграммы модулей

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

Мы будем обозначать такую диаграмму (D, E, i, j, k). Композиция $d = jk : E \to E$ называется *дифференциалом* точной пары, поскольку $d^2 = jkjk = 0$, ибо $kj = 0$. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[rr, "i'"] & & D' \arrow[dl, "j'"] \\ & E' \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd}$$

где $E' = \ker d\,/\operatorname{im} d$, $D' = \operatorname{im} i$, $i' = i\big|_{D'}$, $j' : i(x) \mapsto j(x)$, $k' : x \pmod{\operatorname{im} d} \mapsto k(x)$, называется *производной* от точной пары (D, E, i, j, k).

Упражнение 3.24. Убедитесь, что морфизмы j' и k' определены корректно, и производная (D', E', i', j', k') тоже является точной парой.

В производной паре модуль

$$E' = H(E) = \ker(jk)/\operatorname{im}(jk) = k^{-1}(\ker j)/j(\operatorname{im} k) = k^{-1}(\operatorname{im} i)/j(\ker i)\,.$$

В r-той последовательной производной $(D_r, E_r, i_r, j_r, k_r)$ от точной пары (D, E, i, j, k) модуль

$$E_r \simeq k_{r-1}^{-1}(\operatorname{im} i_{r-1})/j_{r-1}(\ker i_{r-1}) = k^{-1}\left(\operatorname{im} i^r\right)/j\left(\ker i^r\right)\,.$$

Если модули в точной паре (D, E, i, j, k) биградуированы: $D = \bigoplus D^{p,q}$, $E = \bigoplus E^{p,q}$, а морфизмы однородны и имеют по (p, q) бистепени $\deg i = (-1, 1)$, $\deg j = (0, 0)$, $\deg k_1 = (1, 0)$, как в диаграмме

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
D^{p-1,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p+1,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q+2} \\
D^{p-1,q+1} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q+1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q+1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p+1,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q+1} \arrow[ull, "i"] \\
D^{p-1,q} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p+1,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q} \arrow[ull, "i"] \\
D^{p-1,q-1} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q-1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q-1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p+1,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q-1} \arrow[ull, "i"]
\end{tikzcd}$$

то размещая модули $E^{p,q}$ в клетки таблицы E_1, а их последовательные производные — в следующие таблицы $E_2, E_3, \dots$, мы получаем спектральную последовательность с

$$E_r^{p,q} \simeq k^{-1}\left(i^{r-1}(D^{p+r,q-r+1})\right)/j\left(\ker(i^{r-1} : D^{p,q} \to D^{p-r+1,q+r-1})\right)\,. \qquad (3\text{-}39)$$

[1] по-английски *exact couples*

Пример 3.8 (фильтрованные комплексы)
Если у комплекса C имеется убывающая фильтрация подкомплексами $F^pC \subset C$, то точные тройки комплексов $0 \to F^{p+1}C \to F^pC \to \mathrm{Gr}^pC \to 0$ производят длинные точные последовательности когомологий

$$\cdots \xrightarrow{k} H^n(F^{p+1}C) \xrightarrow{i} H^n(F^pC) \xrightarrow{j} H^n(\mathrm{Gr}^pC) \xrightarrow{k} H^{n+1}(F^{p+1}C) \xrightarrow{i} \cdots \tag{3-40}$$

которые собираются в точную пару $(E_1, D_1, i_1, j_1, k_1)$ биградуированных модулей

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}\left(\mathrm{Gr}^pC\right), \quad D_1^{p,q} = H^{p+q}\left(F^pC\right)$$

и морфизмов $i_1 : H^{p+q}(F^pC) \to H^{p+q}(F^{p-1}C)$, $j_1 : H^{p+q}(F^pC) \to H^{p+q}(\mathrm{Gr}^pC)$, $k_1 : H^{p+q}(\mathrm{Gr}^pC) \to H^{p+q+1}(F^{p+1}C)$, бистепеней $\deg i_1 = (-1, 1)$, $\deg j_1 = (0, 0)$, $\deg k_1 = (1, 0)$. Спектральная последовательность этой пары имеет в таблице E_r модули

$$E_r^{p,q} \simeq \frac{k^{-1}i^{r-1}\left(H^{p+q+1}(F^{p+r}C)\right)}{j\Big(\ker\left(i^{r-1} : H^{p+q}(F^pC) \to H^{p+q}(F^{p-r+1}C)\right)\Big)} \simeq$$

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 3.5. $\varphi(\xi)$ является циклом, поскольку $d_W\varphi\xi = \varphi d_V\xi = 0$, и $\varphi(\xi + d_V\zeta) = \varphi(\xi) + d_W(\varphi(\zeta))$ сравним с $\varphi(\xi)$ по модулю кограниц.

Упр. 3.9. Равенства $\psi_*\varphi_* = 0$, $\delta\psi_* = 0$ и $\varphi_*\delta = 0$ следуют прямо из определений морфизмов φ_*, ψ_* и δ. Точность композиции $\psi_*\varphi_*$: если класс коцикла η лежит в $\ker\psi_*$, то $\psi\eta = d_W\xi$, и для такого $\eta' \in V$, что $\psi\eta' = \xi$, когомологичная коциклу η разность $\eta - d_V\eta' \in \ker\psi$, а значит, найдётся такой $\zeta \in U$, что $\varphi\zeta = \eta - d_V\eta' \equiv \eta \pmod{d)_V(V)}$. Точность композиции $\delta\psi_*$: если класс коцикла $\xi = \psi(\eta) \in \ker\delta$, то $\delta\xi = d_V\varphi\zeta$ для некоторого $\zeta \in U$, откуда $\eta - \varphi\zeta \in \ker d_V$ является коциклом в V, и $\xi = \psi(\eta - \varphi\zeta)$. Точность композиции $\varphi_*\delta$: если коцикл $\zeta \in \ker d_U$ лежит в $\ker\varphi_*$, то $\varphi\zeta = d_V\eta$ для и $\eta \in V$, и $\zeta = \delta(\psi\eta)$, причём $\psi\eta \in W$ является коциклом, т. к. $d_W(\psi\eta) = \psi d_V\eta = \psi\varphi\zeta = 0$.

Упр. 3.11. Пусть $\psi : U \to V$ и $d_V\psi = \psi d_U$. Тогда для $\varphi = \delta_W\gamma + \gamma d_V$ имеем $\varphi\psi = \delta_W\gamma\psi + \gamma d_V\psi = \delta_W\gamma\psi + \gamma\psi d_U$.

Упр. 3.12. Если A стягиваем, то единственные отображения $\iota : 0 \to A$ и $\pi : A \to 0$ являются взаимно обратными изоморфизмами в категории $\mathcal{H}o$, т. к. $\pi\iota = \mathrm{Id}_0$, а $\iota\pi = 0 \sim \mathrm{Id}_A$.

Упр. 3.14. Дифференциалы ∂d и $d\partial$ переводят базисный моном

$$\xi_I \otimes x^M = \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}$$

соответственно в $\left(\sum\limits_{i\in I} m_i\right) \cdot \xi_I \otimes x^M +$

$$+\sum_{j\notin I}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1} m_{i_\nu} \cdot \xi_j \wedge \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\xi_{i_\nu}} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{m_1} \dots x_{i_\nu}^{m_{i_\nu}-1} \dots x_j^{m_j+1} \dots x_n^{m_n}$$

и $\left(\sum\limits_{j\notin I}(m_j+1)\right) \cdot \xi_I \otimes x^M +$

$$+\sum_{j\notin I}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu} m_{i_\nu} \cdot \xi_j \wedge \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\xi_{i_\nu}} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{m_1} \dots x_{i_\nu}^{m_{i_\nu}-1} \dots x_j^{m_j+1} \dots x_n^{m_n}$$

где «крышка» означает пропуск стоящего под нею сомножителя.

Упр. 3.17. Выберем в $V \otimes V$ и $V^* \otimes V^*$ двойственные базисы ξ_ν и ξ_ν^* так, чтобы ξ_ν с $\nu \in N$ составляли базис в подпространстве $I \subset V \otimes V$, а ξ_μ^* с $\mu \notin N$ — базис в $I^\perp \subset V^* \otimes V^*$. Поскольку $\varkappa = \sum_i x_i \otimes e_i$, где x_i и e_i суть двойственные базисы в V^* и в V, его квадрат

$$\varkappa^2 = -\sum_{ij}\left(x_i \otimes x_j\right) \otimes \left(e_i \otimes e_j\right) \pmod{I^\perp \otimes \left(V \otimes V\right) + \left(V^* \otimes V^*\right) \otimes I}$$

является классом (по модулю соотношений в алгебре $B \otimes A$) эндоморфизма

$$-\mathrm{Id}_{V\otimes V} \in \left(V^* \otimes V^*\right) \otimes \left(V \otimes V\right) \simeq \mathrm{End}(V \otimes V)\,,$$

который в двойственных базисах ξ_ν и ξ_ν^* в $V\otimes V$ и $V^*\otimes V^*$ тоже запишется как

$$\varkappa^2 = -\sum_\alpha \xi_\alpha^* \otimes \xi_\alpha = -\sum_{\nu\in N} \xi_\nu^* \otimes \xi_\nu - \sum_{\mu\notin N} \xi_\mu^* \otimes \xi_\mu \in I^\perp \otimes \big(V\otimes V\big) + \big(V^*\otimes V^*\big) \otimes I\,.$$

Упр. 3.21. Ядро d_{r+1} состоит из таких элементов $c\in Z_r^{p,q}$, что $dc\in B_r^{p+r+1,q-r} = d\left(F^{p+1}C^{p+q}\right)+F^{p+r+2}C^{p+q+1}$, по модулю таких же элементов, лежащих в $B_r^{p,q} = d\left(F^{p-r}C^{p+q-1}\right) + F^{p+1}C^{p+q}$, и позволяющих отправить dc в $F^{p+r+2}C^{p+q+1}$.

Упр. 3.24. Корректность j': $j(x)$ коцикл, т. к. $dj(x) = jkj(x) = 0$; если $i(x_1) = i(x_2)$, то $x_2 = x_1 + k(y)$, и $j(x_2) = j(x_1) + dy$ когомологичен $j(x_1)$. Корректность k': $k(d(E)) \subset kj(D) = 0$. Равенство нулю композиций $i'k'$, $j'i'$ и $k'j'$ вытекает из равенства нулю композиций ik, ji и kj. Если $i'(i(x)) = i(i(x)) = 0$, то $i(x) = k(y)$, причём $d(y) = jk(y) = j(i(x)) = 0$, т. е. $\ker(i') \subset k'(E')$. Если $j'(i(x)) \in d(E)$, т. е. $j(x) = jk(y)$, то $x = k(y) + i(x')$ и $i(x) = i^2(x') \in \operatorname{im} i'$, т. е. $\ker j' \subset i'(D')$. Если $k'(y) = k(y) = 0$, то $y = j(x) = j'(i(x))$, т. е. $\ker(k') \subset j'(D')$.