А. Л. ГОРОДЕНЦЕВ*

СПЕЦКУРС

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА И ПРОИЗВОДНЫЕ КАТЕГОРИИ

Это записки лекций, которые я читаю на матфаке ВШЭ в весеннем семестре 2014 / 15 учебного года. Упражнения, встречающиеся в тексте существенны для его понимания и обычно используются в дальнейшем. Некоторые из них снабжены указаниями в конце книги.

Москва, 2015

* ВШЭ, ИТЭФ, НМУ, e-mail:gorod@itep.ru , http://gorod.bogomolov-lab.ru/

Оглавление

§1. Категории и функторы

1.1. Категории. Категория $\mathcal{C}$ — это класс[1] объектов, обозначаемый $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, в котором для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ задано *множество* морфизмов

$$\mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\,.$$

Морфизмы из X в Y удобно представлять себе в виде стрелок $\varphi : X \to Y$. Для разных пар объектов эти множества стрелок не пересекаются. Объединение всех стрелок категории $\mathcal{C}$ обозначается $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} = \bigsqcup_{X,Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Для каждой тройки объектов $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ имеется отображение композиции[2]

$$\mathrm{Hom}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(X,Z)\,, \quad (\varphi,\psi) \mapsto \varphi \circ \psi \quad (= \varphi\psi)\,, \tag{1-1}$$

ассоциативное в том смысле, что $(\chi \circ \varphi) \circ \psi = \chi \circ (\varphi \circ \psi)$ всякий раз, когда эти композиции определены. Наконец, у каждого объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ есть *тождественный морфизм* $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}(X,X)$, который для любых стрелок $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Z \to X$ удовлетворяет условиям[3] $\varphi \circ \mathrm{Id}_X = \varphi$ и $\mathrm{Id}_X \circ \psi = \psi$.

Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ — это категория, все объекты, стрелки и композиции которой наследуются из $\mathcal{C}$. Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ называется *полной*, если $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ для любых $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$. Категория называется *малой*, если $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ это *множество*, а не больший класс. В этом случае $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ тоже является множеством.

Пример 1.1 (категории, не являющиеся малыми)
Часто возникающие в примерах категории, *не* являющиеся малыми — это категория $\mathcal{S}et$ всех множеств и всех отображений, категория $\mathcal{T}op$ топологических пространств и непрерывных отображений, категория $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ векторных пространств над полем $\Bbbk$ и $\Bbbk$-линейных отображений и её полная подкатегория $vec_{\Bbbk}$ конечномерных пространств, категории R-$\mathcal{M}od$ и $\mathcal{M}od$-R левых и правых модулей над кольцом R и R-линейных отображений и их полные подкатегории R-mod и mod-R конечно представимых[4] модулей, категория $\mathcal{A}b = \mathbb{Z}$-$\mathcal{M}od$ абелевых групп и их гомоморфизмов, категория $\mathcal{G}rp$ всех групп и групповых гомоморфизмов, категория $\mathcal{C}mr$ коммутативных колец с единицей и гомоморфизмами, переводящими единицу в единицу, и т. п.

Пример 1.2 (чумы и топологии)
Каждое частично упорядоченное множество M это малая категория, объекты которой суть элементы $m \in M$, стрелки суть неравенства:

$$\mathrm{Hom}_M(n,m) = \begin{cases} \text{одноэлементное множество, когда } n \leqslant m, \\ \varnothing\,, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

[1] не хотелось бы вдаваться в точную формализацию этого термина (содержательную в той же мере, как формализация арифметики и теории множеств, изучаемые в стандартном курсе математической логики); отметим лишь, что такая формализация возможна и позволяет говорить, например, о «категории множеств», объекты которой, по понятным причинам, множества не образуют

[2] значок «$\circ$», как и знак умножения, принято опускать, если понятно о чём речь

[3] выкладка $\mathrm{Id}' = \mathrm{Id}' \circ \mathrm{Id}'' = \mathrm{Id}''$ показывает, что тождественный морфизм единствен

[4] модуль называется *конечно представимым*, если он изоморфен фактору свободного модуля конечного ранга по конечно порождённому подмодулю

и прозведением стрелок $k \leqslant \ell$ и $\ell \leqslant n$ является стрелка $k \leqslant n$. Важным примером такой категории является категория $\mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств топологического пространства X, стрелками в которой являются включения:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(X)}(U, W) = \begin{cases} \text{вложение } U \hookrightarrow W, \text{ если } U \subseteq W \\ \text{пустое множество, когда } U \nsubseteq W. \end{cases}$$

Пример 1.3 (малые категории и ассоциативные алгебры)
Всякую ассоциативную алгебру A с единицей $e \in A$ можно рассматривать как малую категорию с одним объектом e и множеством стрелок $\mathrm{Hom}(e, e) = A$, композиция на котором задаётся умножением в этой алгебре. Наоборот, со всякой малой категорией $\mathcal{C}$ можно связать *алгебру стрелок* $K[\mathcal{C}]$, состоящую из формальных конечных линейных комбинаций стрелок категории $\mathcal{C}$ с коэффициентами в каком – нибудь коммутативном кольце K:

$$K[\mathcal{C}] = \bigoplus_{X,Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \mathrm{Hom}(X, Y) \otimes K = \left\{ \sum x_i \varphi_i \,\middle|\, \varphi_i \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}),\ x_i \in K \right\},$$

где для множества M мы обозначаем через $M \otimes K$ свободный K-модуль с базисом M, образованный всеми конечными формальными линейными комбинациями элементов множества M с коэффициентами из K. Умножение в алгебре $K[\mathcal{C}]$ задаётся композицией стрелок

$$\varphi\psi \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi \circ \psi & \text{если конец } \psi \text{ совпадает с началом } \varphi \\ 0 & \text{во всех прочих случаях} \end{cases}$$

и по дистрибутивности распространяется на их линейные комбинации. Алгебру $K[\mathcal{C}]$ можно представлять себе как алгебру финитных квадратных матриц[1], строки и столбцы которых занумерованы объектами категории, и в каждой клетке (Y, X) стоят элементы из своего пространства $\mathrm{Hom}(X, Y) \otimes K$. Эта алгебра, вообще говоря, некоммутативна и без единицы, однако, для всякого $f \in K[\mathcal{C}]$ существует идемпотент $e_f = e_f^2$ со свойствами $e_f \circ f = f \circ e_f = f$. В качестве такового можно взять сумму тождественных эндоморфизмов Id_X всех объектов X, являющихся началами и концами стрелок, линейной комбинацией которых является f.

Пример 1.4 (конечные упорядоченные множества и комбинаторные симплексы)
Обозначим через Δ_{big} категорию, объектами которой являются конечные упорядоченные множества X, а морфизмами — сохраняющие порядок отображения[2]. Категория Δ_{big} не является малой[3], но содержит полную малую подкатегорию $\Delta \subset \Delta_{\text{big}}$, объектами которой являются конечные подмножества в $\mathbb{Z}$ вида

$$[n] \overset{\text{def}}{=} \{0, 1, \dots, n\}, \quad n \geqslant 0, \tag{1-2}$$

со стандартным порядком. Множество (1-2) называется n-мерным *комбинаторным симплексом*, а категория Δ — *симплициальной категорией*. Для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\Delta_{\text{big}}$

[1] возможно бесконечного размера, но с конечным числом ненулевых элементов
[2] т. е. такие $\varphi : X \to Y$, что $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2)$
[3] по упомянутым выше логическим причинам, см. сноску на стр. 3

имеется *единственный* изоморфизм $n_X : X \xrightarrow{\sim} [n]$ с *единственным* $[n] \in \operatorname{Ob} \Delta$, а именно нумерация элементов X в порядке возрастания.

Упражнение 1.1. Сколько всего стрелок в множестве $\operatorname{Hom}_\Delta([n],[m])$? Сколько среди них инъективных? Сколько сюрьективных? Покажите, что алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\Delta]$, как абстрактная ассоциативная алгебра, порождается стрелками

$$e_n = \mathrm{Id}_{[n]} \qquad \text{(тождественное отображение)} \tag{1-3}$$

$$\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n] \qquad \text{(вложение, образ которого не содержит } i\text{)} \tag{1-4}$$

$$s_n^{(i)} : [n] \twoheadrightarrow [n-1] \qquad \text{(наложение, склеивающее } i \text{ с } (i+1)\text{)} \tag{1-5}$$

и опишите образующие идеала соотношений между этими стрелками.

1.1.1. Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы. Стрелка φ в категории $\mathcal{C}$ называется *мономорфизмом*[1] (соотв. *эпиморфизмом*[2]), если на неё можно сокращать слева (соотв. справа), т. е. когда $\varphi\alpha = \varphi\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ (соотв. $\alpha\varphi = \beta\varphi \Rightarrow \alpha = \beta$). По умолчанию мы используем стрелки $\hookrightarrow$ для обозначения мономорфизмов, и стрелки $\twoheadrightarrow$ для эпиморфизмов. Стрелка $\varphi : X \to Y$ называется *изоморфизмом* (или *обратимой* стрелкой) и обозначается $\xrightarrow{\sim}$, если существует такая стрелка $\psi : Y \to X$, что $\varphi\psi = \mathrm{Id}_Y$ и $\psi\varphi = \mathrm{Id}_X$. В этой ситуации объекты X и Y называются *изоморфными*, а морфизмы φ и ψ — *обратными* друг к другу.

Определение 1.1 (подобъекты и фактор объекты)
Класс эквивалентности инъективной стрелки с концом в X по модулю её умножения справа на обратимые стрелки называется *подобъектом* объекта X, а класс эквивалентности сюрьективной стрелки с началом в X по модулю левого умножения на обратимые стрелки — *фактор объектом* объекта X. Категория называется *умеренно мощной*[3], если подобъекты любого её объекта образуют множество. Все категории из прим. 1.3 умеренно мощны.

Упражнение 1.2 (частичный порядок на под- и фактор объектах). Проверьте, что отношение $\varphi \subseteq \psi$, означающее, что существует такая стрелка ξ, что $\varphi = \psi\xi$, задаёт частичный порядок на множестве подобъектов, а отношение $\varphi \geqslant \psi$, означающее наличие такой стрелки ξ, что $\varphi = \xi\psi$, задаёт частичный порядок на множестве фактор объектов.

1.1.2. Обращение стрелок. С каждой категорией $\mathcal{C}$ связана *противоположная* категория $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ с теми же объектами, но с обращённым направлением всех стрелок:

$$\operatorname{Ob} \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} = \operatorname{Ob} \mathcal{C}\,, \quad \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)\,, \quad \varphi^{\mathrm{opp}} \circ \psi^{\mathrm{opp}} = (\psi \circ \varphi)^{\mathrm{opp}}\,.$$

На языке алгебр такое обращение стрелок означает переход от алгебры $C = K[\mathcal{C}]$ к противоположной алгебре C^{opp} из тех же элементов, но с происходящим в противоположном порядке умножением. Мономорфизмы и подобъекты категории $\mathcal{C}$ являются эпиморфизмами и фактор объектами категории $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ и наоборот.

[1]а также *вложением* или *инъективным* морфизмом
[2]а также *наложением* или *сюрьективным* морфизмом
[3]по-английски: *well powered*

1.2. Функторы. Функтор[1] $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ это отображение $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, $X \mapsto F(X)$, и набор таких отображений[2]

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))\,, \quad \varphi \mapsto F(\varphi)\,, \tag{1-6}$$

что $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ для всех $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $F(\varphi\circ\psi) = F(\varphi)\circ F(\psi)$ всякий раз, когда композиция $\varphi \circ \psi$ определена. На языке ассоциативных алгебр функторы суть *гомоморфизмы* одной алгебры стрелок в другую. Если все отображения (1-6) сюрьективны, функтор F называется *полным*[3]. Образ такого функтора является полной подкатегорией. Если все отображения (1-6) инъективны, функтор F называется *строгим*[4]. Такой функтор задаёт вложение алгебр стрелок. Полные строгие функторы иногда называют *вполне строгими*.

Простейшие функторы — это *тождественный функтор* $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, тождественно действующий на объектах и морфизмах, и *забывающие функторы*, действующие из какой-либо категории множеств с дополнительной структурой[5], морфизмы в которой суть сохраняющие эту структуру отображения множеств, в категорию $\mathcal{S}et$ всех множеств — такие функторы просто забывают о структуре.

Пример 1.5 (геометрическая реализация комбинаторных симплексов)
Зададим функтор $\Delta \to \mathcal{T}op$ из категории комбинаторных симплексов в категорию топологических пространств, сопоставляя n-мерному комбинаторному симплексу $[n]$ стандартный n-мерный симплекс[6]

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum x_\nu = 1\,,\ x_\nu \geqslant 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}\,, \tag{1-7}$$

а стрелке $\varphi : [n] \to [m]$ — единственное аффинное отображение $\varphi_* : \Delta^n \to \Delta^m$, действующее на базисные векторы по правилу $e_\nu \mapsto e_{\varphi(\nu)}$. Это строгий, но не полный функтор. Образующие элементы (1-4) и (1-5) алгебры стрелок категории Δ переводятся этим функтором, соответственно, во вложение i-той грани $\Delta^{(n-1)} \hookrightarrow \Delta^n$ и в вырождение вдоль i-того ребра[7] $\Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^{(n-1)}$.

1.2.1. Предпучки. Функтор $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ называется *контравариантным функтором* из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ или *предпучком* объектов категории $\mathcal{D}$ на категории $\mathcal{C}$. Такой функтор оборачивает композицию: $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ и на языке ассоциативных алгебр является *антигомоморфизмом* алгебр стрелок.

Пример 1.6 (триангулированные пространства)
Обозначим через $\Delta_{\mathrm{s}} \subset \Delta$ неполную подкатегорию, объектами которой являются комбинаторные симплексы: $\mathrm{Ob}\,\Delta_{\mathrm{s}} = \mathrm{Ob}\,\Delta$, а качестве морфизмов допускаются только *стро-*

[1] иногда вместо слова «функтор» говорят *ковариантный функтор*
[2] по одному отображению для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$
[3] по-английски: *full*
[4] по-английски: *faithful*
[5] например, геометрической — такой, как топология или структура гладкого многообразия, или алгебраической — такой, как структура группы, кольца или модуля
[6] т. е. выпуклую оболочку концов стандартных базисных векторов $e_0, e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$
[7] т. е. в проекцию симплекса на грань вдоль ребра, соединяющего i-тую вершину с $(i+1)$-й

го возрастающие[1] отображения. Категория $\varDelta_{\mathrm{s}}$ называется *полусимплициальной категорией*.

Упражнение 1.3. Убедитесь, что алгебра стрелок $K[\varDelta_{\mathrm{s}}]$ порождается тождественными стрелками $e_n = \mathrm{Id}_{[n]}$ и отображениями вложения граней $\partial_n^{(i)}$ из (1-4).

Предпучок множеств $X : \varDelta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории $\varDelta_{\mathrm{s}}$ называется *полусимплициальным множеством* и является ни чем иным, как комбинаторным описанием *триангулированного топологического пространства* $|X|$, которое называется *геометрической реализацией* полусимплициального множества X. В самом деле, функтор X задаёт для каждого целого неотрицательного n множество $X_n = X([n])$, точки которого следует воспринимать как дизъюнктный набор n-мерных симплексов (1-7), из коих будет склеиваться пространство $|X|$. Стрелки $\varphi : [n] \to [m]$ в категории $\varDelta_{\mathrm{s}}$ биективно соответствуют n-мерным граням m-мерного симплекса $\varDelta^m$, и отображение $X(\varphi) : X_m \to X_n$, которое функтор X сопоставляет стрелке φ, задаёт *правило склейки*: оно указывает данному m-мерному симплексу $x \in X_m$, какой именно n-мерный симплекс $X(\varphi)x \in X_n$ надлежит приклеить к нему в качестве φ-той n-мерной грани.

Упражнение 1.4. Существует ли триангуляция окружности S^1 а) тремя 0-мерными и тремя 1-мерным симплексами[2] б) одним 0-мерным и одним 1-мерным симплексом, а также триангуляция двумерной сферы S^2 в) четырьмя 0-мерными, шестью 1-мерными и четырьмя 2-мерным симплексами г) двумя 0-мерными, одним 1-мерным и одним 2-мерным симплексом и д) триангуляция 2-мерного тора одним 0-мерным, тремя 1-мерными и двумя 2-мерным симплексами? Если да, задайте все отображения $X(\varphi)$ явно, если нет, объясните почему.

Пример 1.7 (симплициальные множества)

Предпучок множеств $X : \varDelta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на всей симплициальной категории называется *симплициальным множеством*. Из симплициального множества X также можно изготовить топологическое пространство $|X|$, склеив стандартные правильные симплексы $\varDelta_x^n$, биективно сопоставленные точкам $x \in X_n$, согласно отображениям

$$\varphi^* \stackrel{\text{def}}{=} X(\varphi) : X_m \to X_n ,$$

предусмотренным функтором X для всех неубывающих отображений $\varphi : [n] \to [m]$ категории $\varDelta$. А именно, для каждого $x \in X_m$ надо приклеить каждую точку $s \in \varDelta^n_{\varphi^*(x)}$ к точке $\varphi_*(s) \in \varDelta^m_x$, где $\varphi_* : \varDelta^n \to \varDelta^m$ — аффинное отображение симплексов, действующее на вершины как φ. Результат такой склейки формально описывается как топологическое фактор пространство топологического произведения[3] $\prod\limits_{n\geqslant 0} X_n \times \varDelta^n$ по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему все отождествления

$$\left(x, \varphi_* s\right) \simeq \left(\varphi^* x, s\right) , \quad \varphi : [n] \to [m] , \quad x \in X_m , \quad s \in \varDelta^n .$$

---

[1] т. е. сохраняющие порядок и инъективные

[2] т. е. можно ли получить окружность в качестве геометричекой реализации полусимплициального множества X, у которого X_0 и X_1 состоят из трёх элементов, а все остальные X_i пусты

[3] в котором множества X_n рассматриваются с *дискретной*, а симплексы $\varDelta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ со стандартной топологией объемлющего вещественного аффинного пространства

Стрелка $\varphi = \delta\sigma : [n] \to [m]$, являющаяся композицией наложения $\sigma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ и вложения $\delta : [k] \hookrightarrow [m]$, предписывает вклеить n-мерный симплекс Δ_z^n, отвечающий точке $z = \sigma^* y = \sigma^*\delta^* x$ из образа φ^*, в пространство $|X|$ в виде k-мерного симплекса Δ_y^k, предварительно выродив его линейной проекцией $\sigma_* : \Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^k$, и этот k-мерный симплекс станет δ-той гранью в m-мерного симплекса Δ_x^m. По этой причине симплексы $z \in X_n$, попадающие в образ какого-либо отображения σ^*, отвечающего стрелке $\sigma : [k] \to [n]$ с $k > n$, называются *вырожденными*: в пространстве $|X|$ их видно как симплексы меньшей размерности. Использование вырожденных симплексов позволяет комбинаторно описывать более общие клеточные структуры, чем триангуляции. Например, «псевдотриангуляция» n-мерной сферы S^n, состоящая из одной 0-нульмерной вершины и одной n-мерной клетки, соответствующая описанию сферы как топологического фактора $S^n = \Delta^n / \partial\Delta^n$ стандартного n-мерного симплекса по его границе[1], является геометрической реализацией $|X|$ симплициального множества $X : \Delta^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$, у которого $X_k = X(k)$ получается из множества $\mathrm{Hom}_\Delta([k],[n])$ отождествлением всех неэпиморфных отображений в один элемент, а правило склейки $\varphi^* : X_m \to X_k$, отвечающее неубывающему отображению $\varphi : [k] \to [m]$, переводит класс стрелки $\zeta : [k] \to [n]$ в класс стрелки $\varphi\zeta : [k] \to [n]$.

Упражнение 1.5. Убедитесь, что это описание корректно задаёт предпучок и найдите количество элементов в каждом множестве X_k, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Пример 1.8 (предпучки и пучки сечений)
Исторически, термин «предпучок» впервые возник в контексте категории $\mathcal{C} = \mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств $U \subset X$ заданного топологического пространства X. Предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\text{opp}} \to \mathcal{D}$ сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset X$ объект $F(U) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, который называется *сечениями* предпучка F над U. В зависимости от категории $\mathcal{D}$ сечения могут образовывать множество, кольцо, алгебру, векторное или топологическое пространство и т. п. Морфизм $F(W) \to F(U)$, отвечающий включению $U \subset W$, называется *ограничением сечений*, определённых над W, на подмножество U, а результат его применения к сечению $s \in F(W)$ обозначается через $s|_U$. Вот несколько типичных примеров таких предпучков:

1) предпучок Γ_E локальных сечений непрерывного отображения $p : E \to X$ имеет в качестве $\Gamma_E(U)$ множество таких непрерывных отображений $s : U \to E$, что[2] $p \circ s = \mathrm{Id}_U$, а его отображения ограничения — это обычные ограничения сечений с большего подмножества на меньшее

2) беря в предыдущем примере в качестве отображения проекцию $p : X \times Y \to X$, получаем предпучок локальных непрерывных отображений $\mathcal{C}^0(X,Y)$ пространства X в пространство Y, имеющий в качестве сечений над $U \subset X$ непрерывные отображения $s : U \to Y$

3) дальнейшими специализациями являются так называемые *структурные предпучки* $\mathcal{O}_X$: предпучок дифференцируемых функций $X \to \mathbb{R}$ на гладком веще-

[1] т. е. склеивании всех точек границы в одну; скажем, двумерная сфера S^2 получается таким способом из треугольника

[2] это требование означает, что каждая точка $x \in U$ отображается в слой $p^{-1}(x)$ над нею

ственном многообразии X, предпучок локальных голоморфных функций $X \to \mathbb{C}$ на комплексно аналитическом многообразии X, предпучок локальных рациональных функций $X \to \Bbbk$ на алгебраическом многообразии X над полем $\Bbbk$ и т. п. (все они являются предпучками алгебр над соответствующим полем)

4) постоянный *предпучок* S имеет в качестве $S(U)$ одно и то же фиксированное множество S для всех $U \subset X$, и все его отображения ограничения — тождественные морфизмы Id_S.

Предпучок F называется *пучком*, если для любого открытого W, любого семейства открытых подмножеств $U_i \subset W$, покрывающих W, и любого набора локальных сечений $s_i \in F(U_i)$, таких что $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ для всех i, j, существует единственное такое сечение $s \in F(W)$, что $s|_{U_i} = s_i$ для всех i. В случае, когда имеется не более одного такого сечения (но может и не быть ни одного), предпучок F называется *отделимым*. Все предпучки (1) – (4) отделимы, и только последний из них — постоянный *предпучок* — не является пучком, поскольку для покрытия дизъюнктного объединения $W = U_1 \sqcup U_2$ множествами U_1, U_2 не всякая пара констант $s_i \in S(U_i)$ является ограничением одной константы $s \in S(W)$.

Упражнение 1.6. Убедитесь в том, что категория пучков $\mathcal{Sh}(X)$ является полной подкатегорией категории предпучков $p\mathcal{Sh}(X)$.

В заключение отметим, что наряду с постоянным предпучком в природе имеется и

5) постоянный *пучок* $S^{\sim}$, у которого $S^{\sim}(U)$ это *непрерывные* отображения $U \to S$ в множество S, рассматриваемое с *дискретной* топологией.

Упражнение 1.7. Опишите первообразные действительной функции $1/x$.

1.2.2. Функторы Hom. С каждым объектом $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ любой категории $\mathcal{C}$ связаны функтор $h^X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий объект Y в множество морфизмов

$$h^X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(X, Y)\,,$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi_* : \mathrm{Hom}(X, Y_1) \to \mathrm{Hom}(X, Y_2)$ левого умножения на $\varphi : \varphi_*(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \circ \psi$, и предпучок $h_X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий объект Y в множество морфизмов

$$h_X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(Y, X)\,,$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi^* : \mathrm{Hom}(Y_2, X) \to \mathrm{Hom}(Y_1, X)$ правого умножения на $\varphi : \varphi^*(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \psi \circ \varphi$.

Например, предпучок $h_{[n]} : \Delta_s \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории Δ_s задаёт стандартную триангуляцию стандартного n-мерного симплекса: множество её k-мерных симплексов $h_{[n]}([k]) = \mathrm{Hom}([k], [m])$ это в точности множество всех k-мерных граней. Предпучок $h_U : \mathcal{U}(X) \to \mathcal{S}et$ на топологическом пространстве X имеет ровно одно сечение над всеми $W \subset U$ и пустое множество сечений над любым $W \not\subset U$. Вот ещё несколько примеров.

Пример 1.9 (двойственность в категории векторных пространств)
Предпучок $h_\Bbbk : \mathcal{V}ec_\Bbbk^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{V}ec_\Bbbk$ сопоставляет векторному пространству V двойственное векторное пространство $h_\Bbbk(V) = \mathrm{Hom}(V, \Bbbk) = V^*$, а линейному отображению

$\varphi : V \to W$ — двойственное отображение $\varphi^* : W^* \to V^*$, переводящее линейную форму $\xi : W \to \Bbbk$ в линейную форму $\xi \circ \varphi : V \to \Bbbk$.

Пример 1.10 (двойственность конечных упорядоченных множеств)
Это комбинаторная версия предыдущего примера. Обозначим через через ∇_{big} категорию конечных упорядоченных множеств, содержащих $\geqslant 2$ элементов, морфизмами в которой являются неубывающие отображения, переводящие минимальный элемент в минимальный, а максимальный — в максимальный[1]. Тавтологическое включение $\nabla_{\text{big}} \hookrightarrow \Delta_{\text{big}}$ является строгим, но не полным функтором. Предпучки

$$h_{[1]} : \Delta_{\text{big}}^{\text{opp}} \to \nabla_{\text{big}} \quad \text{и} \quad h_{[1]} : \nabla_{\text{big}}^{\text{opp}} \to \Delta_{\text{big}}$$

переводят упорядоченные множества $X \in \operatorname{Ob} \Delta_{\text{big}}$ и $Y \in \operatorname{Ob} \nabla_{\text{big}}$ в множества

$$X^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\Delta_{\text{big}}}(X, [1]) \quad \text{и} \quad Y^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\nabla_{\text{big}}}(Y, [1])\,,$$

порядок на которых задаётся поточечным сравнением значений:

$$\varphi \leqslant \psi\,, \quad \text{если } \varphi(x) \leqslant \psi(x) \text{ для всех } x.$$

Стрелка $\varphi : Z_1 \to Z_2$ переводится обоими функторами в морфизм правого умножения $\varphi^* : \operatorname{Hom}(Z_2, [1]) \to \operatorname{Hom}(Z_1, [1])\,,\ \xi \mapsto \xi \circ \varphi$.

По-другому можно сказать, что оба дуализирующих предпучка $h_{[1]}$ сопоставляют конечному упорядоченному множеству Z множество его «дедекиндовых сечений»: множество X^* для $X \in \operatorname{Ob} \Delta_{\text{big}}$ это множество *всех*[2] таких разбиений $X = X_0 \sqcup X_1$, что $x_0 < x_1$ для всех $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$. Аналогично, множество Y^* для $Y \in \operatorname{Ob} \nabla_{\text{big}}$ это множество всех *собственных*[3] разбиений $Y = Y_0 \sqcup Y_1$. Обратите внимание, что сечения ведут себя *контра*вариантно по отношению к морфизмам: при наличии неубывающего отображения $Z_1 \to Z_2$ разбиение второго множества Z_2 индуцирует разбиение на Z_1, но не наоборот.

1.3. Естественные преобразования. Для пары функторов $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *естественным* (или *функториальным*) *преобразованием* F в G называется такое занумерованное объектами $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ семейство стрелок $f_X : F(X) \to G(X)$ в категории $\mathcal{D}$, что для любой стрелки $\varphi : X \to Y$ из $\mathcal{C}$ возникающая в категории $\mathcal{D}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "f_X"'] & F(Y) \arrow[d, "f_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\varphi)"'] & G(Y) \end{tikzcd} \tag{1-8}$$

коммутативна. На языке алгебр, гомоморфизм $F : K[\mathcal{C}] \to K[\mathcal{D}]$ наделяет алгебру $K[\mathcal{D}]$ структурой модуля над алгеброй $K[\mathcal{C}]$, в которой умножение элемента $b \in K[\mathcal{D}]$ на элемент $a \in K[\mathcal{C}]$ определяется правилом $a \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} F(a) \cdot b$. Пара функторов F, G

[1] отметим, что минимальный и максимальный элементы различны
[2] включая несобственные разбиения, в которых одно из подмножеств X_i пустое
[3] т. е. таких, что оба $Y_i \neq \varnothing$

задаёт на алгебре $K[\mathcal{D}]$ две различных структуры $K[\mathcal{C}]$-модуля, и естественное преобразование $f : F \to G$ это $K[\mathcal{C}]$-линейный гомоморфизм между этими модулями: для любого $\varphi \in K[\mathcal{C}]$ действие на $K[\mathcal{D}]$ операторов $F(\varphi)$ и $G(\varphi)$ удовлетворяет соотношению $f \circ F(\varphi) = G(\varphi) \circ f$.

Пример 1.11 (категория функторов)
Функторы из малой категории $\mathcal{C}$ в произвольную категорию $\mathcal{D}$ образуют категорию $\mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, объектами которой являются функторы $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, а морфизмами — естественные преобразования $f : F \to G$. Для малой категории $\mathcal{C}$ мы будем обозначать категорию предпучков $\mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{D})$ через $p\mathcal{S}h(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Опущенная буква $\mathcal{D}$ в этой записи по умолчанию означает, что $\mathcal{D} = \mathcal{S}et$, т. е. $p\mathcal{S}h(\mathcal{C}) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{S}et)$.

Упражнение 1.8. Проверьте, что описанное в n° 1.2.2 сопоставление $X \mapsto h_X$ задаёт функтор $\mathcal{C} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$, а сопоставление $X \mapsto h^X$ — предпучок $\mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{S}et)$.

1.3.1. Эквивалентности категорий. Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *эквивалентными*, если между ними есть такие функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, что композиция GF естественно изоморфна тождественному функтору $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, а композиция FG естественно изоморфна $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, т. е. имеются естественные по $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ преобразования

$$GF(X) \xrightarrow{\sim} X \quad \text{и} \quad FG(Y) \xrightarrow{\sim} Y\,, \tag{1-9}$$

являющиеся для всех X и Y изоморфизмами в категориях $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ соответственно. Такие функторы F и G называются *квазиобратными* друг другу *эквивалентностями категорий*. Подчеркнём, что наличие изоморфизмов (1-9) не означает равенств $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ или $GF = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$: объекты $GF(X)$ и X могут быть различны, как и объекты $FG(Y)$ и Y.

Пример 1.12 (выбор базиса)
Обозначим через $vec_{\Bbbk}$ категорию конечномерных векторных пространств над полем $\Bbbk$, а через $\mathcal{C} \subset vec_{\Bbbk}$ — её малую полную подкатегорию со счётным множеством объектов, коими являются *координатные* пространства $\Bbbk^n$, где $n \geqslant 0$ и $\Bbbk^0 = \{0\}$. Зафиксируем в каждом пространстве $V \in \mathrm{Ob}\,vec_{\Bbbk}$ какой-нибудь базис, т. е. выберем для каждого $V \in \mathrm{Ob}\,vec_{\Bbbk}$ изоморфизм[1]

$$f_V : V \xrightarrow{\sim} \Bbbk^{\dim(V)}\,, \tag{1-10}$$

причём для всех координатных пространств $\Bbbk^n$ положим $f_{\Bbbk^n} = \mathrm{Id}_{\Bbbk^n}$. Рассмотрим функтор $F : vec \to \mathcal{C}$, переводящий векторное пространство V в координатное пространство $\Bbbk^{\dim V}$, а стрелку $\varphi : V \to W$ — в стрелку $F(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}$, которую можно воспринимать как матрицу оператора φ в выбранных базисах пространств V и W. Покажем, что F является эквивалентностью категорий, квазиобратной к тавтологическому вложению $G : \mathcal{C} \hookrightarrow vec$. По построению мы имеем точное равенство[2] $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. Противоположная композиция $GF : vec \to vec$ принимает значения в несопоставимой с vec по мощности малой подкатегории $\mathcal{C} \subset vec$. Однако изоморфизмы (1-10) задают естественное преобразование из Id_{vec} в GF, т. к. в силу определения действия

[1] переводящий выбранный базис в стандартный базис в $\Bbbk^n$

[2] а не изоморфизм функторов

функтора F на стрелки все диаграммы (1-8) коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{vec}(V)=V \arrow[r, "\varphi=\mathrm{Id}_{vec}(\varphi)"] \arrow[d, "f_V"'] & W=\mathrm{Id}_{vec}(W) \arrow[d, "f_W"] \\
GF(V)=\Bbbk^{\dim V} \arrow[r, "GF(\varphi)=f_W\circ\varphi\circ f_V^{-1}"] & \Bbbk^{\dim W}=GF(W)
\end{tikzcd}$$

Тем самым, тождественный функтор Id_{vec} естественно изоморфен композиции GF.

Упражнение 1.9. Покажите, что категория Δ_{big} канонически эквивалентна симплициалной подкатегории $\Delta\subset\Delta_{\mathrm{big}}$ (см. прим. 1.4 на стр. 4).

Лемма 1.1
Функтор $G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ тогда и только тогда задаёт эквивалентность категорий, когда он вполне строг[1] и каждый объект $Y\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ изоморфен объекту вида $G(X)$ для некоторого (зависящего от Y) объекта[2] $X=X(Y)\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть для каждого $Y\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ указаны $X=X(Y)\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и изоморфизм $f_Y:Y\simeq G(X)$, причём когда $Y=G(X(Y))$, мы положим $f_{G(X)}=\mathrm{Id}_{G(X)}$. Зададим функтор $F:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ на объектах правилом $F(Y)=X(Y)$, а для стрелки $\varphi:Y_1\to Y_2$ положим $F(\varphi)$ равным такой стрелке[3] $\psi:X(Y_1)\to X(Y_2)$, что $G(\psi)=f_{Y_2}\circ\varphi\circ f_{Y_1}^{-1}$. Тогда $FG=\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ и для любой стрелки $\varphi:Y_1\to Y_2$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}(Y_1)=Y_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_{Y_1}"'] & Y_2=\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}(Y_2) \arrow[d, "f_{Y_2}"] \\
GF(Y_1)=X_1 \arrow[r, "GF(\varphi)=G(\psi)"] & X_2=GF(Y_2)\,.
\end{tikzcd}$$

Таким образом, $f_Y:Y\simeq G(X)=GF(Y)$ задают естественный изоморфизм тождественного функтора $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ с композицией GF. □

Упражнение 1.10. Покажите, что функторы дуализации из прим. 1.9 и прим. 1.10 являются квазиобратными самим себе антиэквивалентностями категорий.

1.4. Представимые функторы. Предпучок $F:\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}\to\mathcal{S}et$, естественно изоморфный предпучку h_X для некоторого $X\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, называется *представимым*, и X в этом случае называют *представляющим объектом* предпучка F. Двойственным образом, ковариантный функтор $F:\mathcal{C}\to\mathcal{S}et$ называется *копредставимым*, если он естественно изоморфен функтору h^X для некоторого $X\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, называемого *копредставляющим объектом* функтора F.

Упражнение 1.11. Убедитесь, что тензорное произведение конечномерных векторных пространств $U\otimes V$ копредставляет функтор $\mathcal{V}ec\to\mathcal{S}et$, сопоставляющий векторному пространству W множество билинейных отображений $U\times V\to W$.

[1] т. е. все отображения $G:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X),G(Y))$ являются изоморфизмами

[2] функторы G, обладающие этим свойством, называютсяпо-существу сюрьективными (*essentially surjective*)

[3] поскольку $G:\mathrm{Hom}(X_1,X_2)\simeq\mathrm{Hom}(G(X_1),G(X_2))$ является изоморфизмом, стрелка ψ существует и единственна

Множество $X_n = X([n])$ всех n-мерных симплексов триангулированного топологического пространства $X : \Delta_s^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ можно описать как множество всех *симплициальных*[1] отображений из стандартным образом триангулированного n-мерного симплекса в X, т. е. как $\operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\Delta_s)}\left(h_{[n]}, X\right)$. Обобщением этого наблюдения является

Лемма 1.2 (лемма Ионеды 1)
Для любого предпучка множеств $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ на произвольной категории $\mathcal{C}$ имеется функториальная по $F \in p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$ и по $A \in \mathcal{C}$ биекция $F(A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, F)$, переводящая элемент $a \in F(A)$ в естественное преобразование

$$f_X : \operatorname{Hom}(X, A) \to F(X), \tag{1-11}$$

которое посылает стрелку $\varphi : X \to A$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратная биекция сопоставляет каждому естественному преобразованию (1-11) значение отображения $f_A : h_A(A) \to F(A)$ на элементе $\operatorname{Id}_A \in h_A(A)$.

Доказательство. Для любого естественного преобразования (1-11), любого объекта $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и любой стрелки $\varphi : X \to A$ мы имеем коммутативную диаграмму (1-8)

$$\begin{tikzcd} h_A(A) = \operatorname{Hom}(A, A) \arrow[r, "h_A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \operatorname{Hom}(X, A) = h_A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X), \end{tikzcd} \tag{1-12}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\operatorname{Id}_A)\big)$. Это означает, что естественное преобразование $f : h_A \to F$ однозначно восстанавливается по элементу $a = f_A(\operatorname{Id}_A) \in F(A)$. Каждому элементу $a \in F(A)$ при этом отвечает преобразование (1-11), переводящее $\varphi \in \operatorname{Hom}(X, A)$ в $f_X(\varphi) = F(\varphi)(a) \in F(X)$, естественное, поскольку для любой стрелки $\psi : Y \to X$ и всех $\varphi \in h_A(X)$ имеем $f_Y\left(h_A(\psi)\varphi\right) = f_Y(\varphi\psi) = F(\varphi\psi)a = F(\psi)F(\varphi)a = F(\psi)\left(f_X(\varphi)\right)$, т. е. $f_Y \circ h_A(\psi) = F(\psi) \circ f_X$ как отображения $h_A(X) \to F(Y)$. □

Упражнение 1.12 (лемма Ионеды 2). Для ковариантного функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ постройте функториальную по F и $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ биекцию $F(A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{S}et)}(h^A, F)$.

Следствие 1.1
Функторы $X \mapsto h_X$ и $X \mapsto h^X$ задают вполне строгие ковариантное и контравариантное вложения категории $\mathcal{C}$ в категории предпучков и ковариантных функторов соответственно. Иными словами, имеются функториальные по $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ изоморфизмы $\operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, h_B) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ и $\operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C})}(h^A, h^B) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

Доказательство. Применяем леммы Ионеды к функторам $F = h_B$ и $F = h^B$. □

Следствие 1.2
Если объект $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, копредставляющий функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ (соотв. представляющий предпучок $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$) существует, то он единствен с точностью до канонического изоморфизма.

[1] т. е. переводящих грань в грань той же размерности и линейных на каждой грани

Доказательство. Если имеются два таких объекта A, B, что $F = h^A = h^B$ (соотв. $F = h_A = h_B$), то тождественному естественному преобразованию $\mathrm{Id}_F : F \to F$ отвечает по сл. 1.1 изоморфизм $B \xrightarrow{\sim} A$ (соотв. $A \xrightarrow{\sim} B$). □

1.4.1. Описание объектов универсальными свойствами. При помощи сл. 1.2 можно переносить теоретико множественные конструкции из категории $\mathcal{S}et$ в произвольные категории. А именно, будем называть результатом применения интересующей нас теоретико множественной операции к набору объектов $X_i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ такой объект $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, который представляет предпучок $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, переводящий $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ в результат применения рассматриваемой операции к множествам $\mathrm{Hom}(Y, X_i)$. Разумеется, это неявное описание не даёт никаких гарантий *существования* определяемого объекта — функтор вполне может оказаться непредставимым. Но если он представим, то представляющий объект X, во-первых, автоматически обладает некоторыми «универсальными свойствами», а во-вторых, единствен с точностью до *единственного* изоморфизма, сохраняющего эти свойства.

Пример 1.13 (произведение $A \times B$)
Определим *произведение* $A \times B$ объектов $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ как объект, представляющий функтор $Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y, A) \times \mathrm{Hom}(Y, B)$ из $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ в $\mathcal{S}et$. Если он существует, то для всех Y имеется функториальный по Y изоморфизм

$$\beta_Y : \mathrm{Hom}(Y, A \times B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Y, A) \times \mathrm{Hom}(Y, B)\,.$$

Полагая в нём $Y = A \times B$, получаем пару стрелок $A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$, изображающих элемент $\beta_{A\times B}(\mathrm{Id}_{A\times B}) \in \mathrm{Hom}(A \times B, A) \times \mathrm{Hom}(A \times B, B)$. Она универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок $A \xleftarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} B$ существует единственная такая стрелка $\varphi \times \psi : Y \to A \times B$, что $\varphi = \pi_A \circ (\varphi \times \psi)$ и $\psi = \pi_B \circ (\varphi \times \psi)$.

Упражнение 1.13. Убедитесь, что а) для каждой диаграммы $A \xleftarrow{\pi'_A} C \xrightarrow{\pi'_B} B$, также обладающей этим универсальным свойством, имеется единственный изоморфизм $\gamma : C \xrightarrow{\sim} A \times B$, такой что $\pi_A \circ \gamma = \pi'_A$ и $\pi_B \circ \gamma = \pi'_B$ б) любая пара стрелок $\alpha : A_1 \to A_2$ и $\beta : B_1 \to B_2$ задаёт единственный такой морфизм $\alpha \times \beta : A_1 \times B_1 \to A_2 \times B_2$, что $\alpha \circ \pi_A = (\alpha \times \beta) \circ \alpha$ и $\beta \circ \pi_B = (\alpha \times \beta) \circ \beta$.

В категории множеств произведение $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$. Снабжённое слабейшей топологией, в которой π_A и π_B непрерывны, это множество задаёт произведение и в категории топологических пространств. Снабжённое покомпонентными операциями, оно же является произведением групп, колец и модулей над кольцами.

Пример 1.14 (копроизведение $A \otimes B$)
Двойственным образом, копроизведение $A \otimes B$ объектов $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ определяется как объект, копредставляющий ковариантный функтор $Y \mapsto \mathrm{Hom}(A, Y) \times \mathrm{Hom}(B, Y)$ из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{S}et$. Обращая все стрелки в предыдущем примере, мы можем охарактеризовать копроизведение как объект, включающийся в диаграмму $A \xrightarrow{\iota_A} A \otimes B \xleftarrow{\iota_B} B$, универсальную в том смысле, что для любой пары стрелок $A \xrightarrow{\varphi} Y \xleftarrow{\psi} B$ в $\mathcal{C}$ имеется единственный такой морфизм $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \to Y$, что $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_A$ и

$\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_B$.

Упражнение 1.14. Убедитесь, что если универсальная тройка $A \xrightarrow{\iota_A} A \otimes B \xleftarrow{\iota_B} B$ существует, то а) она единственна с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с ι_A и ι_B б) любая пара стрелок $\alpha : A_1 \to A_2$ и $\beta : B_1 \to B_2$ задаёт единственный такой морфизм $\alpha \otimes \beta : A_1 \otimes B_1 \to A_2 \otimes B_2$, что $\iota_A \circ \alpha = (\alpha \otimes \beta) \circ \alpha$.

В категории множеств и топологических пространств копроизведение $A \otimes B = A \sqcup B$ это дизъюнктное объединение. В категории групп $A \otimes B = A * B$ это свободное произведение групп[1]. В категории модулей над кольцом[2] $A \otimes B = A \times B = A \oplus B$ это прямая сумма модулей. В категории коммутативных колец с единицей $A \otimes B$ это тензорное произведение колец[3].

1.5. Сопряжённые функторы. Если функторы $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ между категориями $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ связаны функториальным по $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ и $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ изоморфизмом

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \tag{1-13}$$

то F называется *левым сопряжённым* функтором к G, а G — *правым сопряжённым* к F. С каждой парой сопряжённых функторов связаны естественные преобразования

$$t : F \circ G \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F\,. \tag{1-14}$$

Стрелка $t_Y : FG(Y) \to Y$, задающая действие преобразования t над $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$, является образом элемента $\operatorname{Id}_{G(Y)}$ при изоморфизме (1-13), написанном для $X = G(Y)$:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \ni \operatorname{Id}_{G(Y)}\,.$$

Двойственным образом, стрелка $s_X : X \to GF(X)$ получается из $\operatorname{Id}_{F(X)}$ при изоморфизме (1-13), написанном для $Y = F(X)$:

$$\operatorname{Id}_{F(X)} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X))\,.$$

Пример 1.15 (свободные модули)

Обозначим через $R\text{-}\mathcal{M}od$ категорию левых модулей над фиксированным кольцом R, а через $S : R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et$ — забывающий функтор, сопоставляющий модулю множество его элементов. Для любого множества $E \in \operatorname{Ob} \mathcal{S}et$ ковариантный функтор $R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et$, $M \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}et}\big(E, G(M)\big)$, копредставим *свободным* R-модулем с базисом E. Мы будем обозначать такой свободный модуль через $R \otimes E$. По определению, он состоит из

[1] т. е. фактор свободной группы, порождённой дизъюнктным объединением $A \setminus e$ с $B \setminus e$, по наименьшей нормальной подгруппе соотношений, позволяющих заменять пару соседних и лежащих в одной группе букв их произведением; так, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \mathbb{F}_2$ это свободная (некоммутативная) группа с двумя образующими

[2] в частности, абелевых групп

[3] т. е. тензорное произведение подлежащих абелевых групп, как модулей над $\mathbb{Z}$, с покомпонентным умножением: $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \overset{\text{def}}{=} (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$

формальных линейных комбинаций $\sum\limits_{e\in E} x_e e$ элементов множества E с коэффициентами $x_e \in R$, лишь конечное число из которых отлично от нуля.

Упражнение 1.15. Установите функториальный по M и E изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathcal{M}od}(R\otimes E, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}\big(E, S(M)\big)\,. \tag{1-15}$$

Изоморфизм (1-15) означает, что функтор $E \mapsto R\otimes E$ является левым сопряжённым к забывающему функтору S. Естественное преобразование $s_E : E \hookrightarrow S(A\otimes E)$ вкладывает E в качестве множества базисных векторов в множество всех векторов свободного модуля $R\otimes E$, а естественное преобразование $t_M : R\otimes S(M) \twoheadrightarrow M$ задаёт R-линейный эпиморфизм из огромного свободного модуля, базисом в котором является множество всех векторов модуля M, на модуль M, переводя базисный вектор m в элемент $m \in M$, а формальную линейную комбинацию базисных векторов — в точно такую же комбинацию, но вычисленную внутри M. Например, при $M = R = \mathbb{R}$ векторное пространство $\mathbb{R}\otimes S(\mathbb{R})$ изоморфно пространству всех функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с конечным носителем, а преобразование $t_{\mathbb{R}}$ сопоставляет такой функции вещественное число, равное сумме всех её (ненулевых) значений.

1.5.1. Тензорные произведения и Hom. Пусть R — произвольное кольцо с единицей. Тензорным произведением $M\underset{R}{\otimes} N$ правого R-модуля M на левый R-модуль N называется фактор тензорного произведения абелевых групп[1] $M\otimes N$ по подгруппе, порождённой всевозможными разностями

$$(mx)\otimes n - m\otimes(xn)\,,\quad \text{где}\quad m\in M\,,\ x\in R\,,\ n\in N\,.$$

Это абелева группа, на которой кольцо R никак не действует, но в которой выполняются соотношения $(mx)\underset{R}{\otimes} n = m\underset{R}{\otimes}(xn)$. Тензорное умножение на фиксированный левый R-модуль N задаёт функтор из категории правых R-модулей в абелевы группы

$$\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b\,,\quad X \mapsto X\underset{R}{\otimes} N\,,$$

переводящий стрелку $\varphi : X_1 \to X_2$ в стрелку $\varphi\otimes 1 : m\underset{R}{\otimes} n \mapsto \varphi(m)\underset{R}{\otimes} n$. Если левый R-модуль N одновременно является правым модулем над ещё одним кольцом S с единицей и правое действие S коммутирует с левым действием R (такие N называются *R-S бимодулями*), функтор тензорного умножения на N отображает $\mathcal{M}od\text{-}R$ в $\mathcal{M}od\text{-}S$: кольцо S действует на $M\otimes N$ справа по правилу $(m\otimes n)y = m\otimes(ny)$. С другой стороны, имеется функтор $h^N : \mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{A}b$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_S(N,Y)$, который принимает значения в $\mathcal{M}od\text{-}R$: правое действие $x\in R$ на $\mathrm{Hom}_S(N,Y)$ переводит S-линейную справа стрелку $\varphi : N\to Y$ в стрелку $\varphi x : n \mapsto \varphi(xn)$ (так что выполняется равенство $(\varphi x)n = \varphi(xn)$).

Предложение 1.1
Тензорное умножение на R-S-бимодуль N сопряжено слева функтору h^N, т. е. имеется естественный по $X\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}od\text{-}R$ и $Y\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}od\text{-}S$ изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(X\underset{R}{\otimes} N, Y\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N,Y)\big)\,. \tag{1-16}$$

[1] или, что то же самое, $\mathbb{Z}$-модулей

Доказательство. Отображение из левой части (1-16) в правую сопоставляет S-линейному справа гомоморфизму $\varphi : X \otimes_R N \to Y$ зависящее от $x \in X$ семейство гомоморфизмов $\varphi_x : N \to Y$, $n \mapsto \varphi(x \otimes n)$. Каждый из них S-линеен справа:

$$\varphi_x(ns) = \varphi(x \otimes_R ns) = \varphi(x \otimes_R n)s = \varphi_x(n)s\,,$$

а сопоставление $x \mapsto \varphi_x$, как отображение $X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y)$, R-линейно справа:

$$\varphi_{xr} n = \varphi(xr \otimes_R n) = \varphi(x \otimes_R rn) = \varphi_x(rn) = (\varphi_x r)n\,.$$

Обратное отображение из правой части (1-16) в левую переводит семейство S-линейных справа гомоморфизмов $\varphi_x : N \to Y$, которые R-линейно справа зависят от $x \in X$, в S-линейный справа гомоморфизм $\varphi : x \otimes_R n \mapsto \psi_x(n)$. □

Упражнение 1.16. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y) \otimes_R N \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(N, X \otimes_R N\big)\,.$$

Пример 1.16 (индуцирование и коиндуцирование)
Если кольцо A содержится в кольце B и у них общая единица, каждый правый B-модуль X одновременно является и правым A-модулем, что задаёт *функтор ограничения*

$$\mathrm{res} : \mathcal{M}od\text{-}B \to \mathcal{M}od\text{-}A\,. \tag{1-17}$$

Рассматривая B как B-A бимодуль и беря в предл. 1.1 $S = A$, а $N = R = B$, получим в качестве правого A-модуля $X \otimes_B B \simeq \mathrm{res}\, X$ ограничение A-модуля X и функториальный по B-модулю X и A-модулю Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(\mathrm{res}\, X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)\big)\,.$$

Правый B-модуль $\mathrm{coind}\, Y \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)$ называется *коиндуцированным* с A-модуля Y. Функтор коиндуцирования $\mathrm{coind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён справа к функтору ограничения.

Упражнение 1.17. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \mathrm{Hom}_A(B, Y) \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \mathrm{Hom}_A(B, X)\,.$$

Рассматривая B как A-B бимодуль и полагая в предл. 1.1 $S = N = B$, а $R = A$, получим в качестве правого A-модуля $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(B, Y) \simeq \mathrm{res}\, Y$ ограничение B-модуля Y, и функториальный по A-модулю X и B-модулю Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(X \otimes_A B, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(X, \mathrm{res}\, Y)\,.$$

Правый B-модуль $\mathrm{ind}\, X \overset{\text{def}}{=} X \otimes_A B$ называется *индуцированным* с A-модуля X. Функтор индуцирования $\mathrm{ind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён слева к функтору ограничения.

Упражнение 1.18. Явно опишите естественные преобразования

$$\lambda_Y : Y \otimes_A B \to Y \quad \text{и} \quad \varrho_X : X \to X \otimes_A B\,.$$

В ситуации, когда $A = \Bbbk[H]$ и $B = \Bbbk[G]$ являются групповыми алгебрами (с коэффициентами в поле $\Bbbk$) конечной группы G и её подгруппы H, мы получаем известные из начального курса алгебры функторы (ко)индуцирования линейных представлений[1] (над полем $\Bbbk$) группы G с представлений её подгруппы H.

Пример 1.17 (сингулярные симплексы)
Свяжем с топологическим пространством Y симплициальное множество его *сингулярных симплексов* $S(Y) : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, которое сопоставляет комбинаторному симплексу $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ множество $S_n(Y) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y) = h_Y(\Delta^n)$ всех непрерывных отображений правильного n-мерного симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в Y, а неубывающему отображению $\varphi : [n] \to [m]$ — правое умножение $f \mapsto f \circ \varphi^*$ на аффинное отображение $\varphi^* : \Delta^m \to \Delta^n$, действие которого на вершины симплекса совпадает с φ. Возникающий таким образом функтор $S : \mathcal{T}op \to p\mathcal{S}h(\Delta)$ сопряжён справа функтору геометрической реализации $p\mathcal{S}h(\Delta) \to \mathcal{T}op$, $X \mapsto |X|$, из прим. 1.7 на стр. 7, ибо имеет место естественный по симплициальному множеству X и топологическому пространству Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h}(X, S(Y)), \tag{1-18}$$

являющийся категорным аналогом изоморфизма (1-16) для модулей над кольцами. В самом деле, функтор геометрической реализации вкладывает категорию Δ в категорию $\mathcal{T}op$ в виде дизъюнктного набора $D = \bigsqcup\limits_{n\geqslant 0} \Delta^n$ правильных симплексов, на котором имеется левое действие стрелок φ категории Δ аффинными отображениями и коммутирующее с ним правое действие стрелок категории $\mathcal{T}op$, непрерывно отображающих D в произвольные топологические пространства. Поэтому множество сингулярных симплексов $S(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)$ является правым модулем над категорией Δ, как и симплициальное множество X, геометрическую реализацию которого можно понимать как произведение $|X| = X \underset{\Delta}{\otimes} D$ — фактор дизъюнктного объединения $\bigsqcup\limits_{n\geqslant 0} X_n \times \Delta^n$ по соотношениям $(x\varphi, s) = (x, \varphi s)$, что превращает изоморфизм (1-18) в

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}\big(X \underset{\Delta}{\otimes} D, Y\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}\Delta}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)\big), \tag{1-19}$$

уже ничем не отличающийся от (1-16).

Упражнение 1.19. Постройте взаимно обратные изоморфизмы в (1-19) явно и опишите естественные преобразования

$$t_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y) \underset{\Delta}{\otimes} D \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}\big(D, X \underset{\Delta}{\otimes} D\big).$$

Предложение 1.2
Для существования левого сопряжённого функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ к данному функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ функтор

$$h_G^X : \mathcal{D} \to \mathcal{S}et, \quad Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big), \tag{1-20}$$

был копредставим, и в этом случае $F(X)$ является его копредставляющим объектом.

[1] в этом случае функторы индуцирования и коиндуцирования изоморфны

Доказательство. Необходимость очевидна из определений. Докажем достаточность. Пусть для каждого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ функтор (1-20) представляется объектом $F(X)$, т. е. имеется естественный изоморфизм функторов $f^X : h^{F(X)} \xrightarrow{\sim} h^X_G$. Чтобы продолжить соответствие $X \mapsto F(X)$ до функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ заметим, что морфизм $\varphi : X_1 \to X_2$ задаёт естественное преобразование $\varphi^* : h^{X_2}_G \to h^{X_1}_G$ заключающееся в правом умножении на φ: стрелка $\psi : X_2 \to G(Y)$ переходит в $\psi\varphi : X_1 \to G(Y)$. По сл. 1.1 из леммы Ионеды композиция естественных преобразований $\left(f^{X_1}\right)^{-1} \circ \varphi^* \circ f^{X_2} : h^{F(X_2)} \to h^{F(X_1)}$ задаётся правым умножением на единственную стрелку $F(X_1) \to F(X_2)$, которую мы и объявим образом $F(\varphi)$ стрелки φ под действием функтора F. Прямо по построению мы получаем функториальный по X изоморфизм $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. □

Упражнение 1.20. Докажите двойственное утверждение: для существования правого сопряжённого функтора G к функтору $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ был представим предпучок $h^G_Y : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$, и $G(X)$ в этом случае его и представляет.

Предложение 1.3
Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, когда существуют такие естественные преобразования $t : F \circ G \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ и $s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$, что композиции $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ и $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$ являются тождественными эндоморфизмами функторов F и G.

Доказательство. Если имеются функториальные по X и Y изоморфизмы

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), Y\big) \arrow[rr, bend left, "\varrho"] && \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big) \arrow[ll, bend left, "\lambda"] \end{tikzcd} \tag{1-21}$$

то для любой стрелки $\varphi : X_1 \to X_2$ в $\mathcal{C}$ и любого Y из $\mathcal{D}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_1), Y) & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, G(Y)) \arrow[l, "\lambda", "\sim"'] \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_2), Y) \arrow[u, "F(\varphi)^*"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, G(Y)) \arrow[l, "\lambda", "\sim"'] \arrow[u, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которой задаются правым умножением на $F(\varphi)$ и на φ соответственно. Рисуя это для $Y = F(X)$ и морфизма $\varphi = s_X : X \to GF(X)$, который задаёт действие над объектом X естественного преобразования $s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ из форм. (1-14) на стр. 15, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X)) \arrow[l, "\lambda", "\sim"'] \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FGF(X), F(X)) \arrow[u, "F(s_X)^*"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X), GF(X)) \arrow[l, "\lambda", "\sim"'] \arrow[u, "s_X^*"'] \end{tikzcd}$$

верхняя стрелка λ которой переводит s_X в $\operatorname{Id}_{F(X)}$, а нижняя стрелка λ переводит $\operatorname{Id}_{GF(X)}$ в морфизм $t_{F(X)} : FGF(X) \to F(X)$, задающий действие второго естественного преобразования $t : FG \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ из формулы (1-14) над объектом $F(X)$. Таким образом,

$$\operatorname{Id}_{F(X)} = \lambda(s_X) = \lambda s_X^* \left(\operatorname{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^* \lambda \left(\operatorname{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^* \left(t_{F(X)}\right) = t_{F(X)} \circ F(s_X)\,,$$

а это и значит, что композиция $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ задаёт тождественное преобразование функтора F. Проверка того, что $G \xrightarrow{s\circ G} GFG \xrightarrow{G\circ t} G$ совпадает с Id_G полностью симметрична. Наоборот, если имеются преобразования $s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ и $t : FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, зададим в (1-21) действие λ и ϱ на стрелки $\varphi : F(X) \to Y$ и $\psi : X \to G(Y)$ правилами:

$$\varrho(\varphi) = G(\varphi) \circ s_X \quad \text{и} \quad \lambda(\psi) = t_Y \circ F(\psi)\,,$$

в правых частях которых стоят сквозные отображения вдоль стрелок

$$X \xrightarrow{s_X} GF(X) \xrightarrow{G(\varphi)} G(Y) \quad \text{и} \quad F(X) \xrightarrow{F(\psi)} FG(Y) \xrightarrow{t_Y} Y\,.$$

Композиция $\lambda\varrho(\varphi) = t_Y \circ FG(\varphi) \circ F(s_X) : F(X) \to Y$ представляет собою путь из левого нижнего угла в правый верхний на диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & F(X) \arrow[rr, "\varphi"] & & Y & \\
F(X) \arrow[ur, equal, "\mathrm{Id}_{F(X)}"] \arrow[rr, "F(s_X)"] & & FGF(X) \arrow[ul, "t_{F(X)}"'] \arrow[rr, "FG(\varphi)"] & & FG(Y) \arrow[ul, "t_Y"']
\end{tikzcd}$$

правый параллелограмм которой коммутативен в силу естественности преобразования t, а левый треугольник — в силу равенства $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ и Id_F. Поэтому $\lambda\varrho(\varphi) = \varphi$. Равенство $\varrho\lambda(\psi) = \psi$ проверяется симметричным образом. □

1.6. Пределы диаграмм. Любую малую категорию $\mathcal{N}$ можно воспринимать как диаграмму, вершинами которой служат объекты, а стрелками — морфизмы категории $\mathcal{N}$. Всякий функтор $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ даёт реализацию такой диаграммы в категории $\mathcal{C}$, т. е. является диаграммой в категории $\mathcal{C}$ с вершинами в объектах $X_\nu = X(\nu)$, занумерованных множеством $\mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, и стрелками $\varkappa_{\mu\nu} = X(\nu \to \mu) : X_\nu \to X_\mu$, занумерованными множеством $\mathrm{Mor}\,\mathcal{N}$. Каждый объект $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ задаёт *постоянную диаграмму* $\overline{Y}$, в которой все объекты $\overline{Y}_\nu = Y$ и все стрелки равны Id_Y. С любой диаграммой $X \in \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ связан предпучок множеств $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{Y}, X)$. Если он представим, т. е. существует такой объект $L \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, что имеется естественный по $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, L) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{Y}, X)\,, \tag{1-22}$$

то представляющий объект L называют *пределом*[1] диаграммы X и пишут $L = \lim X_\nu$. Двойственным образом, объект $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, копредставляющий ассоциированный с диаграммой X ковариантный функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{Y})$, называется *копределом*[2] диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и обозначается $C = \mathrm{colim}\, X_\nu$. В этом случае имеется функториальная по $Y \in \mathcal{C}$ биекция

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{Y})\,. \tag{1-23}$$

Как и все (ко) представляющие объекты, (ко) пределы однозначно характеризуются своими «универсальными свойствами». А именно, полагая $Y = L$ в формуле (1-22),

[1]или *проективным* пределом
[2]или *инъективным* пределом

можно сопоставить тождественному эндоморфизму Id_L предела $L = \lim X_\nu$ диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ естественное преобразование $f : \overline{L} \to X$, представляющее собою набор стрелок $\pi_\nu : L \to X_\nu$, которые коммутируют со всеми стрелками диаграммы X и универсальны в том смысле, что для всех $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любого набора стрелок $\psi_\nu : Y \to X_\nu$, коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X, существует единственный такой морфизм $\alpha : Y \to \lim X_\nu$, что $\psi_\nu = \pi_\nu \circ \alpha$ для всех ν.

Двойственным образом, для копредела $\operatorname{colim} X_\nu$ диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ имеется канонический набор стрелок $\iota_\nu : X_\nu \to \operatorname{colim} X_\nu$, коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X, такой что для всех $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любого набора стрелок $\psi_\nu : X_\nu \to Y$, коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X, существует единственный такой морфизм $\beta : \operatorname{colim} X_\nu \to Y$, что $\psi_\nu = \beta \circ \iota_\nu$ для всех ν.

Упражнение 1.21. Проверьте, что универсальные свойства задают предел и копредел однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми каноническими стрелками π_ν и ι_ν соответственно.

Пример 1.18 (начальный и конечный объекты)
Простейшая диаграмма — пустая. Её предел Fin называется *конечным*, а копредел Or — *начальным* объектами категории. Эти объекты однозначно с точностью до единственного изоморфизма определяются тем, что для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ есть единственная стрелка $X \to \mathrm{Fin}$ и единственная стрелка $\mathrm{Or} \to X$.

Упражнение 1.22. Укажите начальный и конечный объекты в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом.

Пример 1.19 (прямые (ко) произведения)
Малая категория $\mathcal{N}$ называется *дискретной*, если все её морфизмы исчерпываются тождественными морфизмами Id_ν с $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$. Соответствующие *дискретные диаграммы* $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ — это семейства объектов X_ν без стрелок между ними. Пределы и копределы таких диаграмм называются *прямыми произведениями* и *копроизведениями* и обозначаются, соответственно $\prod\limits_\nu X_\nu$ и $\coprod\limits_\nu X_\nu$. Когда индексов всего два, мы получаем прямые (ко) произведения двух объектов из прим. 1.13 и прим. 1.14. Очевидная индукция показывает, что для существования всех конечных прямых (ко) произведений достаточно существования прямых (ко) произведений любых двух объектов.

Пример 1.20 ((ко) уравнители)
(Ко)предел диаграммы $X \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} Y$ называется (*ко*)*уравнителем*[1] стрелок φ и ψ. В категории множеств уравнитель представляет собою множество решений уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$ на $x \in X$ или, более научно, прообраз диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ при каноническом отображении $\varphi \times \psi : X \to Y \times Y$. Коуравнитель является фактором множества Y по наименьшему отношению эквивалентности[2] $R \subset Y \times Y$, содержащему образ

[1]по-английски (*co*)*equalizer*

[2]Напомним, что *отношение эквивалентности* на Y это подмножество $R \subset Y \times Y$, которое *рефлексивно* (содержит диагональ Δ_Y), *симметрично* (переходит в себя при транспози-

отображения $\varphi \times \psi$, т. е. все отождествления $\varphi(x) = \psi(x)$ с $x \in X$.

Упражнение 1.23. Проверьте это и постройте (ко) уравнители любой пары стрелок в категориях топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным коммутативным кольцом.

Например, (ко) ядро гомоморфизма $f : A \to B$ в категории $\mathcal{A}b$ абелевых групп это (ко) уравнитель f и нулевого морфизма. Интуитивно, уравнители позволяют задавать «подобъекты» при помощи «уравнений», а коуравнители — «фактор объекты» при помощи «образующих и соотношений».

Пример 1.21 (послойные произведения)
Предел диаграммы $X \xrightarrow{\xi} B \xleftarrow{\eta} Y$, называется *послойным*[1] *произведением* и обозначается $X \underset{B}{\times} Y$. Он включается в коммутативный *декартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} X \underset{B}{\times} Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd} \tag{1-24}$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd}$$

имеется единственный такой морфизм $\varphi' \times \psi' : Z \to X \underset{B}{\times} Y$, что $\varphi' = \varphi \circ (\varphi' \times \psi')$ и $\psi' = \psi \circ (\varphi' \times \psi')$.

Упражнение 1.24. Убедитесь, что левый верхний угол диаграммы (1-24) задаётся этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с φ и ψ.

В категории множеств отображение $X \underset{B}{\times} Y \to B$ имеет в качестве слоя над произвольной точкой $b \in B$ прямое произведение слоёв $\varphi^{-1}(b) \times \psi^{-1}(b)$, отсюда и название.

ции сомножителей) и *транзитивно* (т. е. $(y_1, y_2), (y_2.y_3) \in R \Rightarrow (y_1, y_3) \in R$). Пересечение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности, и всякое отображение $\xi : Y \to Z$ определяет отношение эквивалентности $R_\xi = \{(y_1, y_2) \mid \xi(y_1) = \xi(y_2)\}$ на Y, причём $\xi' : Y \to Z'$ тогда и только тогда представляется в виде композиции $\xi' = \eta \circ \xi$ с некоторой стрелкой $\eta : Z \to Z'$, когда $R_\xi \subset R_{\xi'}$, т. е. когда эквивалентность, отвечающая ξ, *влечёт* эквивалентность, отвечающую ξ' (в этом случае говорят, что первая эквивалентность *тоньше* или *сильнее* последней).

[1] или *расслоенным*

Пример 1.22 (послойные копроизведения)
Оборачивая все стрелки в предыдущем примере, назовём *послойным копроизведением* $X \bigotimes_B Y$ копредел диаграммы $X \xleftarrow{\xi} B \xrightarrow{\eta} Y$. Он вписывается в коммутативный *кодекартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & X \bigotimes_B Y \end{tikzcd} \tag{1-25}$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi'"] \\ X \arrow[r, "\varphi'"] & Z \end{tikzcd}$$

существует единственный такой морфизм $\varphi' \otimes \psi' : X \bigotimes_B Y \to Z$, что $\varphi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \varphi$ и $\psi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \psi$.

Упражнение 1.25. Явно опишите послойные (ко) произведения в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп[1], коммутативных колец с единицей и модулей над коммутативным кольцом.

1.6.1. (Ко) замкнутость. Категория $\mathcal{C}$ называется *(ко) замкнутой*, если для любой малой категории $\mathcal{N}$ каждая диаграмма $\mathcal{N} \to \mathcal{C}$ имеет (ко) предел в $\mathcal{C}$.

Предложение 1.4
Для замкнутости категории $\mathcal{C}$ достаточно существования в $\mathcal{C}$ конечного объекта, прямых произведений любых множеств объектов и уравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом, а для козамкнутости — существования в $\mathcal{C}$ начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

Доказательство. Мы построим предел произвольной диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$, копредел строится аналогично путём обращения стрелок. Надо предъявить универсальный набор мофизмов φ_ν с общим началом в объекты диаграммы, решающий уравнения $\varphi_\mu = \varkappa_{\mu\nu}\varphi_\nu$, где $\varkappa_{\mu\nu} = X(\nu \to \mu) : X(\nu) \to X(\mu)$ пробегает все стрелки диаграммы. Рассмотрим произведение всех объектов диаграммы: $A = \prod_\mu X_\mu$, и ещё одно произведение, куда каждый X_μ входит столько раз, сколько стрелок в нём заканчивается:

$$B = \prod_{\nu\to\mu} F_{\nu\mu}, \quad \text{где} \quad F_{\nu\mu} \stackrel{\text{def}}{=} X_\mu .$$

Для каждой стрелки $\nu \to \mu$ зададим два отображения $A \to F_{\nu\mu}$: $f_{\nu\mu} = \mathrm{Id}_{X_\mu} \circ \pi_\mu$ и $g_{\nu\mu} = \varkappa_{\mu\nu} \circ \pi_\nu$, где $\pi_\alpha : A \to X_\alpha$ суть канонические стрелки из произведения в

[1] в теории групп копроизведения традиционно называются *амальгамами*

сомножители. По универсальному свойству произведения B имеются два морфизма $f, g : A \to B$, поднимающие стрелки $f_{\nu\mu}$ и $g_{\nu\mu}$. Их уравнитель L приходит вместе с морфизмом $\varphi : L \to A$, задающим набор стрелок $\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi$ с требуемыми универсальными свойствами. □

Пример 1.23
В категории множеств $\lim X$ изоморфен подмножеству прямого произведения $\prod X_\nu$, образованному такими семействами (x_ν), $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, $x_\nu \in X_\nu$, где $x_\mu = X(\nu \to \mu)x_\nu$ для всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\mathrm{Mor}\,\mathcal{N}$.

Упражнение 1.26. Убедитесь, что $\mathrm{colim}\,X$ изоморфен коуравнителю диаграммы

$$\coprod_{\nu\to\mu} G_{\nu\mu} \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \coprod_{\nu} X_\nu \ ,$$

в которой $G_{\nu\mu} = X_\nu$, $f = \coprod f_{\nu\mu}$, где $f_{\mu\nu} = \iota_\nu : F_{\nu\mu} = X_\nu \to \coprod X_\nu$, а $g = \coprod g_{\nu\mu}$, где $g_{\mu\nu} = \iota_\mu \circ X(\nu \to \mu) : F_{\nu\mu} = X_\nu \to \coprod X_\nu$. В частности, в категории множеств $\mathrm{colim}\,X$ изоморфен фактору дизъюнктного объединения $\coprod X_\nu$ по наименьшему отношению эквивалентности, отождествляющему x_ν с $X(\nu \to \mu)x_\nu$ для всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\mathrm{Mor}\,\mathcal{N}$.

Замечание 1.1. Для того, чтобы в категории $\mathcal{C}$ существовали (ко) пределы всех *конечных* диаграмм, в условиях предл. 1.4 достаточно требовать существования в $\mathcal{C}$ конечных (ко) произведений.

Следствие 1.3
Категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом замкнуты и козамкнуты.

Доказательство. Сделайте упр. 1.23. □

1.6.2. Фильтрующиеся диаграммы. Категория $\mathcal{F}$ называется *фильтрующейся*, если из общего конца любых двух стрелок φ, ψ с общим началом и общим концом ведёт такая стрелка ζ, что $\zeta\varphi = \zeta\psi$, и из любых двух объектов выходят стрелки с общим концом. Например, любой чум, в котором у каждых двух элементов есть общая верхняя грань, является фильтрующейся категорией[1]. Если категория индексов $\mathcal{F}$ фильтрующаяся, то диаграммы $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ и $\mathcal{F}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}$ принято называть *прямыми* и *обратными фильтрами*[2], а их (ко)пределы обозначать через $\varinjlim$, $\underrightarrow{\mathrm{colim}}$ и $\varprojlim$, $\underleftarrow{\mathrm{colim}}$. Копредел индуктивной системы множеств $X : \mathcal{F} \to \mathcal{S}et$ изоморфен фактору дизъюнктного объединения $\coprod\limits_{\nu\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{F}} X_\nu$ по отношению эквивалентности, отождествляющему $x_\nu \in X_\nu$ и $x_\mu \in X_\mu$, если $X(\nu \to \eta)x_\nu = X(\mu \to \eta)x_\mu$ в X_η для некоторой пары стрелок $\nu \to \eta \leftarrow \mu$.

Упражнение 1.27. Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности и убедитесь, что множество классов эквивалентности изоморфно $\mathrm{colim}\,X$.

[1] ср. с прим. 1.2 на стр. 3
[2] или *индуктивными* и *проективными* системами

Пример 1.24 (разбиения отрезка)
Конечные наборы точек $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_\infty = 1$, разбивающие отрезок $[0,1]$ на непересекающиеся интервалы (как в определении интеграла Римана), образуют прямую систему в категории ∇_{big} относительно морфизмов включения, отвечающих измельчениям разбиения. Копределом этой системы в категории всех (не обязательно конечных) упорядоченных множеств с отмеченными максимальным и минимальным элементами является $[0,1]$. В категории ∇_{big} предела не существует.

Пример 1.25 (открытые окрестности и слой предпучка)
Множество открытых окрестностей любого подмножества $Z \subset X$ топологического пространства X является проективной системой в категории $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств в X: для любых окрестностей $U, W \subset Z$ окрестность $U \cap W = U \underset{X}{\times} V$ вкладывается и в U, и в W. Пределом этой системы в категории $\mathcal{S}et$ является пересечение всех открытых окрестностей Z. В категории $\mathcal{U}$ предела может и не быть.

Упражнение 1.28. Убедитесь, что $U \underset{X}{\times} V = U \cap V$ в категории $\mathcal{U}(X)$.

Для любого предпучка $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ множества сечений $F(U)$ над открытыми окрестностями U произвольно заданного подмножества $Z \subset X$ образуют индуктивную систему в $\mathcal{S}et$. Её копредел называется *слоем* предпучка F над Z и обозначается F_Z. Согласно предыдущему описанию, каждый элемент $\sigma \in F_Z$ представляет собою класс $[s]_Z$ некоторого сечения $s \in F(U)$ над некоторым $U \supset Z$ по модулю эквивалентности, отождествляющей $[s]_Z$ и $[t]_Z$, когда $s|_V = t|_V$ над некоторым $Z \subset V \subset U \cap W$. Такие классы называются *ростками сечений* предпучка F над Z. В частности, когда $Z = \{x\}$ это одна точка, слой F_x называется *слоем F в точке x*.

Пример 1.26 (локализация коммутативного кольца)
Рассмотрим любую не содержащую нуля мультипликативную систему[1] S в произвольном коммутативном кольце K с единицей. Зададим на S структуру категории, полагая $\operatorname{Hom}_S(s,t) \overset{\text{def}}{=} \{a \in K \mid as = t\}$, и определим функтор $S \to \mathcal{M}od_K$ из этой категории в категорию K-модулей, посылая каждый объект $s \in S$ в свободный K-модуль ранга один с образующей, которую мы обозначим символом $\left[\frac{1}{s}\right]$, а каждую стрелку $a \in \operatorname{Hom}_S(s_1, s_2)$ — в гомоморфизм, переводящий базисный элемент $\left[\frac{1}{s_1}\right]$ в $a \cdot \left[\frac{1}{s_2}\right]$.

Упражнение 1.29. Покажите, что копредел получившейся диаграммы в категории $\mathcal{M}od_K$ существует и изоморфен локализации[2] KS^{-1}.

1.6.3. Функториальность (ко) пределов. Естественное преобразование f диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ в диаграмму $Y : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ — это набор стрелок $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$, по одной для каждого $\nu \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$, перестановочных со стрелками из диаграмм. Если диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и $Y : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ имеют в категории $\mathcal{C}$ пределы $L_X = \lim X_\nu$ и $L_Y = \lim Y_\mu$, то для любого функтора $\tau : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ и любого естественного преобразования $f : X \circ \tau \to Y$ существует единственный морфизм $\lim f : L_X \to L_Y$, такой что при

[1] напомню, что это означает, что $1 \in S$ и $s, t \in S \Rightarrow st \in S$

[2] т. е. модулю дробей a/s с $a \in K$, $s \in S$, где под дробью понимается класс эквивалентности пары a/s по отношению $a_1/s_1 \sim a_2/s_2$, означающему, что $\exists\, s \in S : s \cdot (a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$

всех $\mu \in \operatorname{Ob} \mathcal{M}$ коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} L_X \arrow[r, "\pi_{\tau(\mu)}"] \arrow[d, "\lim f"'] & X_{\tau(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"] \\ L_Y \arrow[r, "\pi_\mu"] & Y_\mu \end{tikzcd}, \tag{1-26}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из предела в элементы диаграммы. В самом деле, композиции $f_\mu \circ \pi_{\tau(\mu)} : L_X \to Y_\mu$ задают систему стрелок из L_X в элементы диаграммы Y, перестановочные со всеми её стрелками, что даёт единственный морфизм $L_X \to \lim Y = L_Y$, делающий все диаграммы (1-26) коммутативными. Двойственным образом, если существуют копределы $C_X = \operatorname{colim} X_\nu$ и $C_Y = \operatorname{colim} Y_\mu$, то для любого функтора $\tau : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ и любого естественного преобразования $f : X \to Y \circ \tau$ существует единственный морфизм $\operatorname{colim} f : C_X \to C_Y$, такой что коммутативны все диаграммы

$$\begin{tikzcd} X_\nu \arrow[r, "\iota_\nu"] \arrow[d, "f_\nu"'] & C_X \arrow[d, "\operatorname{colim} f"] \\ Y_{\tau(\nu)} \iota_{\tau(\nu)} \arrow[r] & C_Y \end{tikzcd},$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из вершин диаграммы в копредел. При $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ и $\tau = \mathrm{Id}$ из предл. 1.2 на стр. 18 и равенств (1-22) и (1-23) на стр. 20 получаем

Предложение 1.5

Для заданных малой категории $\mathcal{N}$ и (ко)замкнутой категории $\mathcal{C}$ копредел и предел являются, соответственно, левым и правым сопряжёнными к функтору $\mathcal{C} \to \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$, переводящему $C \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ в постоянную диаграмму $\overline{C}$. □

Замечание 1.2. Если не предполагать (ко)замкнутости, то (ко)предел будет функториален на всех диаграммах, где определён.

Определение 1.2 (перестановочность с (ко) пределами)

Скажем, что функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *перестановочен с (ко) пределами*, если для любого $L \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ и любой диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ из того, что L является (ко) пределом X в $\mathcal{C}$, вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F \circ X$ в $\mathcal{D}$.

Предложение 1.6

Если функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, то F перестановочен с копределами, а G — с пределами.

Доказательство. В силу сопряжённости F и G имеем функториально по $D \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(\operatorname{colim} X), D\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\operatorname{colim} X, G(D)\big) \simeq \\ &\qquad \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}\left(X, \overline{G(D)}\right) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{D})}\left(F \circ X, \overline{D}\right). \end{aligned}$$

Тем самым, $F(\operatorname{colim} X) \simeq \operatorname{colim}(F \circ X)$. Рассуждение про пределы аналогично. □

Следствие 1.4
Пределы коммутируют с пределами, а копределы — с пределами всякий раз, когда они существуют: если задана такая диаграмма $F : \mathcal{M} \to \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ естественных преобразований $F(\mu_1 \to \mu_2)$ диаграмм $\{F_\mu : \mathcal{N} \to \mathcal{C}\}$, что для всех $\mu \in \mathcal{M}$ и $\nu \in \mathcal{N}$ μ-тая диаграмма $F_\mu : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и диаграмма $F(\nu)$, задающая действие стрелок $F(\mu_1 \to \mu_2)_\nu$ между элементами $F_\mu(\nu)$ с фиксированным номером ν, обе имеют (ко)предел в $\mathcal{C}$, то $\lim\limits_{\mu} \lim\limits_{\nu} F_\mu \simeq \lim\limits_{\nu} \lim\limits_{\mu} F(\nu)$ и $\operatorname{colim}\limits_{\mu} \operatorname{colim}\limits_{\nu} F_\mu \simeq \operatorname{colim}\limits_{\nu} \operatorname{colim}\limits_{\mu} F(\nu)$. □

Следствие 1.5
Пусть стрелки $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$ задают естественное преобразование между диаграммами $X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{A}b$. Если существуют копределы $C_X = \operatorname{colim} X_\nu$ и $C_Y = \operatorname{colim} Y_\nu$, то существует и $\operatorname{colim} \operatorname{coker} f_\nu \simeq \operatorname{coker} \left(\operatorname{colim} f_\nu : C_X \to C_Y\right)$, а если существуют пределы $L_X = \lim X_\nu$ и $L_Y = \lim Y_\nu$, то существует и $\lim \ker \varphi_\nu \simeq \ker \left(\lim f_\nu : L_X \to L_Y\right)$.

Доказательство. Будучи (ко)уравнителем f_ν и нулевого морфизма (ко)ядро является (ко)пределом. □

Следствие 1.6
Тензорное умножение на (левый) модуль N над произвольным кольцом S с единицей перестановочно с копределами диаграмм (правых) S-модулей. В частности, для любого $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(K, L)$ имеется канонический изоморфизм абелевых групп

$$\operatorname{coker}\left(\varphi \underset{S}{\otimes} \operatorname{Id}_N : K \underset{S}{\otimes} N \to L \underset{S}{\otimes} N\right) \simeq \operatorname{coker}(\varphi) \underset{S}{\otimes} N\,.$$

Доказательство. По предл. 1.1 на стр. 16, применённому к кольцам S и $R = \mathbb{Z}$, функтор $\mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{A}b$, $X \mapsto X \underset{S}{\otimes} N$, сопряжён слева функтору $Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}b}(N, Y)$. □

§2. Абелевы категории и пучки

2.1. Линейные категории. Пусть R — произвольное кольцо с единицей. Категория $\mathcal{L}$ называется R-линейной слева, если бифунктор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(\,*\,,\,*\,)$ принимает значения в категории R-$\mathcal{M}od$ левых R-модулей и все композиции

$$\mathrm{Hom}(Y,Z)\times\mathrm{Hom}(X,Y)\to\mathrm{Hom}(X,Z)$$

билинейны над R. Например, сама категория R-$\mathcal{M}od$ R-линейна, категория векторных пространств над полем $\Bbbk$ линейна над $\Bbbk$, а категория абелевых групп $\mathbb{Z}$-линейна. Всякая R-линейная категория автоматически $\mathbb{Z}$-линейна: каждое множество стрелок $\mathrm{Hom}(X,Y)$ в R-линейной категории является аддитивной абелевой группой, и сложение морфизмов дистрибутивно композиции:

$$(\varphi_1+\varphi_2)\circ(\psi_1+\psi_2)=\varphi_1\circ\psi_1+\varphi_1\circ\psi_2+\varphi_2\circ\psi_1+\varphi_2\circ\psi_2\,.$$

Функтор между R-линейными категориями называется R-*линейным*, если он действует на стрелки R-линейными гомоморфизмами. Все функторы между R-линейными категориями далее будут по умолчанию предполагаться R-линейными.

Предостережение 2.1. Сложение морфизмов в (малой) R-линейной категории $\mathcal{L}$ не следует путать с формальным сложением в алгебре $K[\mathcal{L}]$ из прим. 1.3 на стр. 4: между множествами $\mathrm{Mor}\,\mathcal{L}$ и $K[\mathcal{L}]$ может не случиться даже биекции.

2.1.1. Прямые суммы. Из равенства $\varphi\circ 0=\varphi\circ(0+0)=\varphi\circ 0+\varphi\circ 0$ вытекает, что в R-линейной категории $\varphi\circ 0=0$ для нулевого морфизма $0\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ и любой стрелки φ с началом в Y. По той же причине $0\circ\psi=0$ для стрелок ψ с концом в X.

Упражнение 2.1. Докажите равносильность друг другу следующих трёх условий на эндоморфизм $\varepsilon\in\mathrm{Hom}(X,X)$ в R-линейной категории: а) $\varepsilon=\mathrm{Id}_X$ б) $\varphi\circ\varepsilon=\varphi$ для всех стрелок φ с началом в X в) $\varepsilon\circ\varphi=\varphi$ для всех стрелок φ с концом в X и проверьте, что мономорфность[1] (соотв. эпиморфность) произвольного морфизма означает, что он не является левым (соотв. правым) делителем нуля[2].

Лемма 2.1

В R-линейной категории каждое произведение $X\times Y$ является одновременно и копроизведением, а каждое копроизведение $X\otimes Y$ — произведением, причём между каноническими морфизмами π_X,π_Y произведения в множители и каноническими морфизмами ι_X,ι_Y множителей в копроизведение выполняются соотношения:

$$\iota_X\pi_X+\iota_Y\pi_Y=\mathrm{Id}\,,\quad \pi_X\iota_X=\mathrm{Id}_X\,,\quad \pi_Y\iota_Y=\mathrm{Id}_Y\,,\quad \pi_X\iota_Y=0\,,\quad \pi_Y\iota_X=0\,,\tag{2-1}$$

Наоборот, всякий объект $X\oplus Y$, включающийся в коммутативную диаграмму

$$X\underset{\pi_X}{\overset{\iota_X}{\rightleftarrows}}X\oplus Y\underset{\pi_Y}{\overset{\iota_Y}{\leftrightarrows}}Y$$

стрелки которой удовлетворяют соотношениям (2-1), является одновременно произведением и копроизведением объектов X и Y.

[1] см. n° 1.1.1 на стр. 5

[2] т. е. $\varphi\psi=0\Rightarrow\psi=0$ (соотв. $\psi\varphi=0\Rightarrow\psi=0$)

Доказательство. Пусть есть произведение $X \times Y$. Морфизмы $\iota_X \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id}_X \times 0 \,:\, X \to X \times Y$ и $\iota_Y \overset{\text{def}}{=} 0 \times \mathrm{Id}_Y \,:\, Y \to X \times Y$ включаются в коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \\ X & X \arrow[l, "\mathrm{Id}_X"] \arrow[u, "0"'] \arrow[ul, "\iota_X"'] \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \\ X & Y \arrow[l, "0"] \arrow[u, "\mathrm{Id}_Y"'] \arrow[ul, "\iota_Y"'] \end{tikzcd}$$

и удовлетворяют последним четырём соотношениям (2-1). Из них вытекает, что

$$\pi_X(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \pi_X \quad \text{и} \quad \pi_Y(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \pi_Y \,.$$

Но по универсальному свойству произведения стрелка $\varphi \,:\, X \times Y \to X \times Y$, для которой $\pi_X\varphi = \pi_X$ и $\pi_Y\varphi = \pi_Y$ ровно одна — это $\varphi = \mathrm{Id}_{X\times Y}$, что доказывает первое соотношение из (2-1).

Упражнение 2.2. Докажите соотношения (2-1) в случае, когда существует копроизведение $X \otimes Y$.

Из соотношений (2-1) следует, что для любой пары стрелок $\alpha \,:\, X \to Z$ и $\beta \,:\, Y \to Z$ стрелка $\gamma \,:\, X \oplus Y \to Z$ со свойствами $\gamma\iota_X = \alpha$ и $\gamma\iota_Y = \beta$ единственна и равна $\gamma = \gamma \circ \mathrm{Id}_{X\oplus Y} = \gamma(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \alpha\pi_X + \beta\pi_Y$, а для любой пары стрелок $\alpha' \,:\, W \to X$ и $\beta' \,:\, W \to Y$ стрелка $\gamma' \,:\, W \to X \oplus Y$ со свойствами $\pi_X\gamma' = \alpha'$ и $\pi_Y\gamma' = \beta'$ также единственна и равна $\gamma' = \mathrm{Id}_{X\oplus Y} \circ \gamma' = (\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y)\gamma' = \iota_X\alpha' + \iota_Y\beta'$. □

Определение 2.1 (прямые суммы)
Объект $X \oplus Y$, удовлетворяющий условиям лем. 2.1, называется *прямой суммой* объектов X и Y. Аналогично по индукции определяется прямая сумма $\mathcal{X} = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ любого конечного набора объектов и канонические морфизмы

$$\iota_\nu \,:\, X_\nu \to \mathcal{X}\,, \quad \pi_\nu \,:\, \mathcal{X} \to X_\nu\,, \quad \varepsilon_\nu \overset{\text{def}}{=} \iota_\nu\pi_\nu \,:\, \mathcal{X} \to \mathcal{X}\,,$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{gathered} \pi_\nu\iota_\mu = 0 \text{ при } \nu \neq \mu\,, \quad \pi_\nu\iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}\,, \\ \varepsilon_\nu\varepsilon_\mu = 0 \text{ при } \nu \neq \mu\,, \quad \varepsilon_\nu^2 = \varepsilon_\nu\,, \quad \sum_\nu \varepsilon_\nu = \mathrm{Id}_{\mathcal{X}}\,, \end{gathered} \tag{2-2}$$

эквивалентным тому, что $\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = X_1 \otimes X_2 \otimes \cdots \otimes X_n$.

Замечание 2.1. (бесконечные (ко)произведения) Прямой суммой $\bigoplus_\nu X_\nu$ бесконечного семейства объектов X_ν называется их копроизведение (если существует). Бесконечная прямая сумма не совпадает с произведением $\prod_\nu X_\nu$: например, в категории $\mathcal{Ab}$ произведение состоит из всевозможных семейств векторов $\{v_\nu\}$, $v_\nu \in X_\nu$, с покомпонентным сложением, а прямая сумма образована такими семействами $\{v_\nu\}$, в которых лишь конечное число элементов $v_\nu \neq 0$. В силу универсальных свойств (ко)произведений имеются функториальные по X и Y изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_\nu X_\nu, Y) \simeq \prod_\nu \mathrm{Hom}(X_\nu, Y) \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}(Y, \prod_\nu X_\nu) = \prod_\nu \mathrm{Hom}(Y, X_\nu)\,. \tag{2-3}$$

Для каждого i набор стрелок $\pi_{\nu i} : X_i \to X_\nu$, нулевых при $\nu \neq i$ и тождественной для $\nu = i$, по-прежнему задаёт морфизмы $\pi_i : \bigoplus\limits_\nu X_\nu \to X_i$, такие что $\pi_\nu \iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}$ при всех ν, и $\pi_\nu \iota_\mu = 0$ при $\mu \neq \nu$. Произведение стрелок π_ν задаёт морфизм

$$\sigma : \bigoplus_\nu X_\nu \to \prod_\nu X_\nu \,. \tag{2-4}$$

Упражнение 2.3. Убедитесь, что все ι_ν и σ инъективны, а π_ν сюрьективны.

Если все объекты X_ν являются одинаковыми копиями одного объекта X, занумерованными множеством N, мы обозначаем их прямую сумму через $N \otimes X \overset{\text{def}}{=} \coprod\limits_\nu X_\nu$, а произведение — через $X^N \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_\nu X_\nu$.

Пример 2.1 (матричный формализм)

Прямым вычислением с использованием соотношений (2-2) проверяется, что для конечных прямых сумм $\mathcal{X} = \bigoplus\limits_\nu X_\nu$ и $\mathcal{Y} = \bigoplus\limits_\mu Y_\mu$ в R-линейной категории имеется канонический изоморфизм R-модулей $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \simeq \bigoplus\limits_{\mu,\nu} \mathrm{Hom}(X_\nu, Y_\mu)$, сопоставляющий морфизму $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ матрицу $\Phi = (\varphi_{\mu\nu})$ из морфизмов $\varphi_{\mu\nu} = \pi_\mu \circ \varphi \circ \iota_\nu : X_\nu \to Y_\mu$. Из матрицы Φ морфизм $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ восстанавливается по формуле $\varphi = \sum\limits_{\mu\nu} \iota_\mu \circ \varphi_{\mu\nu} \circ \pi_\nu$. При этом матрица композиции $\varphi \circ \psi$ равна произведению матриц $\Phi \cdot \Psi$.

Пример 2.2 (прямая сумма морфизмов)

Во всякой категории с (ко)произведениями любой набор морфизмов $\gamma_\nu : X_\nu \to Y_\nu$ канонически задаёт морфизм произведений $\prod X_\alpha \to \prod Y_\alpha$ и морфизм копроизведений $\coprod X_\alpha \to \coprod Y_\alpha$, которые отвечают, соответственно, наборам стрелок

$$\gamma_\nu \circ \pi_\nu : \prod X_\alpha \to Y_\nu \quad \text{и} \quad \iota_\nu \circ \gamma_\nu : X_\nu \to \coprod Y_\nu \,,$$

где $\pi_\nu : \prod X_\alpha \to X_\nu$ и $\iota_\nu : Y_\nu \to \coprod Y_\alpha$ — канонические морфизмы произведения в сомножители и сомножителей в копроизведение. Для конечных прямых сумм в R-линейных категориях эти два морфизма совпадают и называются *прямой суммой* морфизмов γ_ν. Прямая сумма морфизмов обозначается $\oplus\gamma_\nu$. В терминах прим. 2.1 она изображается диагональной матрицей со стрелками γ_ν по диагонали и нулями в остальных местах.

Замечание 2.2. (каноничность сложения морфизмов) Если в R-линейной категории $\mathcal{L}$ есть прямые суммы $X \oplus X$ и $Y \oplus Y$, то сложение в группе $\mathrm{Hom}(X, Y)$ канонически определяется композициями в категории $\mathcal{L}$, поскольку для любых стрелок $\varphi, \psi : X \to Y$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi+\psi"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & Y \\ X \oplus X \arrow[r, "\varphi\times\psi"'] & Y \oplus Y \arrow[u, "\nabla_Y"'] \end{tikzcd} \tag{2-5}$$

в которой диагональный морфизм $\Delta_X \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id}\times\mathrm{Id} : X \to X\times X$, кодиагональный морфизм $\nabla_Y \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} : Y \otimes Y \to Y$ и морфизм $\varphi \times \psi : X \times X \to Y \times Y$ не связаны с аддитивной структурой и имеются в в любой категории $\mathcal{L}$, где есть прозведения $X\times X$ и $Y\times Y = Y\otimes Y$.

Определение 2.2 (нулевой объект и нулевые морфизмы)
Объект $0 \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ категории $\mathcal{C}$ называется *нулевым*, если он одновременно начальный и конечный. Такой объект единствен с точностью до единственного изоморфизма (если существует). Морфизм $\varphi : X \to Y$ в категории с нулевым объектом называется *нулевым*, если он распадается в композицию $X \to 0 \to Y$. В R-линейной категории такой морфизм является нулевым элементом аддитивной группы $\operatorname{Hom}(X, Y)$.

2.1.2. Ядра и коядра. В категории $\mathcal{C}$ с нулевым объектом уравнитель стрелки $\varphi : X \to Y$ и нулевого морфизма называется *ядром* φ и обозначается $\ker \varphi$. Если он существует, то вместе с такой универсальной стрелкой $\varkappa \ker \varphi \to X$, что $\varphi\varkappa = 0$ и

$$\forall \psi \quad \varphi\psi = 0 \;\Rightarrow\; \exists!\, \psi' : \psi = \varkappa\psi' ,$$

которую мы тоже будем называть *ядром*, и единствен с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с $\varkappa$. В $\mathbb{Z}$-линейной категории ядро представляет предпучок $Z \mapsto \ker \varphi_*^Z$, сопоставляющий объекту Z ядро гомоморфизма абелевых групп $\varphi_*^Z : \operatorname{Hom}(Z, X) \to \operatorname{Hom}(Z, Y)$, задающего действие над этим объектом естественного преобразования $\varphi_* : h_X \to h_Y$ левого умножения на φ.

Коуравнитель φ с нулевым морфизмом называется *коядром*, обозначается $\operatorname{coker} \varphi$. Если он существует, то с такой стрелкой $\varsigma : Y \to \operatorname{coker} \varphi$, что $\varsigma\varphi = 0$ и

$$\forall \psi \quad \psi\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \exists!\, \psi' : \psi = \psi'\varsigma ,$$

которая также называется *коядром*, и единствен с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с ς. В $\mathbb{Z}$-линейной категории коядро копредставляет функтор $Z \mapsto \ker \varphi_Z^*$, где гомоморфизм $\varphi_Z^* : \operatorname{Hom}(Y, Z) \to \operatorname{Hom}(X, Z)$ задаёт действие над Z естественного преобразования $\varphi^* : h^Y \to h^X$ правого умножения на φ.

Упражнение 2.4. Убедитесь, что в любой $\mathbb{Z}$-линейной категории:
а) $\varphi = 0 \iff \varkappa = \mathrm{Id}_X \iff \varsigma = \mathrm{Id}_Y$
б) стрелка $\varkappa : \ker \varphi \to X$ мономорфна, а стрелка $\varsigma : Y \to \operatorname{coker} \varphi$ — эпиморфна
в) φ мономорфен $\iff \ker \varphi = 0$; φ эпиморфен $\iff \operatorname{coker} \varphi = 0$.

Ядро канонической стрелки $\varsigma : Y \to \operatorname{coker} \varphi$ называется *образом* морфизма φ и обозначается $\operatorname{im} \varphi \overset{\text{def}}{=} \ker \varsigma$. Коядро канонической стрелки $\varkappa : \ker \varphi \to X$ называется *кообразом*[1] морфизма φ и обозначается $\operatorname{coim} \varphi \overset{\text{def}}{=} \operatorname{coker} \varkappa$. Если морфизм $\varphi : X \to Y$ имеет ядро, коядро, образ и кообраз, то в силу универсальных свойств двух последних

$$\operatorname{Hom}(\operatorname{coim} \varphi, \operatorname{im} \varphi) \simeq \{\alpha : \operatorname{coim} \varphi \to Y \mid \varsigma\alpha = 0\} \simeq \{\beta : X \to Y \mid \varsigma\beta = 0 \text{ и } \beta\varkappa = 0\} .$$

Стрелка $\overline{\varphi} : \operatorname{coim} \varphi \to \operatorname{im} \varphi$, переводимая этими изоморфизмами в исходную стрелку $\varphi : X \to Y$, это единственный морфизм, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{coker} \varphi & Y \arrow[l, "\varsigma"'] & \operatorname{im} \varphi \arrow[l, "\varkappa'"'] \\
\ker \varphi \arrow[r, "\varkappa"] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varsigma'"] & \operatorname{coim} \varphi \arrow[u, "\overline{\varphi}"']
\end{tikzcd} \tag{2-6}$$

в которой $\varkappa, \varkappa'$ — канонические морфизмы из ядер, а ς, ς' — в коядра.

[1] в категории модулей кообраз $\varphi : X \to Y$ это фактор по ядру: $\operatorname{coim} \varphi = X / \ker \varphi$

Определение 2.3
Диаграмма (2-6) называется *каноническим разложением* морфизма φ.

Пример 2.3 (фильтрованные абелевы группы)
Рассмотрим категорию $F\mathcal{Ab}$, объектами которой являются абелевы группы

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\,,$$

профильтрованные возрастающими подгруппами $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, а морфизмами — такие гомоморфизмы абелевых групп $\varphi : A \to B$, что $\varphi(A_n) \subset B_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Эта категория аддитивна, и у каждого морфизма $\varphi : A \to B$ есть ядро и коядро, как группы совпадающие с ядром и коядром в $\mathcal{Ab}$, и имеющие фильтрации, индуцированные с A и B : $\ker\varphi = \bigcup A'_n$, где $A'_n = A_n \cap \ker\varphi$, и $\operatorname{coker}\varphi = \bigcup B'_n$, где B'_n — образ подгруппы $B_n \subset B$ в факторе $B\,/\,\varphi(A)$. Обозначим через $A[1]$ фильтрованную группу с компонентами $A[1]_p = A_{p+1}$. Отображение $s : A \to A[1]$, тождественно действующее на элементы группы, является морфизмом фильтрованных групп и имеет нулевые ядро и коядро, т. е. одновеменно инъективно и сюрьективно, но не обратимо, если $A \neq 0$. В каноническом разложении (2-6) морфизма s стрелка $\overline{s} = s$ тоже не изоморфизм:

$$\begin{tikzcd}
0 & A[1] \arrow[l] & A[1] \arrow[l, "\mathrm{Id}_{A[1]}"'] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "s"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_A"] & A \arrow[u, "s"'] .
\end{tikzcd}$$

2.2. Абелевы категории. Категория $\mathcal{A}$ называется *аддитивной*, если она $\mathbb{Z}$-линейна, и в ней имеются нулевой объект и прямые суммы любых двух[1] объектов. Аддитивная категория $\mathcal{A}$ называется *абелевой*, если любая стрелка φ в ней имеет ядро и коядро, причём канонический морфизм $\overline{\varphi}$ в её разложении (2-6) является изоморфизмом, т. е. образ любого морфизма канонически изоморфен его кообразу[2]. Отождествляя кообраз с образом при помощи этого изоморфизма, мы получаем для каждой стрелки $\varphi : X \to Y$ *пятичленное разложение*

$$\begin{tikzcd}
\ker\varphi \arrow[r, hook, "\varkappa"] & X \arrow[r, two heads, "\varsigma'"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & \operatorname{im}\varphi \arrow[r, hook, "\varkappa'"] & Y \arrow[r, two heads, "\varsigma"] & \operatorname{coker}\varphi\,,
\end{tikzcd} \tag{2-7}$$

где $\varkappa'$ мономорфен, ς' эпиморфен, $\varsigma'\varkappa = \varphi$ и $\operatorname{im}\varphi = \ker\varsigma = \operatorname{coker}\varkappa$.

Упражнение 2.5. Покажите, что во всякой абелевой категории $\mathcal{A}$:

а) ядро, коядро и образ являются функторами из категории $\mathcal{Ar}(\mathcal{A})$ диаграмм вида[3] $\bullet \to \bullet$ в категорию $\mathcal{A}$

б) пятичленное разложение (2-7) является функтором из $\mathcal{Ar}(\mathcal{A})$ в категорию диаграмм вида $\bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet$

[1] а значит — и любого конечного множества

[2] в начальном курсе алгебры этот факт обычно называют «теоремой о строении гомоморфизма» и доказывают для гомоморфизмов групп, колец и модулей над кольцами

[3] т. е. категории функторов $\mathcal{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{A})$, где категория $\mathcal{N} = \{\bullet \to \bullet\}$ имеет 2 объекта и одну нетождественную стрелку

в) φ обратим $\iff \ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$

г) каждый мономорфизм является ядром своего коядра, а каждый эпиморфизм — коядром своего ядра.

Поскольку (ко)ядро разности $\alpha-\beta$ является (ко)уравнителем стрелок α и β, в абелевой категории существуют (ко)пределы всех конечных диаграмм[1], в том числе послойные (ко)произведения[2].

Упражнение 2.6. Убедитесь, что $\lim\left(A \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} B\right) = \ker\left(A \oplus B \xrightarrow{\alpha\pi_A-\beta\pi_B} D\right)$, а $\operatorname{colim}\left(X \xleftarrow{\xi} C \xrightarrow{\eta} Y\right) = \operatorname{coker}\left(C \xrightarrow{\iota_X\xi-\iota_Y\eta} X \oplus Y\right)$, и покажите, что в декартовом и кодекартовом квадратах

$$\begin{tikzcd} A \times_D B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\beta'"] \\ B \arrow[r, "\alpha'"] & D \end{tikzcd} \quad\text{и}\quad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\eta"'] & X \arrow[d, "\eta'"] \\ Y \arrow[r, "\xi'"] & X \otimes_C Y \end{tikzcd} \tag{2-8}$$

β изоморфно отображает $\ker\alpha$ на $\ker\alpha'$ и эпиморфность β' влечёт эпиморфность β, а ξ' изоморфно отображает $\operatorname{coker}\eta$ на $\operatorname{coker}\eta'$ и мономорфность ξ влечёт мономорфность ξ'.

Пример 2.4

Для любого кольца R категория R-$\mathcal{M}od$ левых R-модулей, категория R-$\mathcal{FM}od$ свободных левых R-модулей и категория R-mod конечно представимых[3] левых R-модулей абелевы: ядра, коядра и образы в них суть обычные ядра, коядра и образы R-линейных отображений, а совпадение образа и кообраза проверяется в теореме о строении R-линейного гомоморфизма, утверждающей, что образ канонически изоморфен фактору по ядру. В частности, абелевы категория всех абелевых групп и категория конечно порождённых абелевых групп. Категория фильтрованных абелевых групп из прим. 2.3 аддитивна и имеет (ко)ядра всех стрелок, однако не является абелевой, т. к. в ней есть стрелки φ с $\operatorname{im}\varphi \neq \operatorname{coim}\varphi$.

Упражнение 2.7. Убедитесь, что в категории топологических абелевых групп и их не прерывных гомоморфизмов тоже есть ядра, коядра и прямые суммы, но она не является абелевой.

Категории множеств, топологических пространств, групп и коммутативных колец не являются даже $\mathbb{Z}$-линейными, т. к. в них $X \times Y \neq X \otimes Y$.

Замечание 2.3. (короткий список аксиом абелевой категории) Данное выше определение абелевой категории не является логически минимальным и выбрано нами постольку, поскольку все абелевы категории, с которыми мы будем иметь дело в этом курсе, изначально линейны. Общепринятое в теории категорий «минималистское» определение таково: (произвольная) категория $\mathcal{C}$ называется *абелевой*, если в ней

[1] см. зам. 1.1. на стр. 24

[2] т. е. декартовы и кодекартовы квадраты, см. диаграммы (1-24) и (1-25) на стр. 22–23

[3] модуль называется *конечно представимым*, если он изоморфен фактору свободного модуля конечного ранга по конечно порождённому подмодулю

(A0) есть нулевой объект[1] 0

(A1) у каждой пары объектов есть произведение и копроизведение

(A2) у каждого морфизма есть ядро и коядро

(A3) каждый мономорфизм[2] является ядром некоторой стрелки, а каждый эпимирфизм — коядром некоторой стрелки

Аксиомы самодвойственны: их выполнение в категории $\mathcal{C}$ равносильно их выполнению в $\mathcal{C}^{\text{opp}}$. Вывод нашего определения из этих аксиом намечен в следующем ниже упражнении и подробно изложен во второй главе книги: *P. Freyd*. «Abelian Categories».

Упражнение 2.8* (не трудное, но трудоёмкое). Пользуясь только предыдущими аксиомами (A0) – (A3), покажите, что в категории $\mathcal{C}$

а) сопоставления стрелке её ядра и коядра корректно задают взаимно обратные биекции между множествами подобъектов[3] и фактор объектов каждого объекта

б) любая одновременно мономорфная и эпиморфная стрелка обратима

в) у каждых двух подъобъектов любого объекта есть максимальная нижняя грань в смысле порядка из упр. 1.2 на стр. 5 (она называется *пересечением* этих двух подобъектов)

г) любые две стрелки имеют уравнитель и коуравнитель (в частности в $\mathcal{C}$ есть все послойные (ко)произведения)

д) образ и кообраз любого морфизма канонически изоморфны

е) для каждой пары объектов X, Y канонический морфизм $X \otimes Y \to X \times Y$, задаваемый стрелками $\mathrm{Id}_X \times 0 : X \to X \times Y \leftarrow Y : 0 \times \mathrm{Id}_Y$, обратим, и обратный морфизм задаёт посредством диаграммы (2-5) на стр. 30 структуру абелевой группы на $\mathrm{Hom}(X, Y)$, что в свою очередь вводит $\mathbb{Z}$-линейную структуру на категории $\mathcal{C}$.

2.2.1. Точные последовательности. Пара стрелок $\cdots \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{\psi} \cdots$ называется *точной*, если $\ker \psi = \operatorname{im} \varphi$. Более длинная цепочка стрелок называется *точной*, если каждая пара её последовательных стрелок точна. Например, точность последовательности $0 \to X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ означает, что $\varphi = \ker \psi$, а точность последовательности $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \to 0$ означает, что $\psi = \operatorname{coker} \varphi$. Точные последовательности вида

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0 \tag{2-9}$$

называются *точными тройками*. Точность тройки (2-9) равносильна равенствам $\alpha = \ker \beta$ и $\beta = \operatorname{coker} \alpha$. В этой ситуации C называется *фактором* A по B и обозначается A/B. Точные тройки вида $0 \to A \xrightarrow{\iota_A} A \oplus B \xrightarrow{\pi_B} B \to 0$ называются *расщепимыми*.

Упражнение 2.9. Покажите, что для расщепимости точной тройки (2-9) необходимо и достаточно существования такого морфизма $\beta' : B \to A$, что $\beta'\alpha = \mathrm{Id}_A$ или такого морфизма $\alpha' : C \to B$, что $\beta\alpha' = \mathrm{Id}_C$, и приведите пример нерасщепляющейся точной тройки в категории конечных абелевых групп.

[1] см. опр. 2.2 на стр. 31
[2] см. n° 1.1.1 на стр. 5
[3] см. опр. 1.1 на стр. 5

2.2.2. Точные функторы. Функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (соотв. $F : \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{B}$) между абелевыми категориями называется *точным слева*, если он переводит ядра (соотв. коядра) в ядра или, что то же самое, — точные последовательности вида $0 \to A \to B \to C$ (соотв. $A \to B \to C \to 0$) в точные последовательности $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ (соотв. в $0 \to F(C) \to F(B) \to F(A)$). Двойственным образом, F называется *точным справа*, если он переводит коядра (соотв. ядра) в коядра, или — точные последовательности вида $A \to B \to C \to 0$ (соотв. $0 \to A \to B \to C$) в точные последовательности $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ (соотв. в $F(C) \to F(B) \to F(A) \to 0$). Функтор называется *точным*, если он точен и справа и слева.

Упражнение 2.10. Убедитесь, что для точности функтора необходимо и достаточно, чтобы он переводил точные тройки в точные тройки, и в этом случае он сохраняет точность любых последовательностей.

Пример 2.5 (представимые функторы)
Из определения ядра тавтологически следует, что всякий копредставимый функтор $h^A : X \mapsto \mathrm{Hom}(A, X)$ (соотв. представимый функтор $h_A : X \mapsto \mathrm{Hom}(X, A)$) переводит ядра (соотв. коядра) в ядра. Тем самым, все (ко)представимые функторы точны слева.

Пример 2.6 (сопряжённые функторы)
Так как (ко)ядро является (ко)пределом диаграммы, по предл. 1.6 на стр. 26 правые сопряжённые функторы точны слева, а левые — справа. В частности, пределы точны слева, а копределы — справа, так что сл. 1.5 на стр. 27 справедливо для диаграмм в любой абелевой категории[1].

Пример 2.7 (тензорное умножение)
По сл. 1.6 для любых колец R и S с единицами функтор $\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{M}od\text{-}S$, $X \mapsto X \bigotimes_R N$, тензорного умножения на любой R-S-бимодуль N точен справа.

Упражнение 2.11. В категории абелевых групп приведите примеры, показывающие, что (ко)представимый функтор может быть не точен справа, а тензорное умножение на фиксированную абелеву группу N может быть не точно слева.

Определение 2.4
Объект Q абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *проективным* (соотв. *инъективным*), если функтор $h^Q : X \mapsto \mathrm{Hom}(Q, X)$ (соотв. функтор $h_Q : X \mapsto \mathrm{Hom}(X, Q)$) точен справа.

Упражнение 2.12. Покажите, что прямая сумма (даже бесконечная, коли существует) проективных объектов проективна, а прямое произведение (даже бесконечное) инъективных объектов инъективно.

Лемма 2.2
Проективность объекта P абелевой категории $\mathcal{A}$ равносильна каждому из свойств:

(P1) любая стрелка $\varphi : P \to X$ поднимается вдоль любого эпиморфизма[2] $\pi : Y \twoheadrightarrow X$

[1] причём для конечных диаграмм существования (ко)пределов можно не требовать — они существуют автоматически

[2] т. е. $\exists\, \psi : P \to Y : \varphi = \pi\psi$

(P2) любой эпиморфизм $\pi : Z \twoheadrightarrow P$ расщепляется: существует такой изоморфизм $\gamma : Z \xrightarrow{\sim} \ker \pi \oplus P$, что $\pi = \pi_P \gamma$.

Инъективность объекта I абелевой категории $\mathcal{A}$ равносильна каждому из свойств:

(I1) любая стрелка $\varphi : X \to I$ продолжается на любое расширение[1] $\iota : X \hookrightarrow Y$

(I2) любое вложение $\iota : I \hookrightarrow Z$ расщепляется: $\iota = \gamma \iota_I$ для некоторого изоморфизма $\gamma : I \oplus \operatorname{coker} \iota \xrightarrow{\sim} Z$.

Доказательство. Условие (P1) означает эпиморфность морфизмов

$$h^P(\pi) = \pi_* : h^P(Y) \to h^P(X)$$

для всех сюрьекций $\pi : Y \twoheadrightarrow X$, в чём и заключается точность справа функтора h^P. Из (P1) следует, что тождественный морфизм Id_P можно поднять вдоль любого эпиморфизма $\pi : Z \twoheadrightarrow P$ до такой стрелки $\iota : P \to Z$, что $\pi\iota = \mathrm{Id}_P$, а это по упр. 2.9 и означает расщепимость точной тройки $0 \to \ker \pi \hookrightarrow Z \twoheadrightarrow P \to 0$. Наоборот, если любой эпиморфизм на P расщепляется, то достроив пару стрелок $Y \twoheadrightarrow X \leftarrow P$ до декартова квадрата

$$\begin{tikzcd} Y \times_X P \arrow[r, two heads, "\pi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & P \arrow[l, bend left, dotted, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, two heads, "\pi"'] & X \end{tikzcd}$$

в котором морфизм π' сюрьективен, коль скоро сюрьективен[2] π, мы можем поднять стрелку φ стрелкой $\psi = \varphi'\iota$, где $\iota : P \hookrightarrow Y \times_X P$ расщепляет π'. Эквивалентность условий (I1), (I2) инъективности объекта I доказывается обращением стрелок. □

Упражнение 2.13. Проведите эти рассуждения.

2.2.3. Проективные и инъективные модули. В категории $\mathcal{M}od$-R правых модулей над произвольным кольцом R с единицей свободный модуль R ранга 1 проективен, поскольку имеется естественный изоморфизм функторов $h^R \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}$, который действует над модулем M преобразованием $\mathrm{Hom}(R, M) \xrightarrow{\sim} M$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$. По упр. 2.12 все свободные модули $E \otimes R$ тоже проективны, а по лем. 2.2 любой проективный модуль P изоморфен прямому слагаемому свободного модуля: каждый модуль M является образом эпиморфизма $S(M) \otimes R \twoheadrightarrow M$, где $S(M)$ — множество векторов модуля M, и для проективного M этот эпиморфизм расщепляется.

Упражнение 2.14. Убедитесь в обратном: если модуль $P \oplus Q = E \otimes R$ свободен, то и P и Q проективны.

Инъективность модуля I означает возможность в нём деления на любые необратимые элементы кольца:

[1] т. е. $\exists\, \psi : Y \to I : \psi\iota = \varphi$

[2] см. упр. 2.6 на стр. 33

Лемма 2.3
Правый R-модуль I инъективен , если и только если для любого правого идеала $\mathfrak{q} \subset R$ и любого R-линейного справа гомоморфизма $q : \mathfrak{q} \to I$ имеется такой вектор $e_q \in I$, что $q(x) = e_q \cdot x$ для всех $x \in \mathfrak{q}$, т. е. в I имеется частное $q(x)/x = e_q$.

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ вытекает из лем. 2.2: продолжим q до R-линейного справа гомоморфизма $q' : R \to I$ и возьмём $e_q = q'(1)$. Для доказательства обратной импликации рассмотрим произвольное расширение модулей $N \subset M$ и продолжим любой R-линейный гомоморфизм $\varphi : N \to M$ на M при помощи леммы Цорна: подмодули $N \subseteq N' \subseteq M$, на которые φ продолжается, образуют чум по включению, в котором каждая линейно упорядоченная цепочка мажорируется своим объединением. Поэтому существует максимальный по включению подмодуль $L \supseteq N$ с таким гомоморфизмом $\psi : L \to I$, что $\psi|_N = \varphi$. Если имеется вектор $m \in M \smallsetminus L$, то подмодуль L', порождённый L и m, строго больше L, и для завершения доказательства достаточно продолжить ψ на $L' \simeq L \oplus R/\ker \pi_m$, где $\pi_m : L \oplus R \twoheadrightarrow L'$, $(\ell, x) \mapsto \ell + mx$. Ядро

$$\ker \pi_m = \{(\ell, x) \mid mx = -\ell \in L\}$$

изоморфно правому идеалу $\mathfrak{k} = \{x \in R \,|mx \in L\}$ и R-линейно отображается в I по правилу $x \mapsto \psi(mx)$. Берём вектор $e = \psi(mx)/x \in I$, такой что $\psi(mx) = e \cdot x$ для всех $x \in \mathfrak{k}$, и задаём продолжение $\psi' : L' \to I$ правилом $\psi'(\ell + mx) = \psi(\ell) + e \cdot x$. □

Упражнение 2.15. Убедитесь в корректности последнего правила и проверьте, что $\mathbb{Z}$-модули $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективны, причём второй замечателен тем, что для любого $\mathbb{Z}$-модуля A и любого элемента $a \in A$ есть гомоморфизм $\varphi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\varphi(a) \neq 0$.

2.2.4. Порождающие объекты. Объект G абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *генератором*[1] (соотв. *когенератором*) категории $\mathcal{A}$, если функтор $h^G : X \mapsto \operatorname{Hom}(G, X)$ (соотв. функтор $h_G : X \mapsto \operatorname{Hom}(X, G)$) строг, т. е. переводит разные стрелки в разные[2]. Например, свободный модуль R ранга 1 порождает категорию $\mathcal{M}od$-R, ибо функтор $h^R \simeq \mathrm{Id}$ не только строг, но и вполне строг.

Упражнение 2.16. Покажите, что абелева категория с генератором умеренно мощна[3].

Для произвольных объектов G, X рассмотрим прямую сумму

$$\operatorname{Hom}(G, X) \otimes G \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\varphi : G \to X} \varphi \otimes G$$

одинаковых копий G, занумерованных стрелками $\varphi \in \operatorname{Hom}(G, X)$, и отобразим слагаемое $\varphi \otimes G$ в X при помощи стрелки $\varphi : G \to X$. Получим морфизм

$$c : \operatorname{Hom}(G, X) \otimes G \to X \,, \tag{2-10}$$

который называется *канонической свёрткой*. Двойственным образом, рассмотрим для объектов Y, C прямое произведение

$$C^{\operatorname{Hom}(Y,C)} \overset{\text{def}}{=} \prod_{\varphi : Y \to C} C^{\varphi}$$

[1] (ко)генераторы также называют (*ко*)*порождающими объектами* категории $\mathcal{A}$
[2] или, эквивалентно, ненулевые — в ненулевые
[3] см. опр. 1.1 на стр. 5

одинаковых копий C, занумерованных стрелками $\varphi : Y \to C$, и отобразим Y в сомножитель C^{φ} при помощи стрелки $\varphi : Y \to C$. Получим морфизм

$$c' : Y \to C^{\mathrm{Hom}(Y,C)} \tag{2-11}$$

который называется *канонической косвёрткой*.

Лемма 2.4
Кополная абелева категория $\mathcal{A}$ тогда и только тогда порождается объектом G, когда для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ каноническая свёртка (2-10) эпиморфна. Полная абелева категория тогда и только тогда копорождается объектом C, когда для любого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ каноническая косвёртка (2-11) мономорфна.

Доказательство. Докажем второе. Применим к морфизму (2-11) сохраняющий ядра функтор h^X с произвольным $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Получим точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, \ker c') \to \mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{c'_*} \mathrm{Hom}(X, C)^{\mathrm{Hom}(Y,C)}$$

морфизм c'_* которой переводит стрелку $\varphi : X \to Y$ в график отображения

$$\varphi^* : \mathrm{Hom}(Y, C) \to \mathrm{Hom}(X, C), \quad \psi \mapsto \psi\varphi .$$

Тем самым, инъективность c'_* равносильна инъективности действия функтора

$$h_C : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}\left(h_C(Y), h_C(X)\right) .$$

Если $\ker c' = 0$, отображение c'_* инъективно для всех X, Y, т. е. функтор h_C строг. Наоборот, если h_C строг, то $\mathrm{Hom}(X, \ker c') = 0$ для всех X, и беря $X = \ker c'$, заключаем, что $\ker c' = 0$. □

Упражнение 2.17. Докажите первую часть лем. 2.4 и покажите, что любой модуль является коядром гомоморфизма свободных модулей.

Следствие 2.1
Инъективная абелева группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ копорождает категорию абелевых групп.

Доказательство. Косвёртка $c' : A \to \left(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$ инъективна по упр. 2.15. □

Упражнение 2.18. Убедитесь, что абелева группа $I_R = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ со структурой правого R-модуля, задаваемой левым действием R на себе (соотв. со структурой левого R-модуля, задаваемой правым действием R на себе), является инъективным когенератором категории $\mathcal{M}od$-R (соотв. категории R-$\mathcal{M}od$).

2.2.5. Компактные объекты. Объект K козамкнутой абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *компактным*, если функтор $h^K : Z \mapsto \mathrm{Hom}(K, Z)$ коммутирует с бесконечными копределами. Поскольку любой копредел является коуравнителем пары стрелок между прямыми суммами[1], компактность равносильна тому, что h^K переводит прямые суммы в прямые суммы или, эквивалентно, что образ вложения (2-4)

$$\sigma_* : \mathrm{Hom}(K, \bigoplus_{\nu} X_{\nu}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(K, \prod_{\nu} X_{\nu}) \simeq \prod_{\nu} \mathrm{Hom}(K, X_{\nu})$$

[1]см. доказательство предл. 1.4 на стр. 23

лежит в $\bigoplus\limits_{\nu} \mathrm{Hom}(K, X_\nu) \subset \prod\limits_{\nu} \mathrm{Hom}(K, X_\nu)$. Например, проективный генератор R категории R-модулей компактен.

Упражнение 2.19. Покажите, что компактность проективного модуля равносильна его конечной порождённости.

2.2.6. Модули над кольцом. Выше мы уже видели, что абелева категория $\mathcal{M}od$-R правых модулей[1] над произвольным кольцом R с единицей полна и кополна, обладает инъективным когенератором и компактным проективным генератором. Последнее свойство выделяет категории модулей среди прочих абелевых категорий.

Теорема 2.1
Козамкнутая абелева категория $\mathcal{A}$ с компактным проективным генератором P точно эквивалентна[2] категории $\mathcal{M}od$-R правых R-модулей над кольцом $R = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P)$.

Доказательство. Функтор $h^P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$ принимает значение в $\mathcal{M}od$-R: правое действие $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, P)$ на абелевой группе $h^P(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, X)$ задаётся правым умножением стрелок на f. В силу проективности P функтор h^P точен. Проверим, что он по-существу сюрьективен и вполне строг[3]. Из лем. 2.4 вытекает, что любой объект $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ представляется в виде коядра морфизма между прямыми суммами подходящих множеств I, J одинаковых копий генератора P:

$$I \otimes P \xrightarrow{\varphi} J \otimes P \twoheadrightarrow X \to 0\,. \tag{2-12}$$

Морфизм φ задаётся некоторой матрицей Φ формата $I \times J$ с элементами

$$\varphi_{ij} \in \mathrm{Hom}(j \otimes P, i \otimes P) \simeq \mathrm{Hom}(P, P) = R\,,$$

имеющей при каждом j лишь конечное число ненулевых φ_{ij}. Применяя к (2-12) функтор h^P и пользуясь компактностью P получаем для $h^P(X)$ представление в виде коядра морфизма свободных R-модулей

$$I \otimes R \xrightarrow{\varphi_*} J \otimes R \twoheadrightarrow h^P(X) \to 0\,, \tag{2-13}$$

который задаётся правым умножением строки $(x_i) \in I \otimes R$ на матрицу Φ. Так как каждый R-модуль является коядром гомоморфизма свободных R-модулей, функтор h^P по-существу сюрьективен. Для любого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ группа $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ является ядром стрелки $h_Y(\varphi)$, получающейся применением $h_Y : Z \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(Z, Y)$ к диаграмме (2-12), а группа $\mathrm{Hom}_R\left(h^P(X), h^P(Y)\right)$ является коядром стрелки $h_{h^P(Y)}(\varphi_*)$, получающейся применением $h_{h^P(Y)} : M \mapsto \mathrm{Hom}_R(Z, h^P(Y))$ к диаграмме (2-12). Эти стрелки совпадают друг с другом, представляя собою гомоморфизм $h^P(Y)^J \to h^P(Y)^I$ прямых произведений одинаковых копий группы $h^P(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Y)$, задаваемый транспонированной матрицей Φ^t. Тем самым, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_R\left(h^P(X), h^P(Y)\right)$. □

[1] равно как и категория R-$\mathcal{M}od$ левых R-модулей
[2] т. е. имеется эквивалентность категорий, переводящая точные тройки в точные тройки
[3] см. лем. 1.1 на стр. 12

Теорема 2.2 (эквивалентность Мориты)
Следующие три свойства колец R и S с единицами эквивалентны друг другу:

(1) категории $\mathcal{M}od$-R и $\mathcal{M}od$-S точно эквивалентны

(2) $R \simeq \mathrm{Hom}_S(P,P)$ для некоторого конечно порождённого проективного S-модуля P, являющегося генератором категории $\mathcal{M}od$-S

(3) существует такой R-S бимодуль T, что тензорное умножение $\mathcal{M}od$-$R \to \mathcal{M}od$-S, $M \mapsto M \underset{R}{\otimes} T$, является точной эквивалентностью категорий.

Доказательство. Если выполнено (1), то по теор. 2.1, применённой к $\mathcal{A} = \mathcal{M}od$-$S$, в $\mathcal{M}od$-S имеется компактный проективный генератор P с $\mathrm{Hom}_S(P,P) = R$, что даёт (2), поскольку компактный проективный модуль конечно порождён[1]. Если выполнено (2), положим[2] $T \stackrel{\text{def}}{=} P$ и покажем, что функторы

$$\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{M}od\text{-}S,\ M \mapsto M \underset{R}{\otimes} P\,, \quad \text{и} \quad \mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{M}od\text{-}R\,,\ N \mapsto \mathrm{Hom}(P,N)\,,$$

квазиобратны друг другу. Так как эти функторы сопряжены[3]:

$$\mathrm{Hom}_S\big(M \underset{R}{\otimes} P, N\big) \simeq \mathrm{Hom}_R\big(N, \mathrm{Hom}_S(P,N)\big)\,,$$

имеется естественное преобразование[4] $\mathrm{Hom}_S(P,N) \underset{R}{\otimes} P \xrightarrow{\sim} N$, $\varphi \underset{R}{\otimes} p \mapsto \varphi(p)$, и естественное преобразование $M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(P, M \underset{R}{\otimes} P)$, переводящее $m \in M$ в семейство гомоморфизмов $\varphi_m : P \to M \underset{R}{\otimes} P$, $p \mapsto m \underset{R}{\otimes} p$. Если P является проективным генератором, то оба эти преобразования — изоморфизмы. □

Упражнение 2.20. Убедитесь в этом.

Определение 2.5
Кольца R и S, удовлетворяющие условиям теор. 2.2, называются *Морита-эквивалентными*, а функторы $M \mapsto M \underset{R}{\otimes} P$ и $N \mapsto \mathrm{Hom}(P,N)$ называются *эквивалентностями Мориты*.

Упражнение 2.21. Покажите, что категория R-модулей точно эквивалентна категории модулей над кольцом матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ любого конечного размера.

Теорема 2.3 (простая теорема Митчела о вложении)
Если абелева категория $\mathcal{B}$ полна и имеет проективный генератор[5], то любая её малая полная точная[6] абелева подкатегория $\mathcal{A}$ допускает точное вполне строгое вложение в категорию правых модулей над некоторым кольцом с единицей.

---

[1] см. упр. 2.19 на стр. 39
[2] отметим, что на правом S-модуле P имеется каноническая структура левого модуля над кольцом $R = \mathrm{End}_S(P)$
[3] см. предл. 1.1 на стр. 16
[4] см. формулу (1-14) на стр. 15
[5] не обязательно компактный
[6] т. е. такая, что точные тройки из $\mathcal{A}$ точны и в $\mathcal{B}$

Доказательство. Обозначим через P проективный генератор категории $\mathcal{B}$, а через J — произведение множеств $\mathrm{Hom}(P, X)$ по всем $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Тогда $Q = J \otimes P$ тоже является генератором $\mathcal{B}$, и для каждого $X \in \mathcal{A}$ существует сюрьективный морфизм $\psi_X : Q \twoheadrightarrow X$. Положим $R = \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(Q)$ и как в доказательстве теор. 2.1 проверим, что точный строгий[1] функтор $h^Q : \mathcal{A} \to \mathcal{M}od\text{-}R$, $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Q, X)$, вполне строг. Для этого представим произвольный $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ как коядро гомоморфизма $\varphi = \psi_{\ker \psi_X}$:

$$Q \xrightarrow{\varphi} Q \xrightarrow{\psi_X} X \to 0\,.$$

Применение точного функтора h^Q задаёт $h^Q(X)$ как коядро левого умножения

$$R \xrightarrow{\varphi_*} R \to h^Q(X) \to 0$$

на элемент $\varphi \in R$. Применяя к этой диаграмме $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\left(\,*\,, h^Q(Y)\right)$, а к предыдущей — $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left(\,*\,, Y\right)$, получаем для $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\left(h^Q(X), h^Q(Y)\right)$ одинаковое представление в виде ядра правого умножения на φ в модуле $h^Q(Y)$. $\square$

2.3. Предпучки на малой категории. Зафиксируем малую категорию $\mathcal{U}$. Категория $p\mathcal{S}h(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ предпучков[2] объектов категории $\mathcal{A}$ на $\mathcal{C}$ наследует свойства категории $\mathcal{A}$. Например, если категория $\mathcal{A}$ K-линейна, то и категория предпучков $p\mathcal{S}h(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ K-линейна, т. к. естественные преобразования предпучков $f : X \to Y$, будучи семействами морфизмов $f(U) : X(U) \to Y(U)$, занумерованных объектами $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$, образуют K-подмодуль в прямом произведении модулей $\prod\limits_{U} \mathrm{Hom}\big(X(U), Y(U)\big)$, и композиции естественных преобразований K-билинейны, что проверяется покомпонентно, над каждым U в отдельности.

Аналогично проверяется, что категория предпучков $p\mathcal{S}h(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ со значениями в (ко)замкнутой категории $\mathcal{A}$ (ко)замкнута: диаграмма $X : \mathcal{N} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ естественных преобразований $X_{\mu \to \nu} : X_\mu \to X_\nu$ предпучков $X_\nu : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ представляет собою семейство диаграмм $X(U) : \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ в категории $\mathcal{A}$, занумерованных объектами $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$ и таких, что отображения ограничения сечений $\varphi^* : X_\nu(W) \to X_\nu(U)$, отвечающие стрелкам $\varphi : U \to W$ в $\mathcal{U}$, являются естественными преобразованиями диаграмм. В силу (ко)замкнутости $\mathcal{A}$, каждая такая диаграмма $X(U)$ имеет в $\mathcal{A}$ предел $L(U) = \lim X(U)$ и копредел $C(U) = \mathrm{colim}\, X(U)$, которые функториальны по отношению к естественным преобразованиям диаграмм[3] и, стало быть, задают предпучки $L : U \mapsto L(U)$ и $C : U \mapsto C(U)$ на категории $\mathcal{U}$.

Упражнение 2.22. Убедитесь, что предпучки L и C являются пределом и копределом диаграммы $X : \mathcal{N} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ в категории предпучков.

В частности, если категория $\mathcal{A}$ абелева, то и категория предпучков $p\mathcal{S}h(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ абелева. Как следствие, мы видим, что категории предпучков множеств, предпучков колец и предпучков абелевых групп замкнуты и козамкнуты, причём последняя из них — абелева.

[1] ибо Q — проективный генератор

[2] см. прим. 1.11 на стр. 11

[3] см. n° 1.6.3 на стр. 25

2.3.1. Плотность представимых предпучков. С каждым предпучком множеств F на малой категории $\mathcal{U}$ функториально связана малая категория $\mathcal{N}_F$ с множеством объектов $\bigsqcup_{U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}} F(U)$, элементы которого мы будем изображать символами $s \underset{F}{\otimes} U$, указывающими на то, что $s \in F(U)$, а $\operatorname{Hom}_{\mathcal{N}_F}(s \underset{F}{\otimes} U, t \underset{F}{\otimes} W) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to W \mid t\varphi = s\}$, где мы обозначили правым умножением $t \mapsto t\varphi$ действие контравариантной стрелки $F(\varphi) : F(W) \to F(U)$, ограничивающей сечения предпучка F вдоль морфизма $\varphi : U \to W$ категории $\mathcal{U}$. Например, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{X})$ это категория открытых множеств топологического пространства $\mathcal{X}$, то множество $\operatorname{Hom}_{\mathcal{N}_F}(s \underset{F}{\otimes} U, t \underset{F}{\otimes} W)$ либо пусто, либо состоит из одного элемента, и последнее означает, что $U \subset W$ и $t|_U = s$. Малая категория $\mathcal{N}_F$ порождает две согласованных с вложением Ионеды диаграммы:

$$\begin{tikzcd} & pSh(\mathcal{U}) \\ \mathcal{N}_F \arrow[ur, "H_F"] \arrow[dr, "D_F"'] & \\ & \mathcal{U}\,. \arrow[uu, hook, "h_*"', "\text{вложение Ионеды}"] \end{tikzcd} \tag{2-14}$$

Диаграмма $H_F : \mathcal{N}_F \to pSh(\mathcal{U})$ переводит каждое сечение $s \underset{F}{\otimes} U$ в отдельный представимый предпучок h_U, который мы обозначим $s \cdot h_U$, чтобы помнить, из какого сечения s он произошёл, а стрелку $\varphi : (t\varphi) \underset{F}{\otimes} U \to t \underset{F}{\otimes} W$ в естественное преобразование $(t\varphi) \cdot h_U = h_U \xrightarrow{\varphi_*} h_W = t \cdot h_W$, задаваемое левым умножением на φ: $(t\varphi) \cdot \psi \mapsto t \cdot (\varphi\psi)$. Диаграмма $D_F : \mathcal{N}_F \to \mathcal{U}$ переводит каждое сечение $s \underset{F}{\otimes} U$ в отдельную копию подлежащего объекта U, которую мы также обозначим через $s \cdot U$, а стрелку $\varphi : (t\varphi) \underset{F}{\otimes} U \to t \underset{F}{\otimes} W$ в подлежащую стрелку $(t\varphi) \cdot U = U \xrightarrow{\varphi} W = t \cdot W$.

Лемма 2.5
Каждый предпучок множеств F на малой категории $\mathcal{U}$ является копределом функториально зависящей от F диаграммы представимых предпучков: $F = \operatorname{colim} H_F$.

Доказательство. Из каждого объекта $s \cdot h_U$ диаграммы H_F есть каноническая стрелка $s \cdot h_U = h_U \to F$, задающая естественное преобразование, отвечающее по Ионеде[1] элементу $s \in F(U)$: над каждым объектом $W \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ оно переводит лежащую в $h_U(W)$ стрелку $\psi : W \to U$ в элемент $s\psi \in F(W)$.

Упражнение 2.23. Убедитесь, что стрелки $s : s \otimes h_U \to F$ перестановочны со всеми стрелками диаграммы H_F.

Если имеется такой предпучок G, в который тоже ведут естественные преобразования $\gamma_{s,U} : s \cdot h_U \to G$, перестановочные со стрелками диаграммы H_F, то по лемме Ионеды эти преобразования однозначно задаются такими элементами $g_{s,U} \in G(U)$,

[1] см. лем. 1.2 на стр. 13

что $g_{t,W}\varphi = g_{t\varphi,U}$ для любой стрелки $\varphi : U \to W$. Поэтому правило $g_U : F(U) \to G(U)$, $s \mapsto g_{s,U}$, корректно задаёт морфизм предпучков $g : F \to G$, перестановочный со всеми ведущими в них из диаграммы H_F стрелками, причём это единственный способ задать такой морфизм предпучков. □

Теорема 2.4 (о продолжении по непрерывности)
Для любого ковариантного функтора $G : \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ в произвольную козамкнутую категорию $\mathcal{C}$ существует единственный с точностью до естественного изоморфизма перестановочный с копределами функтор $G^{\frown} : pSh(\mathcal{U}) \to \mathcal{C}$, такой что $G^{\frown} \circ h_* \simeq G$, где $h_* : \mathcal{U} \to pSh(\mathcal{U})$ — вложение Ионеды. Этот функтор сопряжён слева функтору $h_*^G : \mathcal{C} \to pSh(\mathcal{U})$, который переводит объект $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в предпучок

$$h_C^G : \mathcal{U}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et\,, \quad U \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(U), C\big)\,.$$

Упражнение 2.24. Проверьте, что правило $C \mapsto h_C^G$ и впрямь задаёт ковариантный функтор $\mathcal{C} \to pSh(\mathcal{U})$.

Доказательство. Поскольку каждый предпучок F на $\mathcal{U}$ является копределом диаграммы $H_F = h_* \circ D_F$ из (2-14), равенство $G^{\frown} \circ h_* \simeq G$ и требование перестановочности функтора $G^{\frown}$ с копределами не оставляют иной возможности, как положить

$$G^{\frown}(F) = G^{\frown} \operatorname{colim} H_F = G^{\frown} \operatorname{colim} h_* D_F = \operatorname{colim} G^{\frown} h_* D_F = \operatorname{colim} GD_F\,, \tag{2-15}$$

где $GD_F : \mathcal{N}_F \to \mathcal{C}$ это диаграмма в категории $\mathcal{C}$, полученная применением функтора G к диаграмме D_F из (2-14). Диаграмма GD_F состоит из объектов $s \cdot G(U) = G(U) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, занумерованных парами (s, U), $s \in F(U)$, $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$, а стрелки в этой диаграмме суть морфизмы $(t\varphi) \cdot G(U) = G(U) \xrightarrow{G(\varphi)} G(W) = t \cdot G(W)$ со всевозможными $\varphi : U \to W$. Естественное преобразование диаграммы GD_F в постоянную диаграмму $\overline{C}$, ассоциированную с объектом $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, это такой набор стрелок $c_{s,U} : s \cdot G(U) \to C$, что $c_{t,W} \circ G(\varphi) = c_{t\varphi,U}$ для всех морфизмов $\varphi : U \to W$ категории $\mathcal{U}$. С другой стороны, этот же набор данных задаёт естественное преобразование предпучка $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ в предпучок $h_C^G : \mathcal{U}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$, $U \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(U), C\big)$, который посылает стрелку $\varphi : U \to W$ в правое умножение на $G(\varphi)$: сечение $s \in F(U)$ переводится этим преобразовании в стрелку $c_{s,U} : G(U) = s \cdot G(U) \to C$. Таким образом, имеется функториальный по предпучку F на $\mathcal{U}$ и объекту категории $\mathcal{C}$ изоморфизм $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{colim} GD_F, C) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}_F, \mathcal{C})}(GD_F, \overline{C}) \simeq$ $\simeq \operatorname{Hom}_{pSh(\mathcal{C})}(F, h_C^G)$, означающий[1], что правило $F \mapsto \operatorname{colim} GD_F$ задаёт левый сопряжённый к функтору $h_*^G : \mathcal{C} \to pSh(\mathcal{U})$, $C \mapsto h_C^G$, а значит, перестановочный с копределами, функтор $G^{\frown} : pSh(\mathcal{U}) \to \mathcal{C}$. □

Пример 2.8 (тензорное умножение на бимодуль)
Рассмотрим R-линейную категорию $\mathcal{U}$ с одним объектом U, эндоморфизмы которого образуют кольцо R. Предпучок абелевых групп $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \to \mathcal{A}b$ на этой категории это правый R-модуль $F = F(U)$, так что $pSh(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{M}od\text{-}R$. Объекты категории $\mathcal{N}_F$ суть элементы $s \in F$, и $\operatorname{Hom}_{\mathcal{N}_F}(s, t) = \{\varphi \in R \mid t\varphi = s\}$ это *трансформатор* из t в s.

[1] см. предл. 1.2 на стр. 18

Представимый предпучок абелевых групп h_U это свободный модуль ранга 1, т. е. само кольцо R, рассматриваемое как правый модуль над собой. Объекты диаграммы $H_F : \mathcal{N}_F \to \mathcal{M}od\text{-}R$ это свободные модули $s \cdot R$ ранга 1 с базисными элементами $s \in F$, а стрелки — отображения $(t\varphi) \cdot R \to t \cdot R$, $(t\varphi) \mapsto t \cdot \varphi$, и лем. 2.5 утверждает, что копредел этой диаграммы канонически изоморфен модулю F.

Упражнение 2.25. Убедитесь в этом непосредственно.

Если в качестве козамкнутой категории $\mathcal{C}$ взять категорию $\mathcal{M}od\text{-}S$ правых модулей над каким-либо кольцом S, то ковариантный функтор $G : \mathcal{U} \to \mathcal{M}od\text{-}S$ это R-S-бимодуль $G = G(U)$. Функтор $h_*^G : \mathcal{M}od\text{-}S \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U}) = \mathcal{M}od\text{-}R$ сопоставляет S-модулю C R-модуль $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(G, C)$, правое действие R на котором состоит в левым действии на G. Предыдущая теор. 2.4 утверждает, что у этого функтора имеется левый сопряжённый функтор $G^{\smile} : F \mapsto \operatorname{colim} GD_F$. Объектами диаграммы GD_F являются одинаковые копии $s \cdot G$ модуля G, занумерованные элементами $s \in F$, а стрелками — морфизмы $\varphi : (t\varphi) \cdot G \to t \cdot G$, $(t\varphi) \cdot g \mapsto t \cdot (\varphi g)$.

Упражнение 2.26. Убедитесь, что $\operatorname{colim} GD_F = F \bigotimes\limits_R G$.

Так что мы снова получаем канонический изоморфизм из предл. 1.1 на стр. 16:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(F \bigotimes_R G, C\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\big(F, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(G, C)\big) .$$

Пример 2.9 (геометрическая реализация симплициальных множеств) Для симплициальной категории $\mathcal{U} = \Delta$ и симплициального множества $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ диаграмма $H_F : \mathcal{N}_F \to p\mathcal{S}h(\Delta)$ состоит из объектов $s \cdot h_{[n]}$, занумерованных числами $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и точками $s \in F_n = F([n])$, причём предпучок $h_{[n]} : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ можно воспринимать как комбинаторное описание стандартной триангуляции правильного симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Стрелка $(t\varphi) \cdot h_{[n]} = h_{[n]} \xrightarrow{\varphi_*} h_{[m]} = t \cdot h_{[m]}$ состоит в левом умножении стрелок из h_U на φ.

Упражнение 2.27. Убедитесь, что копредел этой диаграммы в категории симплициальных множеств изоморфен F.

Функтор геометрической реализации $G : \Delta \to \mathcal{T}op$ переводит комбинаторный симплекс $[n]$ в геометрический симплекс $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и по теор. 2.4 канонически продолжается на все симплициальные множества перестановочным с копределами функтором $G^{\smile}$, переводящим F в копредел в категории $\mathcal{T}op$ диаграммы GD_F, получающейся из предыдущей диаграммы H_F заменой каждого комбинаторного симплекса $h_{[n]}$ настоящим геометрическим симплексом Δ^n, а левых умножений на $\varphi : h_{[n]} \to h_{[m]}$ — аффинными отображениями $\varphi : \Delta^n \to \Delta^m$.

Упражнение 2.28. Убедитесь, что этот копредел гомеоморфен топологическому пространству $|F|$, о котором шла речь в прим. 1.7 на стр. 7

Правый сопряжённый к геометрической реализации функтор $h_*^G : C \to h_C^G$ сопоставляет топологическому пространству C симплициальное множество его сингулярных симплексов $h_C^G = S(C) : [n] \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, C)$, и теор. 2.4 в этом случае описывает изоморфизм $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(|F|, C) = \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\Delta)}(F, S(C))$ из прим. 1.17 на стр. 18.

Пример 2.10 (этальное пространство предпучка)
В случае, когда $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ является категорией открытых множеств топологического пространства X, а $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ — предпучком на X, диаграмма H_F состоит из занумерованных локальными сечениями $s \in F(U)$ представимых предпучков $s \cdot h_U$, $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$, с пустым множеством сечений над всеми $V \not\subset U$ и одноточечным множеством сечений над всеми[1] $V \subseteq U$, и для каждого включения $U \hookrightarrow W$ и сечения $t \in F(W)$ в диаграмме H_F имеется стрелка $t|_U \cdot h_U \hookrightarrow t \cdot h_W$, которая над каждым $V \subseteq U \subseteq W$ переводит единственный элемент в $h_U(V)$ в единственный элемент $h_W(V)$.

Упражнение 2.29. Убедитесь, что копредел этой диаграммы в категории предпучков на X равен F.

Возьмём в качестве козамкнутой категории $\mathcal{C}$ в теор. 2.4 категорию $\mathcal{T}op(X)$ топологических пространств над X, объектами которой являются непрерывные отображения $p : Y \to X$ в категории $\mathcal{T}op$, а $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}(p,q) = \{\psi \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{T}op \mid q\psi = p\}$, т. е. морфизм из $p : Y \to X$ в $q : Z \to X$ это непрерывное отображение $\psi : Y \to Z$, для каждого $x \in X$ переводящее слой $p^{-1}x$ в слой $q^{-1}x$. Имеется естественный функтор $G : \mathcal{U}(X) \to \mathcal{T}op(X)$ переводящий открытое подмножество $U \subset X$ в его тавтологическое вложение $\iota_U : U \hookrightarrow X$. Согласно теор. 2.4 этот функтор продолжается по непрерывности до функтора $G^{\frown} : p\mathcal{S}h(X) \to \mathcal{T}op(X)$, сопоставляющего предпучку F на X топологическое пространство над X, которое называется *этальным пространством* предпучка F, обозначается $\mathcal{E}_F \overset{\mathrm{def}}{=} G^{\frown}F$ и представляет собою копредел в категории $\mathcal{T}op(X)$ диаграммы GD_F, объектами которой являются открытые вложения $\iota_{s,U} : s \cdot U \simeq U \hookrightarrow X$, по одному для каждого открытого $U \subset X$ и каждого $s \in F(U)$, а стрелками — вложения $(t|_U) \cdot U \simeq U \hookrightarrow W \simeq t \cdot W$, по одному для каждого вложения $U \hookrightarrow W$ и каждого $t \in F(W)$. Слоем пространства $\mathcal{E}_F$ над точкой $x \in X$ является копредел $\operatorname*{colim}_{U \ni x} F(U)$ индуктивной системы множеств сечений предпучка F над всеми открытыми окрестностями точки x относительно отображений ограничения сечений[2], т. е. *слой* F_x предпучка F в точке x. Напомню, что он состоит из *ростков* сечений, т. е. из классов $[s]_x$ сечений $s \in F(U)$ по модулю отождествлений $[s]_x = [t]_x$, когда $s|_V = t|_V$ для некоторого $V \subset U \cap W$. Множество $\mathcal{W} \subset \mathcal{E}_F$ открыто тогда и только тогда, когда когда открыты его прообразы относительно всех отображений $s : U \hookrightarrow \mathcal{E}_F$, $x \mapsto [s]_x$, со всевозможными $U \subset X$ и $s \in F(U)$ (слабейшая топология, в которой все эти отображения непрерывны). Согласно теор. 2.4 функтор $F \mapsto \mathcal{E}_F$ сопряжён слева функтору $h_*^G : \mathcal{T}op(X) \to p\mathcal{S}h(X)$, сопоставляющему непрерывному отображению $p : Y \to X$ пучок его сечений[3] $h_Y^G = \Gamma_Y : U \mapsto \{s : U \to Y \mid ps = \mathrm{Id}_U\}$, т. е. имеется функториальный по F и $p : Y \to X$ изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}(\mathcal{E}_F, Y) = \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}(F, \Gamma_Y)\,. \tag{2-16}$$

Кроме того, функтор $F \mapsto \mathcal{E}_F$ перестановочен с копределами, а $Y \mapsto \Gamma_Y$ — с пределами.

Упражнение 2.30. Убедитесь, что базу открытых окрестностей точки $\sigma_x \in \mathcal{E}_F$ в этальном пространстве $\mathcal{E}_F$ произвольного предпучка F составляют семейства ростков

[1] это единственное сечение правильно воспринимать как $s|_V$
[2] см. прим. 1.25 на стр. 25
[3] см. прим. 1.8 на стр. 8

$\mathcal{W}_{s,U}$, состоящие из семейств ростков $\sigma_y = [s]_y$ некоторого сечения $s \in F(U)$ над всеми точками $y \in U$, и что проекция $\mathcal{E}_F \to X$, $\sigma_x \mapsto x$, является локальным гомеоморфизмом[1].

2.4. Пучки на топологическом пространстве. Поскольку предпучок сечений непрерывного отображения является пучком[2], композиция функторов

$$\Gamma \circ \mathcal{E} : p\mathcal{S}h(X) \to \mathcal{S}h(X)$$

функториально сопоставляет каждому предпучку F пучок $F^s \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \circ \mathcal{E}(F)$, сечения которого над открытым множеством U суть непрерывные сечения $s : U \hookrightarrow \mathcal{E}_F$ этального пространства $\mathcal{E}_F \to X$, т. е. такие семейства ростков $\{\sigma_x\} \in \prod_{x \in U} F_x$, что у каждой точки $y \in U$ есть открытая окрестность $W \subset U$, над которой есть сечение $t \in F(W)$, класс которого $\sigma_x = [t]_x$ в F_x для всех $x \in W$. Иначе говоря, сечение пучка F^s над множеством U задаётся покрытием $P = \{W_p \to U\}$ множества U семейством открытых множеств W_p, $p \in P$, и набором согласованных на пересечениях сечений

$$s_p \in F(W_p) : \quad \forall\, p, q \;\; s_p\big|_{W_p \cap W_q} = s_q\big|_{W_p \cap W_q} ,$$

причём два таких набора данных задают одно и то же сечение, когда их ограничения на некоторое покрытие, вписанное в оба данных покрытия, совпадают.

Упражнение 2.31. Выведите непосредственно из этих описаний, что предпучок F^s является пучком и что для любого пучка F имеется канонический изоморфизм $F^s \simeq F$, в частности $F^{ss} \simeq F^s$.

В силу того, что функтор $\mathcal{E}$ сопряжён слева функтору Γ, имеется естественное преобразование[3] $s : \mathrm{Id}_{p\mathcal{S}h(X)} \to \Gamma \circ \mathcal{E}$, т. е. функториальный по F морфизм предпучков $s : F \to F^s$, называемый *опучковыванием*. Над каждым открытым U он отображает $F(U)$ в $F^s(U)$, переводя $t \in F(U)$ в набор его классов $[t]_x$ во всех слоях F_x.

Упражнение 2.32. Покажите, что канонический морфизм $s : F \to F^s$ инъективен, если и только если предпучок F отделим[4], и является изоморфизмом, если и только если F — пучок.

Тем самым, ограничение композиции функторов $\Gamma\mathcal{E}$ на подкатегорию пучков естественно изоморфно тождественному функтору $\mathrm{Id}_{\mathcal{S}h(X)}$. Это наполовину доказывает

Предложение 2.1
Ограничения функтора $\mathcal{E} : F \mapsto \mathcal{E}_F$ на подкатегорию пучков и ограничение функтора $\Gamma : Y \mapsto \Gamma_Y$ на подкатегорию локальных гомеоморфизмов являются квазиобратными друг другу эквивалентностями категорий.

[1] непрерывное отображение $p : Y \to X$ называется *локальным гомеоморфизмом*, если у любой точки $y \in Y$ есть такая открытая окрестность $U \ni y$, что $f|_U : U \xrightarrow{\sim} f(U)$ является гомеоморфизмом с открытым подмножеством $f(U) \subset X$

[2] см. прим. 1.8 на стр. 8

[3] см. формулу (1-14) на стр. 15

[4] см. прим. 1.8 на стр. 8

Доказательство. Согласно упр. 2.30 проекция $p : \mathcal{E}_F \to X$, $\sigma_x \mapsto x$, этального пространства любого предпучка F на X является локальным гомеоморфизмом. Так как функтор $\mathcal{E}$ сопряжён слева функтору Γ, имеется преобразование $e : \mathcal{E} \circ \Gamma \to \mathrm{Id}_{\mathcal{T}op(X)}$, действие которого $e_Y : \mathcal{E}_{\Gamma_Y} \to Y$ над объектом $p : Y \to X$ переводит росток сечений $\sigma_x \in \mathcal{E}_{\Gamma_Y}$, лежащий в слое над точкой $x \in X$, в значение $s(x) \in Y$ любого локального сечения $s : U \hookrightarrow Y$ с $[s]_x = \sigma_x$. Если p — локальный гомеоморфизм, то имеется обратное отображение $\varepsilon : Y \to \mathcal{E}_{\Gamma_Y}$, переводящее точку $y \in Y$ в росток в точке $x = p(y)$ любой такой открытой окрестности U точки y, которая гомеоморфно отображается на $p(U) \subset X$ и, тем самым, может рассматриваться как локальное сечение p над $f(U)$.

Упражнение 2.33. Убедитесь, что e и ε непрерывны и обратны друг другу.

Тем самым, сужение $\mathcal{E}\Gamma$ на подкатегорию локальных гомеоморфизмов эквивалентно тождественному функтору. □

Следствие 2.2
Для любых пучков G, H на X и любых двух локальных гомеоморфизмов $Y \to X$, $Z \to X$ имеются функториальные изоморфизмы:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}h(X)}(G, H) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}(\mathcal{E}_G, \mathcal{E}_H) \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}h(X)}(\Gamma_Y, \Gamma_Z)\,.$$

Следствие 2.3
Функтор опучковывания $F \mapsto F^s$ сопряжён слева к вложению $\mathcal{S}h(X) \hookrightarrow p\mathcal{S}h(X)$, т. е. имеется функториальный по предпучку F и пучку G изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(F, G) \simeq \mathrm{Hom}(F^s, G)\,.$$

В частности, опучковывание перестановочно с копределами, и естественное преобразование $s : F \to F^s$ универсально: любой морфизм $\varphi : F \to G$ предпучка F в пучок G имеет вид $\varphi = \varphi^s \circ s$ для единственного морфизма $\varphi^s : F^s \to G$.

Доказательство. Пользуясь функториальными по F и G изоморфизмами $G \simeq G^s$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}\left(\mathcal{E}_F, \mathcal{E}_G\right) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}\left(\Gamma_{\mathcal{E}_F}, \Gamma_{\mathcal{E}_G}\right)$, получаем:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}(F, G) &\simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}\left(F, G^s\right) \simeq \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}\left(F, \Gamma_{\mathcal{E}_G}\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}\left(\mathcal{E}_F, \mathcal{E}_G\right) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}\left(\Gamma_{\mathcal{E}_F}, \Gamma_{\mathcal{E}_G}\right) \simeq \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}h(X)}\left(F^s, G^s\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}h(X)}\left(F^s, G\right)\end{aligned}$$

□

Предложение 2.2
Категория $\mathcal{A}b(X)$ пучков абелевых групп на топологическом пространстве X абелева.

Доказательство. Как мы видели в самом начале n° 2.3 на стр. 41, категория предпучков абелевых групп на любой малой категории абелева.

Упражнение 2.34. Убедитесь в том, что нулевой предпучок, прямая сумма пучков и ядро любого морфизма пучков являются пучками.

Остаётся показать, что в категории пучков имеются коядра, а кообразы изоморфны образам. Первое следует из того, что опучковывание сохраняет копределы, и значит, опучкованное коядро в категории предпучков является коядром в категории пучков. Второе очевидно, поскольку совпадавшие друг с другом образ и кообраз в категории предпучков совпадут и после пучкования. □

Предостережение 2.2. Тавтологическое строгое полное вложение $\mathcal{S}h(X) \hookrightarrow p\mathcal{S}h(X)$ *не является точным*, поскольку опучкованное коядро, вообще говоря, не изоморфно коядру в категории предпучков.

Пример 2.11 (дифференциальные формы на окружности)
Рассмотрим на окружности S^1 пучок C гладких функций и пучок Ω гладких дифференциальных 1-форм. Ядро морфизма $d : C \to \Omega$, $f \mapsto df$, это постоянный *пучок* $\mathbb{R}^s$ *локально* постоянных функций. Образ $B = \operatorname{im} d$ в категории предпучков имеет в качестве сечений над открытым U точные 1-формы df, где $f : U \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Этот предпучок не является пучком: покрывая S^1 двумя связными дугами, мы имеем на каждой из этих дуг дифференциалы dt от функции длины дуги t, исчисляемой против часовой стрелки, и эти дифференциалы совпадают на пересечении дуг, поскольку функции t у разных дуг отличаются на аддитивную константу, однако никакого глобального дифференциала $df \in B(S^1)$, ограничивающегося в dt на каждую из дуг, нет, поскольку $\int_{S^1} df = f(2\pi) - f(0) = 0$, а сумма интегралов от форм dt по двум полуокружностям, лежащим каждая в своей покрывающей дуге, равна $\pi + \pi = 2\pi$. Пучок B^s, являющийся коядром d в категории пучков, имеет глобальными сечениями такие наборы (U_i, df_i), что $df_i \in B(U_i)$, $\bigcup U_i = S^1$ и $df_i|_{U_i \cap U_j} = df_j|_{U_i \cap U_j}$. В частности, среди его глобальных сечений имеется и форма dt, ибо она представима в таком виде.

Упражнение 2.35. Убедитесь, что в категории пучков на S^1 последовательность

$$0 \to \mathbb{R}^s \hookrightarrow C \xrightarrow{d} \Omega \to 0$$

является *точной тройкой*, а в категории предпучков $\operatorname{coker} d \neq 0$ имеет группы сечений $\operatorname{coker} d(S^1) \simeq \mathbb{R}$ и $\operatorname{coker} d(U) = 0$ при $U \neq S^1$, и проверьте напрямую, что $(\operatorname{coker} d)^c = 0$.

2.4.1. Прямой образ. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ задаёт функтор

$$f^{-1} : \mathcal{U}(Y) \to \mathcal{U}(X)\,, \quad U \mapsto f^{-1}Y$$

между категориями открытых множеств. Подъём предпучка $F \in p\mathcal{S}h(X)$ вдоль этого функтора называется *прямым образом*[1] предпучка F и обозначается $f_*F \stackrel{\text{def}}{=} F \circ f^{-1}$. Множество его сечений над открытым $U \subset Y$ по определению совпадает с $F\left(f^{-1}(U)\right)$.

Упражнение 2.36. Проверьте, что прямой образ пучка всегда является пучком, а прямой образ предпучка, не являющегося пучком, может быть, а может и не быть пучком.

[1] по-английски *direct image*

В ситуации, когда $f : X \hookrightarrow Y$ является открытым или замкнутым вложением, прямой образ f_*F обычно называют *тривиальным продолжением* предпучка F с X на Y, поскольку над всеми открытыми $U \subset Y$, не пересекающимися с X, его сечения пусты[1], а над открытыми $U \subset Y$, задевающими X, сечения $f_*F(U) = F(U \cap X)$.

Упражнение 2.37. Выведите отсюда, что на достаточно отделимом пространстве Y слой $\left(f_*F\right)_y$ совпадает с F_y, если $y \in X$, и пуст[2], если $y \notin X$ (по этой причине для собственных замкнутых $X \subset Y$ пучки вида f_*F на Y называют *пучками-небоскрёбами*, сосредоточенным на X.).

У функтора прямого образа, имеется левый сопряжённый функтор. Строить его удобно в самой общей ситуации, вернувшись к условиям теор. 2.4 на стр. 43. Любой функтор $Q : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ между малыми категориями индуцирует функтор подъёма

$$Q^{\star} : p\mathcal{S}h(\mathcal{W}) \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U}), \quad S \mapsto SQ. \tag{2-17}$$

Лемма 2.6

У функтора (2-17) есть левый сопряжённый функтор $Q_{\star} : p\mathcal{S}h(\mathcal{U}) \to p\mathcal{S}h(\mathcal{W})$, переводящий предпучок $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ в копредел диаграммы предпучков на $\mathcal{W}$, объектами которой являются представимые предпучки $s \cdot h_{Q(U)} = h_{Q(U)}$, по одному для каждого $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$ и каждого $s \in F(U)$, а стрелками — отображения

$$Q(\varphi)_* : (t\varphi) \cdot h_{Q(U)} \to t \cdot h_{Q(V)}, \quad (t\varphi) \cdot \psi \mapsto t \cdot (Q(\varphi)\psi),$$

по одному для каждой стрелки $\varphi : U \to V$ категории $\mathcal{U}$ и каждого $t \in F(V)$.

Доказательство. Положим в теор. 2.4 на стр. 43 $\mathcal{D} = p\mathcal{S}h(\mathcal{W})$ и $G : U \mapsto h_{Q(U)}$. Тогда для каждого $S \in p\mathcal{S}h(\mathcal{W})$ получим $h^G_S \simeq Q^{\star}S$, т. к. по лемме Ионеды имеется функториальный по $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$ и $S : \mathcal{W}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{W})}\big(G(U), S\big) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{W})}\big(h_{Q(U)}, S\big) \simeq S\big(Q(U)\big).$$

Согласно теор. 2.4 левый сопряжённый к функтору $Q^{\star} = h^G_* : S \mapsto h^G_S = SQ$ функтор $Q_{\star} = G^{\frown} : p\mathcal{S}h(\mathcal{U}) \to p\mathcal{S}h(\mathcal{W})$ переводит предпучок F на $\mathcal{U}$ в копредел диаграммы GD_F, которая выглядит именно так, как указано в теореме. □

2.4.2. Обратный образ. В ситуации, когда $\mathcal{U} = \mathcal{U}(Y)$ и $\mathcal{W} = \mathcal{U}(X)$ являются категориями открытых множеств топологических пространств Y и X, а функтор $Q = f^{-1} : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ задаётся непрерывным отображением $f : X \to Y$, левый сопряжённый к функтору подъёма $Q^{\star} = f_* : p\mathcal{S}h(X) \to p\mathcal{S}h(Y)$ функтор обозначается

$$f^* \overset{\text{def}}{=} Q_{\star} : p\mathcal{S}h(Y) \to p\mathcal{S}h(X)$$

называется *обратным образом*. По лем. 2.6 множество сечений предпучка f^*F над открытым $W \subset X$ представляет собою копредел диаграммы множеств $s \cdot U = U$, по одному множеству для каждого открытого $U \supset f(W)$ и каждого $s \in F(U)$, и вложений

[1] для предпучка абелевых групп можно по определению положить их нулевыми, и тогда f_*F называется *продолжением нулём*

[2] равен нулю, если F — пучок абелевых групп

$(t|_U) \cdot U \hookrightarrow t \cdot V$, по одному для каждой пары $U \subset V$ с $U \supset f(W)$ и каждого $t \in F(V)$. Тем самым, сечение $s \in f^*F(W)$ это такое семейство занумерованных точками $x \in W$ ростков $\sigma_x \in F_{f(x)}$ сечений пучка F над точками $f(x) \in Y$, что для каждого $x \in W$ существует открытая окрестность $V \ni x$ в W, открытое множество $U \supset f(W)$ в Y и сечение $t \in F(U)$, росток которого совпадает с σ_z для всех $z \in V$.

Упражнение 2.38. Убедитесь в этом и покажите, что обратный образ любого предпучка F на Y является пучком, а именно, пучком сечений послойного произведения $X \underset{Y}{\times} \mathcal{E}_F$ отображения $f : X \to Y$ и канонической проекции $\mathcal{E}_F \to Y$ этального пространства предпучка F.

Сравнение определений показывает, что опучковывание $F \mapsto F^s$ является ни чем иным, как обратным образом относительно тождественного отображения: $F^s = \mathrm{Id}_X^* F$.

Упражнение 2.39. Проверьте, что постоянный пучок со слоем S на X является подъёмом постоянного предпучка со слоем S на одноточечном пространстве вдоль отображения, стягивающего X в точку.

2.5. Пучки на малой категории. Вернёмся к рассмотрению произвольной малой категории $\mathcal{U}$. Подпредпучки представимого предпучка h_U называются *решётами*[1] над объектом U. Иначе говоря, решето над U — это правый идеал стрелок с концом в U, т. е. такое множество стрелок $\Phi \subset h_U$, что $\varphi \in \Phi \Rightarrow \varphi\psi \in \Phi$ всякий раз, когда композиция $\varphi\psi$ определена. Всякий набор стрелок $\varphi_i : W_i \to U$ порождает решето, состоящее из всех стрелок с концом в U, пропускающихся[2] через одну из стрелок φ_i. Множество всех решёт над U мы будем обозначать через $R(U)$. Оно частично упорядочено по включению: $\Phi \leqslant \Psi$ если $\Phi \subseteq \Psi$, причём у любых двух элементов Φ, Ψ есть максимальная нижняя грань — пересечение $\Phi \cap \Psi$, и максимальная нижняя грань — объединение $\Phi \cup \Psi$, которые также являются решётами. Сопоставление $R \mapsto R(U)$ является предпучком: всякая стрелка $\psi : U \to W$ задаёт *ограничение решёт* $\psi^{-1} : R(W) \to R(U)$, переводящее решето $\Phi \in R(W)$ в решето $\psi^{-1}\Phi \overset{\text{def}}{=} \{\eta \in h_U \mid \psi\eta \in \Phi\} \in R(U)$.

Определение 2.6 (топология Гротендика)
Подпредпучок $J \subset R$ предпучка решёт называется *J-топологией Гротендика* или *пучком покрытий* на категории $\mathcal{U}$, если для всех $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$ полное решето h_U является элементом $J(U)$ и для любого $\Phi \in J(U)$ каждое решето $\Psi \in R(U)$, подъём которого $\varphi^{-1}\Psi$ вдоль всех стрелок $\varphi : V \to U$ из Φ лежит в $J(V)$, тоже является элементом[3] $J(U)$. Решёта из предпучка J называются *покрытиями*. Прямо Категория $\mathcal{U}$ с зафиксированной J-топологией называется *сайтом*[4].

Упражнение 2.40. Введите из определения, что вместе с каждым решетом $\Phi \in J(U)$ все решёта, содержащие (т. е. большие) Φ, тоже лежат в $J(U)$.

[1] или *ситами*

[2] т. е. представимых в виде $\varphi_i\psi$

[3] это свойство предпучка J называется *локализуемостью*, и ниже в упр. 2.41 мы увидим, что оно означает, что сам J является пучком в J-топологии

[4] или *ситусом*

Пример 2.12 (обычная топология)
Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ является категорией открытых множеств топологического пространства X. Объявляя покрытием любой идеал в h_U, содержащий набор стрелок, образы которых покрывают U, мы получаем предпучок (убедитесь в этом!) покрытий J, содержащий над каждым U полное решето h_U, порождённое тождественной сюрьекцией $\mathrm{Id}_U : U \to U$, и локализуемый, т. к. если множества U_i покрывают U, и при каждом i множества V_{ij} покрывают U_i, то V_{ij} покрывают и U. Тем самым, покрытия обычной топологии составляют топологию Гротендика.

Пример 2.13 (эпи-топология на абелевой категории)
Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{A}$ — произвольная абелева категория. Назовём правый идеал в h_U покрытием объекта $U \in \mathcal{A}$, если он содержит какой-нибудь эпиморфизм $W \twoheadrightarrow U$. Очевидно, что h_U является таким идеалом, и если подъём какого-то решета $\Psi \subset h_U$ вдоль эпиморфизма $\pi : W \twoheadrightarrow U$ содержит эпиморфизм $\psi : V \twoheadrightarrow W$, то Ψ содержит эпиморфизм $\pi\psi : V \twoheadrightarrow U$, т. е. покрывает U. Наконец, поскольку любой эпиморфизм $\pi : W \twoheadrightarrow U$ и любая стрелка $\varphi : V \to U$ включаются в декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} W \underset{U}{\times} V \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\psi'"'] \arrow[dr, dashed] & V \arrow[d, "\psi"] \\ W \arrow[r, "\pi"'] & U \end{tikzcd}$$

в котором стрелка $\pi' : W \underset{U}{\times} V \twoheadrightarrow V$ тоже эпиморфна[1], подъём любого содержащего эпиморфизм решета содержит эпиморфизм. Тем самым, содержащие эпиморфизм идеалы образуют подпредпучок в R.

2.5.1. Пучки. Предпучок $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на сайте $\mathcal{U}$ называется *J-пучком*, если для каждого $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$ и каждого покрытия $\Phi \in J(U)$ вложение предпучков $f : \Phi \hookrightarrow h_U$ индуцирует биекцию $f^* : \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{U})}(h_U, F) = F(U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{U})}(\Phi, F)$. Подробнее последнее условие означает, что любое естественное преобразование $\Phi \to F$, т. е. выбор для каждой стрелки $\varphi : V \to U$ из решета Φ элемента $s_\varphi \in F(V)$ так, что вдоль каждой стрелки $\psi : W \to V$ ограничение $s_\varphi \psi = s_{\varphi\psi}$, должно единственным образом подниматься до естественного преобразования $h_U \to F$, т. е. однозначно задавать такой элемент $s \in F(U)$, что все $s_\varphi = s\varphi$ являются его ограничениями вдоль стрелок $\varphi \in \Phi$.

Упражнение 2.41. Убедитесь, что предпучок покрытий является пучком.

Будучи предпучками пучка решёт, пучки покрытий частично упорядочены по включениям: $P_1 \leqslant P_2$, если $P_1(U) \subseteq P_2(U)$ для всех $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$. Максимальным элементом относительно этого порядка является *макимальная*[2] топология $P = R$, в которой все решёта являются покрытиями.

Упражнение 2.42. Убедитесь, что пучками в максимальной топологии являются лишь начальный и конечный объекты категории $p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$.

[1]см. упр. 2.6 на стр. 33
[2]*или тривиальная*

Минимальная топология — это постоянный предпучок $p(U) = \{h_U\}$, единственным покрытием в котором является полное решето.

Упражнение 2.43. Убедитесь, что пересечение любого множества пучков покрытий также является пучком покрытий.

Таким образом, любое множество топологий имеет единственную наибольшую нижнюю грань. Применяя это наблюдение к множеству верхних граней какого-либо множества топологий, заключаем, что у любого множества топологий есть и единственная наименьшая верхняя грань.

Лемма 2.7
Для любого множества предпучков существует единственная наибольшая топология Гротендика, в которой все эти предпучки являются пучками.

Доказательство. В силу упр. 2.43 достаточно построить такую топологию для одного предпучка F. Назовём решето $\Phi \subset h_U$ покрывающим, если для всех стрелок $\psi : V \to U$ вложения $\psi^{-1}\Phi \hookrightarrow h_V$ задают изоморфизмы $\mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{U})}(h_V, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{U})}(\psi^{-1}\Phi, F)$. Ясно, что это свойство должно выполняться для покрытий любой топологии J, в которой F является пучком. Проверим, что определённые таким образом покрытия образуют пучок покрытий. □

Определение 2.7
Наибольшая топология, в которой все представимые предпучки являются пучками, называется канонической.

§3. Комплексы и когомологии

По умолчанию в этом параграфе речь идёт о модулях над фиксированным кольцом K.

3.1. Терминология и обозначения. Под *градуированным K-модулем* мы понимаем прямую сумму K-модулей $V = \bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}} V^{\nu}$, элементы которой суть *конечные* суммы вида $v_{\nu_1} + v_{\nu_2} + \cdots + v_{\nu_m}$, в которых каждый $v_d \in V^d$. Векторы $v_d \in V^d$ называются *однородными* степени d, и степень однородного вектора обозначается $|v_d| \stackrel{\text{def}}{=} d$. Если компоненты $V^d = 0$ при всех $d \ll 0$ (соотв. при всех $d \gg 0$) градуированный модуль V называется *ограниченным слева* (соотв. *справа*).

Через $V[k]$ обозначается градуированный модуль с компонентами $V[k]^{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} V^{\nu+k}$.

Гомоморфизм градуированных модулей $f : V \to W$ называется *однородным* степени m, если $f(V^{\nu}) \subset W^{\nu+m}$ при всех ν. Например, *сдвиг градуировки* $s : V \to V[1]$, тождественно действующий на элементы модуля: $s(v) \stackrel{\text{def}}{=} v$, однороден степени -1. Все K-линейные гомоморфизмы $V \to W$ образуют градуированный K-модуль

$$\mathrm{GrHom}(V,W) = \bigoplus_{\nu} \mathrm{GrHom}^{\nu}(V,W)\,, \tag{3-1}$$

компонента степени ν которого состоит из однородных гомоморфизмов ν-той степени. При композиции однородных гомоморфизмов их степени складываются: $|fg| = |f| + |g|$. Таким образом, эндоморфизмы градуированного модуля V образуют *градуированную алгебру* $\mathrm{GrHom}(V,V)$, в которой $\mathrm{GrHom}^{\nu} \cdot \mathrm{GrHom}^{\mu} \subset \mathrm{GrHom}^{\nu+\mu}$.

Тензорное произведение[1] $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ градуированных модулей V_i определяется как градуированный модуль с компонентами

$$\left(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n\right)^{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\sum \nu_i = \nu} V_1^{\nu_1} \otimes V_2^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes V_n^{\nu_n}\,.$$

3.1.1. Кошулево правило знаков. При работе с градуированными модулями мы по умолчанию используем так называемые s-версии[2] стандартных полилинейных операций линейной алгебры, которые получаются из обычных применением *кошулева правила знаков*: если некая операция над буквами $f_1, f_2, \dots, f_n$ определяется в неградуированной теории как линейная комбинация (некоммутативных) мономов от этих букв, в которой мономы отличаются друг от друга перестановками букв, то в s-версии такой операции каждая транспозиция букв f_{ν} и f_{μ} дополнительно сопровождается умножением соответствующего монома на $(-1)^{|f_{\nu}|\cdot|f_{\mu}|}$. Например, *s-коммутатор* однородных эндоморфизмов градуированного модуля определяется как

$$[f,g] \stackrel{\text{def}}{=} f \circ g - (-1)^{|f||g|} g \circ f\,,$$

а *s-правило Лейбница* для однородного оператора F на градуированной алгебре выглядит так:

$$F(ab) = (Fa)b + (-1)^{|F|\cdot|a|} a(Fb)\,.$$

[1] по умолчанию, все тензорные произведения берутся в категории K-модулей

[2] т. е. подкрученные на знак (*sign*) или, как ещё говорят, *супер*- (или *skew*-) версии

Аналогично, результат применения тензорного произведения $f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n$ однородных гомоморфизмов $f_i : V_i \to V_i$ к тензорному моному

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$$

из однородных векторов v_i определяется как

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_m \left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m\right) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\varepsilon} f_1(v_1) \otimes \cdots \otimes f_m(v_m)\,, \tag{3-2}$$

где $\varepsilon = |f_m|\big(|v_1| + \cdots + |v_{m-1}|\big) + |f_{m-1}|\big(|v_1| + \cdots + |v_{m-2}|\big) + \cdots + |f_2||v_1|$. Аналогично вычисляется и композиция тензорных мономов от гомоморфизмов:

$$\left(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m\right) \circ \left(g_1 \otimes \cdots \otimes g_m\right) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\varepsilon} (f_1 \circ g_1) \otimes \cdots \otimes (f_m \circ g_m) \tag{3-3}$$

где $\varepsilon = |f_m|\big(|g_1| + \cdots + |g_{m-1}|\big) + |f_{m-1}|\big(|g_1| + \cdots + |g_{m-2}|\big) + \cdots + |f_2||g_1|$.

3.1.2. Комплексы и (ко)гомологии. Градуированный K-модуль V, оснащённый однородным K-линейным оператором $d : V \to V$ степени $|d| = 1$ с $d^2 = 0$ называется *комплексом*. Действие оператора d удобно изображать диаграммой

$$\cdots \xrightarrow{d} V^{\nu-1} \xrightarrow{d} V^{\nu} \xrightarrow{d} V^{\nu+1} \xrightarrow{d} \cdots\,. \tag{3-4}$$

Равенство $d^2 = 0$ означает, что $\ker d \supset \operatorname{im} d$. Оператор d с таким свойством называется *дифференциалом*. Фактор модуль $H(V) \stackrel{\text{def}}{=} \ker d / \operatorname{im} d$ называется *модулем когомологий* комплекса V. Он естественно градуирован:

$$H(V) = \bigoplus H^{\nu}(V)\,, \quad \text{где} \quad H^{\nu}(V) = \frac{\ker\left(d : V^{\nu} \to V^{\nu+1}\right)}{\operatorname{im}\left(d : V^{\nu-1} \to V^{\nu}\right)}\,.$$

Элементы из $\ker d$ называются *коциклами*, а элементы из $\operatorname{im} d$ — *кограницами*. Если $H(V) = 0$, т. е. $\ker d = \operatorname{im} d$, комплекс V называется *точным* или *ациклическим*.

Формально, комплекс можно определить в любой категории как последовательность стрелок (3-4) со свойством $d^2 = 0$, а когомологии комплекса — в любой абелевой категории[1], и все обсуждаемые в этом параграфе свойства когомологий остаются справедливыми для любой абелевой категории.

Иногда удобно бывает считать, что степень дифференциала равна не $+1$, а -1. В этом случае однородные компоненты комплекса нумеруют нижними индексами, дифференциал обозначают буквой ∂, так что диаграмма (3-4) превращается в диаграмму

$$\cdots \xrightarrow{\partial} V_{\nu+1} \xrightarrow{\partial} V_{\nu} \xrightarrow{\partial} V_{\nu-1} \xrightarrow{\partial} \cdots\,, \tag{3-5}$$

факторы $H_{\nu}(V) = \ker\left(\partial : V_{\nu} \to V_{\nu-1}\right) / \operatorname{im}\left(\partial : V_{\nu+1} \to V_{\nu}\right)$ называют *гомологиями*, элементы из $\ker \partial$ — *циклами*, а элементы из $\operatorname{im} \partial$ — *границами*[2]. Одни обозначения превращаются в другие формальной сменой знака у всех индексов с одновременным их опусканием или поднятием.

[1] и в более общих категориях, где есть обладающее надлежащими свойствами понятие *точной последовательности* стрелок

[2] и только комплексы так и остаются *ком*плексами ☺

Пример 3.1 (цепной комплекс симплициального множества)
Пусть $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ — симплициальное множество[1], и K-произвольное коммутативное кольцо. Свободный K-модуль с базисом $X_n = X([n])$ обозначается через $C_n = C_n(X, K)$ и называется модулем *n-мерных цепей* симплициального множества X с коэффициентами из K. Линейный оператор $\partial : C_n \to C_{n-1}$, действие которого на базисный вектор $x \in X_n$ задаётся правилом

$$\partial x \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i X(\partial_i) x\,, \tag{3-6}$$

где $\partial_i : [n-1] \hookrightarrow [n]$ — возрастающее вложение, не содержащее в образе числа i, называется *граничным оператором*. Он сопоставляет ориентированному симплексу его ориентированную границу[2] и имеет $\partial^2 = 0$.

Упражнение 3.1. Убедитесь в этом.

Комплекс (C, ∂) называется *цепным комплексом*, а его гомологии — *гомологиями* симплициального множества X с коэффициентами в K. В случае, когда $X = S(\mathcal{X})$ является множеством сингулярных симплексов[3] топологического пространства $\mathcal{X}$, эти гомологии называются *сингулярными гомологиями* топологического пространства $\mathcal{X}$ с коэффициентами в K и обозначаются $H_n(\mathcal{X}, K)$. Сказанное в равной степени применимо и к полусимплициальным множествам $X : \Delta_s^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$. Получающиеся при этом гомологии называют *симплициальными гомологиями* триангулированного пространства $|X|$.

Упражнение 3.2. Вычислите симплициальные гомологии $H(T, \mathbb{Z})$ тора T, полученного склейкой дуг с другом пар противоположных сторон квадрата $ABCD$, триангулированного диагональю AC, так что $X_0 = \{A = B = C = D\}$ — одна точка, $X_1 = \{[AC], [AB] = [DC], [AD] = [BC]\}$ — три отрезка, $X_2 = \{[ABC], [ACD]\}$ — два треугольника.

Пример 3.2 (тензорное произведение комплексов)
На тензорном произведении $U \otimes V$ комплексов U и V имеется каноническая структура комплекса с дифференциалом

$$d = d_{U \otimes V} \overset{\text{def}}{=} d_U \otimes 1 + 1 \otimes d_V\,. \tag{3-7}$$

Равенство $d^2 = 0$ обеспечивается кошулевым правилом знаков, согласно которому

$$(1 \otimes d_V) \circ (d_U \otimes 1) = -d_U \otimes d_V\,,$$

ибо $|d_U| = |d_V| = 1$. Поэтому $d^2 = d_U^2 \otimes 1 + d_U \otimes d_V - d_U \otimes d_V + 1 \otimes d_V^2 = 0$. Отметим, что в силу того же правила знаков результат применения обеих частей формулы (3-7) к однородным элементам выглядит так:

$$d(u \otimes v) = (d_U \otimes 1)(u \otimes v) + (1 \otimes d_V)(u \otimes v) = (d_U u) \otimes v + (-1)^{|v|} v \otimes (d_V v)$$

[1] см. прим. 1.7 на стр. 7

[2] например, границей треугольника будет его контур, обходимый в порядке возрастания номеров вершин

[3] см. прим. 1.17 на стр. 18

Аналогично определяется тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_m$ любого множества комплексов. Дифференциал на нём продолжает дифференциалы $d_i : V_i \to V_i$ по s-правилу Лейбница и равен

$$d_{\otimes V_i} = \sum_{i=1}^{m} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes d_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

(отдельные слагаемые написанной суммы перемножаются и применяются к элементам с учётом кошулева правила знаков).

3.1.3. Мультикомплексы. Мы называем *m-комплексом* $\mathbb{Z}^m$-градуированный K-модуль $V = \bigoplus\limits_{\mu \in \mathbb{Z}^m} V^{\mu}$, одновременно являющийся градуированным модулем над грассмановой алгеброй от m переменных $K \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m \rangle$, также рассматриваемой с $\mathbb{Z}^m$ гадуировкой, в которой мультистепень образующей ε_i равна i-тому стандартному базисному вектору в $\mathbb{Z}^m$. Иначе говоря, на V должно быть задано m таких K-линейных дифференциалов $d_i : V \to V$, что для каждого $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{Z}^m$

$$d_i(V^{\mu}) \subset V^{\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_i + 1, \mu_{i+1}, \dots, \mu_m}$$

и $d_i d_j + d_j d_i = 0 = d_i^2$ для всех i, j. Чаще всего мы будем иметь дело с *бикомплексами* $V = \bigoplus\limits_{p,q} V^{p,q}$, на которых действует пара дифференциалов $d_1, d_2 : V \to V$, таких что $d_1^2 = 0$, $d_2^2 = 0$, $d_1 d_2 = -d_2 d_1$, $d_1(V^{p,q}) \subset V^{p+1,q}$, $d_2(V^{p,q}) = V^{p,q+1}$.

С каждым m-комплексом V можно связать обычный $\mathbb{Z}$-градуированный комплекс $\operatorname{Tot} V$, называемый *свёрткой* или *тотальным комплексом* m-комплекса V и имеющий

$$\operatorname{Tot}^{\nu} V \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\sum \mu_i = \nu} V^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m} \quad \text{и} \quad d_{\operatorname{Tot}} = \sum d_i : \operatorname{Tot}^{\nu} V \to \operatorname{Tot}^{\nu+1} V .$$

Например, попарные тензорные произведения $U^p \otimes W^q$ однородных компонент комплексов (U, d_U) и (W, d_W) образуют бикомплекс с дифференциалами $d_1 = d_U \otimes 1_W$ и $d_2 = 1_U \otimes d_W$, и тензорное произведение комплексов $U \otimes V$ из предыдущего прим. 3.2 представляет собою тотальный комплекс этого бикомплекса.

Упражнение 3.3. Убедитесь, что для любых двух комплексов (U, d_U) и (W, d_W) модули $H^{p,q} = \operatorname{Hom}(U^{-p}, W^q)$ образуют бикомплекс с дифференциалами

$$d_1 : \varphi \mapsto (-1)^{q+p} \varphi \circ \partial_U \quad \text{и} \quad d_2 : \varphi \mapsto \partial_W \circ \varphi .$$

3.2. Категории комплексов. В этом курсе мы будем рассматривать три разных категории комплексов с одним и тем же классом объектов — комплексами K-модулей — но с разными классами морфизмов.

3.2.1. DG-категория комплексов. Аддитивная категория $\mathcal{C}$, в которой на каждом множестве стрелок $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ имеется структура комплекса, а дифференциалы композиций вычисляются по s-правилу Лейбница:

$$d(\varphi \circ \psi) = (d\varphi) \circ \psi + (-1)^{|\varphi|} \varphi \circ (d\psi) \tag{3-8}$$

называется *дифференциальной градуированной* (или *DG-*) категорией. Примером такой категории является *DG-категория комплексов*, объектами которой являются комплексы K-модулей (V, d_V), а морфизмами из (U, d_U) в (W, d_W) являются произвольные K-линейные гомоморфизмы $U \to W$, образующие градуированный модуль (3-1)

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V, W) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{GrHom}(V, W) = \bigoplus_{\nu} \mathrm{GrHom}^{\nu}(V, W) \tag{3-9}$$

с дифференциалом $d : \mathrm{GrHom}^{\nu}(V, W) \to \mathrm{GrHom}^{\nu+1}(V, W)$, переводящим однородный морфизм $\psi : V \to W$ в его s-коммутатор с дифференциалами:

$$\psi \mapsto [d, \psi] \stackrel{\mathrm{def}}{=} d_W \circ \psi - (-1)^{|\psi|} \psi \circ d_V \,.$$

Упражнение 3.4. Убедитесь, что комплекс $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V, W)$ является свёрткой бикомплекса $\mathrm{Hom}(U^p, W^q)$ из упр. 3.3, и проверьте, что $d^2 = 0$ и что дифференциал композиции вычисляется по s-правилу Лейбница (3-8).

Мы будем использовать обозначение $\mathrm{Hom}^{\nu}_{\mathrm{DG}}(V, W) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{GrHom}^{\nu}(V, W)$ для однородных компонент комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V, W)$.

3.2.2. Просто категория комплексов обозначается $\mathcal{C}om$ и имеет морфизмами K-линейные отображения степени нуль, перестановочные с дифференциалами:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}om}(V, W) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(V, W) \cap \ker d = \{\varphi : V \to W \mid \forall \nu \; \varphi(V^{\nu}) \subset W^{\nu} \;\&\; d_W \varphi = \varphi d_V\} \,.$$

Такие отображения называются *морфизмами комплексов*. Каждый морфизм комплексов $\varphi : V \to W$ корректно задаёт морфизм когомологий $\varphi_* : H(V) \to H(W)$, переводящий класс коцикла ξ по модулю кограниц в класс коцикла $\varphi(\xi)$.

Упражнение 3.5. Убедитесь в этом.

Для любой абелевой категории $\mathcal{A}$ категория $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$ комплексов из объектов категории $\mathcal{A}$ тоже абелева: ядро морфизма комплексов $\varphi : V \to W$ это подкомплекс в V, образованный ядрами морфизмов $\varphi_{\nu} = \varphi|_{V^{\nu}} : V^{\nu} \to W^{\nu}$, а коядро — фактор комплекса W, состоящий из коядер морфизмов φ_{ν}.

Упражнение 3.6. Убедитесь, что $\ker \varphi_{\nu}$ действительно образуют подкомплекс[1] в V, а дифференциал d_W корректно задаёт структуру комплекса на факторе $W / \varphi(V)$, и проверьте, что образ морфизма φ является подкомплексом в W и канонически изоморфен кообразу $\mathrm{coim}\, \varphi = V / \ker \varphi$.

Другой способ проверить, что категория $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$ абелева, — сказать, что комплекс K-модулей V это градуированный модуль над градуированной алгеброй[2] грассмановых многочленов от одной переменной $K\langle\varepsilon\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} K[\varepsilon]/(\varepsilon^2) = K \cdot 1 \oplus K \cdot \varepsilon$, в которой константы имеют степень 0, а переменная ε — степень 1 и $\varepsilon^2 = 0$: действие элемента ε на V это и есть дифференциал.

Упражнение 3.7. Покажите, что категория градуированных модулей $M = \bigoplus\limits_{k \in \mathbb{Z}} M_k$ над любым градуированным кольцом $A = \bigoplus\limits_{k \geqslant 0} A_k$ с сохраняющими градуировку A-линейными отображениями в качестве стрелок абелева.

[1] т. е. d_V переводит $\ker \varphi_{\nu}$ в $\ker \varphi_{\nu+1}$

[2] по определению это означает, что однородные степени m элементы алгебры действуют на модуле однородными K-линейными операторами степени m

Предложение 3.1
С любой точной тройкой комплексов $0 \to U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \to 0$ функториально[1] связана длинная точная последовательность когомологий

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_*} H^i(V) \xrightarrow{\psi_*} H^i(W) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(V) \xrightarrow{\psi_*} \cdots, \tag{3-10}$$

в которой *связывающий гомоморфизм* $\delta : H^i(W) \to H^{i+1}(U)$ переводит когомологический класс коцикла $\xi \in \ker d_W$ в когомологический класс коцикла $d_V(\eta)$, где $\eta \in \in \psi^{-1}(\xi)$ — произвольный подъём коцикла ξ в модуль V.

Доказательство. Корректность определения гомоморфизма δ проверяется ползаньем по коммутативной диаграмме с точными строками

$$\begin{tikzcd}
{} & {} & {} \\
U^{i+1} \arrow[u, "d_U"'] \arrow[r, hook, "\varphi"] & V^{i+1} \arrow[u, "d_V"'] \arrow[r, two heads, "\psi"'] & W^{i+1} \arrow[u, "d_W"'] \\
U^{i} \arrow[u, "d_U"'] \arrow[r, hook, "\varphi"] & V^{i} \arrow[u, "d_V"'] \arrow[r, two heads, "\psi"'] & W^{i} \arrow[u, "d_W"'] \arrow[ull, dotted, "\delta"] \\
U^{i-1} \arrow[u, "d_U"'] \arrow[r, hook, "\varphi"] & V^{i-1} \arrow[u, "d_V"'] \arrow[r, two heads, "\psi"'] & W^{i-1} \arrow[u, "d_W"'] \arrow[ull, dotted, "\delta"] \\
{} \arrow[u, "d_U"'] & {} \arrow[u, "d_V"'] & {} \arrow[u, "d_W"']
\end{tikzcd}$$

Упражнение 3.8. Убедитесь, что образ $d_V(\eta)$ любого элемента $\eta \in \psi^{-1}(\xi)$ лежит в $\ker d_V \cap \ker \psi \subset \ker d_U \subset U$, а его класс в $H(U)$ не зависит от выбора η и не меняется при добавлении к ξ кограницы.

Функториальная зависимость морфизмов φ_*, ψ_* и δ от точной тройки очевидна из их конструкции, как и то, что последовательность (3-10) является комплексом. Проверку его точности мы оставляем читателю. $\square$

Упражнение 3.9. Проверьте точность последовательности (3-10).

Определение 3.1 (сдвиг градуировки)
Функтор сдвига $S : \mathcal{Com} \to \mathcal{Com}$, $V \mapsto SV = V[1]$, действует на комплекс по правилу $SV^\nu = V^{\nu+1}$, $d_{SV} = -d_V$, так что *отображение сдвига* $s : V \to V[1]$, тождественно действующее на элементы и лежащее в $\mathrm{Hom}^{-1}_{\mathrm{DG}}(V, V[1])$, s-коммутирует с дифференциалом: $[d, s] = d_{SV}s + sd_V = 0$. Действие функтора S на морфизмы тождественно. Функтор S обратим. Его итерации обозначаются $S^kV = V[k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

[1] в том смысле, что сопоставление точной тройке её длинной последовательности когомологий является функтором из категории точных трёхчленных комплексов в категорию точных комплексов (в качестве стрелок в обеих категориях рассматриваются морфизмы комплексов)

Пример 3.3 (конус морфизма)
С каждым морфизмом комплексов $\varphi : U \to W$ функториально связан сосредоточенный в двух столбцах с номерами -1 и 0 бикомплекс

$$\begin{tikzcd} {} & {} \\ U^{i+1} \arrow[u, "-d_U"] \arrow[r, "\varphi"] & W^{i+1} \arrow[u, "d_W"'] \\ U^{i} \arrow[u, "-d_U"] \arrow[r, "\varphi"] & W^{i} \arrow[u, "d_W"'] \\ U^{i-1} \arrow[u, "-d_U"] \arrow[r, "\varphi"] & W^{i-1} \arrow[u, "d_W"'] \\ {} \arrow[u, "-d_U"] & {} \arrow[u, "d_W"'] \end{tikzcd} \tag{3-11}$$

свёртка которого называется *конусом* морфизма φ и обозначается $\mathrm{Con}(\varphi)$. Как градуированный модуль $\mathrm{Con}(\varphi) \simeq U[1] \oplus W$ имеет $\mathrm{Con}^i(\varphi) = U^{i+1} \oplus W^i$, но дифференциал

$$d_{\mathrm{Con}(\varphi)} : U[1] \oplus W \to U[1] \oplus W \,, \quad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -d_U & 0 \\ \varphi & d_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \tag{3-12}$$

не равен прямой сумме дифференциалов. Комплекс $W \subset \mathrm{Con}(\varphi)$ является подкомплексом в $\mathrm{Con}(\varphi)$ и фактор $\mathrm{Con}(\varphi)/W \simeq V[1]$, однако точная тройка комплексов

$$0 \to W \xrightarrow{\iota_\varphi} \mathrm{Con}(\varphi) \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1] \to 0 \,, \tag{3-13}$$

вообще говоря, *не расщепляется* в категории $\mathcal{Com}$. Длинная точная последовательность когомологий тройки (3-13) имеет вид

$$\cdots \to H^i(\mathrm{Con}\,\varphi) \xrightarrow{\pi_{\varphi *}} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(W) \xrightarrow{\iota_{\varphi *}} H^{i+1}(\mathrm{Con}\,\varphi) \to \cdots \,, \tag{3-14}$$

и её связывающий гомоморфизм $\delta : H^i(U[1]) = H^{i+1}(U) \to H^{i+1}(W)$ совпадает с φ_*.

Упражнение 3.10. Убедитесь в этом.

3.2.3. Гомотопическая категория комплексов обозначается $\mathcal{Ho}$ и имеет в качестве морфизмов нулевые когомологии комплексов $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Ho}}(V,W) \overset{\text{def}}{=} H^0\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V,W)\right) = \frac{\mathrm{Hom}_{\mathcal{Com}}(V,W)}{\mathrm{im}\left(d : \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathrm{DG}}(V,W) \to \mathrm{Hom}^{0}_{\mathrm{DG}}(V,W)\right)} \,.$$

Иначе говоря, морфизмы в гомотопической категории $\mathcal{Ho}$ суть морфизмы комплексов $\varphi : V \to W$, рассматриваемые с точностью до сложения с морфизмами вида $[d,\gamma] = d_W\gamma - \gamma d_V$, где $\gamma : V \to W$ — любое K-линейное отображение степени -1. Морфизмы комплексов вида $[d,\gamma]$ называются *гомотопными нулю*. Морфизмы комплексов φ и ψ с гомотопной нулю разностью $\varphi - \psi = [d,\gamma]$ называются *гомотопными*, а отображение γ называется в этой ситуации *гомотопией* между φ и ψ, что записывается как $\varphi \underset{\gamma}{\sim} \psi$. Итак, морфизмы в категории $\mathcal{Ho}$ это морфизмы комплексов с точностью до гомотопии.

Упражнение 3.11. Убедитесь, что гомотопные нулю морфизмы образуют двусторонний идеал в $\mathrm{Mor}(\mathcal{Com})$, т. е. $\varphi \underset{\gamma}{\sim} 0 \Rightarrow \varphi\psi \underset{\gamma\psi}{\sim} 0$ и $\eta\varphi \underset{\eta\gamma}{\sim} 0$ для всех таких стрелок $\psi, \eta \in \mathrm{Mor}(\mathcal{Com})$, что композиции $\varphi\psi$ и $\eta\varphi$ определены.

Тем самым, композиция морфизмов корректно определена на классах гомотопных морфизмов, и $\mathcal{Ho}$ действительно является категорией.

Гомотопный нулю морфизм $\varphi = d_W\gamma + \gamma d_V : V \to W$ задаёт нулевой морфизм когомологий $\varphi_* : H(V) \to H(W)$, т. к. для любого коцикла $\xi \in \ker d_V$ коцикл $\varphi(\xi) = d_W(\gamma\xi) + \varphi\gamma(d_V\xi) = d_W(\gamma\xi)$ является кограницей. Поэтому гомотопные морфизмы комплексов одинаково действуют на когомологиях. В частности, при вычислении когомологий произвольного комплекса $V \in \mathcal{Com}$ можно заменить этот комплекс любым другим комплексом W, изоморфным V в категории $\mathcal{Ho}$ — когомологии у W будут те же, что и у V, хотя изоморфизма между V и W в категории $\mathcal{Com}$ при этом может и не быть.

Определение 3.2
Комплекс V называется *стягиваемым*, если $\mathrm{Id}_V \underset{\gamma}{\sim} 0$. Гомотопия γ между нулевым и тождественным эндоморфизмами называется *стягивающей гомотопией*.

Упражнение 3.12. Убедитесь, что в категории $\mathcal{Ho}$ все стягиваемые комплексы изоморфны нулевому комплексу и, в частности, ацикличны.

Пример 3.4 (конус тождественного морфизма)
Конус $\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)$ тождественного морфизма $\mathrm{Id}_V : V \to V$ стягиваем посредством стягивающей гомотопии, которая тождественно отображает слагаемое $V \subset \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)$ в такое же слагаемое $V \subset \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)[-1]$ и аннулирует слагаемое $V[1] \subset \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)$:

$$\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V) = V[1] \oplus V \xrightarrow{\gamma} V \oplus V[-1] = \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)[-1] \ : \quad \begin{pmatrix} v' \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

В самом деле, s-коммутатор $\left[d_{\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)}, \gamma\right]$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d_V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & d_V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)}.$$

3.3. Отмеченные треугольники. Конус $\mathrm{Con}(\varphi)$ произвольного морфизма комплексов $\varphi : U \to W$ включается в категории $\mathcal{Com}$ в точную тройку[1]

$$0 \to W \xrightarrow{\iota_\varphi} \mathrm{Con}(\varphi) \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1] \to 0 \tag{3-15}$$

Мы собираемся построить в категории $\mathcal{Ho}$ изоморфизмы

$$\alpha' : W[1] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Con}\left(\pi_\varphi\right) \quad \text{и} \quad \alpha'' : \mathrm{Con}\left(\iota_\varphi\right) \xrightarrow{\sim} U[1] \tag{3-16}$$

[1] см. прим. 3.3 на стр. 58

включающиеся в бесконечную коммутативную в $\mathcal{H}o$ периодическую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\pi_\varphi"] & U \arrow[r, "\iota_{\pi_\varphi}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Con}(\pi_\varphi)[-1] \arrow[r, "\pi_{\pi_\varphi}"] & \mathrm{Con}(\varphi) \arrow[r, "\pi_\varphi"] \arrow[d, equal] & U[1] \arrow[r, "\iota_{\pi_\varphi}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Con}(\pi_\varphi) \arrow[r, "\pi_{\pi_\varphi}"] & {} \\
{} \arrow[r, "\pi_\varphi"] & U \arrow[r, "\varphi"] & W \arrow[r, "\iota_\varphi"] \arrow[u, "\alpha'"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Con}(\varphi) \arrow[r, "\pi_\varphi"] \arrow[d, equal] & U[1] \arrow[r, "\varphi"] & W[1] \arrow[r, "\iota_\varphi"] \arrow[u, "\alpha'"] \arrow[d, equal] & {} \\
{} \arrow[r, "\iota_\varphi"] & \mathrm{Con}(\iota_\varphi)[-1] \arrow[r, "\pi_{\iota_\varphi}"] \arrow[u, "\alpha''"] & W \arrow[r, "\iota_\varphi"] & \mathrm{Con}(\varphi) \arrow[r, "\iota_{\iota_\varphi}"] & \mathrm{Con}(\iota_\varphi) \arrow[r, "\pi_{\iota_\varphi}"] \arrow[u, "\alpha''"] & W[1] \arrow[r, "\iota_\varphi"] & {}
\end{tikzcd}$$

означающую, что в категории $\mathcal{H}o$ любой морфизм $\varphi : U \to W$ производит бесконечную периодическую последовательность

$$\cdots \xrightarrow{\varphi} W[-1] \xrightarrow{\iota_\varphi} \mathrm{Con}(\varphi)[-1] \xrightarrow{\pi_\varphi} U \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\iota_\varphi} \mathrm{Con}(\varphi) \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1] \xrightarrow{\varphi} \cdots \tag{3-17}$$

каждый член X которой канонически изоморфен конусу морфизма между двумя предыдущими членами, причём эти изоморфизмы превращают входящую в X и выходящую из X стрелки последовательности (3-17) в тройку (3-15). Поскольку

$$\mathrm{Con}\left(\pi_\varphi\right)[-1] = \mathrm{Con}(\varphi) \oplus U = U[1] \oplus W \oplus U$$
$$\mathrm{Con}\left(\iota_\varphi\right) = W[1] \oplus \mathrm{Con}(\varphi) = W[1] \oplus U[1] \oplus W$$

как градуированные модули, а их дифференциалы задаются матрицами[1]:

$$\partial' = \begin{pmatrix} -d_U & 0 & 0 \\ \varphi & d_W & 0 \\ -1_U & 0 & d_U \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \partial'' = \begin{pmatrix} -d_W & 0 & 0 \\ 0 & -d_U & 0 \\ 1_W & \varphi & d_W \end{pmatrix}.$$

W является подкомплексом в $\mathrm{Con}\left(\pi_\varphi\right)[-1]$, а $\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_W)$ — подкомплексом в $\mathrm{Con}\left(\iota_\varphi\right)$, и в категории $\mathcal{C}om$ имеются точные тройки комплексов:

$$0 \to W \xrightarrow{\alpha'} \mathrm{Con}\left(\pi_\varphi\right)[-1] \to \mathrm{Con}(-\mathrm{Id}_U) \to 0 \tag{3-18}$$

$$0 \to \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_W) \to \mathrm{Con}\left(\iota_\varphi\right) \xrightarrow{\alpha''} U[1] \to 0\,. \tag{3-19}$$

Зададим морфизмы комплексов $\beta' : \mathrm{Con}\left(\pi_\varphi\right)[-1] \to W$ и $\beta'' : U[1] \to \mathrm{Con}\left(\iota_\varphi\right)$ как

$$\beta' : \begin{pmatrix} u_1 \\ w \\ u \end{pmatrix} \mapsto w + \varphi u \quad \text{и} \quad \beta'' : u_1 \mapsto \begin{pmatrix} -\varphi u_1 \\ u_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3.13. Убедитесь, что $\alpha'\varphi = \iota_{\pi_\varphi}$, $\alpha''\iota_{\iota_\varphi} = \pi_\varphi$, $\varphi\alpha'' = \pi_{\iota_\varphi}$, $\pi_{\pi_\varphi}\alpha' = \iota_\varphi$ в категории $\mathcal{C}om$ и что β' и β'' являются, соответственно, левым обратным к α' и правым обратным к α'' морфизмами комплексов, т. е. $\beta'\partial' = d_W\beta'$, $\beta''d_{U[1]} = \partial''\beta''$, $\beta'\alpha' = \mathrm{Id}_W$, $\alpha''\beta'' = \mathrm{Id}_{U[1]}$.

[1] см. формулу (3-12) на стр. 59

Стягивающая конус тождественного морфизма гомотопия из прим. 3.4 поднимается на средние члены троек (3-18) и (3-19) до гомотопий

$$\gamma' : U[1] \oplus W \oplus U = \mathrm{Con}\left(\pi_\varphi\right)[-1] \to \mathrm{Con}\left(\pi_\varphi\right)[-2] = U \oplus W \oplus U[-1]\,, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ w \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma'' : W[1] \oplus U[1] \oplus W = \mathrm{Con}\left(\iota_\varphi\right) \to \mathrm{Con}\left(\iota_\varphi\right)[-1] = W \oplus U \oplus W[-1]\,, \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ u_1 \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

стягивающих фактор $\mathrm{Con}(-\mathrm{Id}_U)$ в (3-18) и подкомплекс $\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_W)$ (3-19) и устанавливающих эквивалентности $1 - \alpha'\beta' \underset{\gamma'}{\sim} 0$ и $1 - \alpha''\beta'' \underset{\gamma''}{\sim} 0$:

$$\begin{tikzcd}
{} & \begin{pmatrix} -du_1 \\ \varphi u_1 + dw \\ -u_1 + du \end{pmatrix} \arrow[rr, mapsto, "\gamma'"] & {} & \begin{pmatrix} u_1 - du \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[dr, dash, dotted] & {} \\
\begin{pmatrix} 0 \\ w + \varphi u \\ 0 \end{pmatrix} & w + \varphi u \arrow[l, mapsto, "\alpha'"'] & \begin{pmatrix} u_1 \\ w \\ u \end{pmatrix} \arrow[l, mapsto, "\beta'"'] \arrow[ul, mapsto, "\partial'"'] \arrow[dl, mapsto, "\gamma'"] \arrow[rr, mapsto, "\partial'\gamma' + \gamma'\partial'"] & {} & \begin{pmatrix} u_1 \\ -\varphi u \\ u \end{pmatrix} \arrow[dl, dash, dotted] \\
{} & \begin{pmatrix} -u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[rr, mapsto, "\partial'"'] & {} & \begin{pmatrix} du \\ -\varphi u \\ u \end{pmatrix} & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} & \begin{pmatrix} w_1 + \varphi u_1 + dw \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[dl, dash, dotted] & {} & \begin{pmatrix} -dw_1 \\ -du_1 \\ w_1 + \varphi u_1 + dw \end{pmatrix} \arrow[ll, mapsto, "\gamma''"'] & {} \\
\begin{pmatrix} w_1 + \varphi u_1 \\ 0 \\ w \end{pmatrix} \arrow[dr, dash, dotted] & {} & \begin{pmatrix} w_1 \\ u_1 \\ w \end{pmatrix} \arrow[ll, mapsto, "\partial''\gamma'' + \gamma''\partial''"'] \arrow[ur, mapsto, "\partial''"] \arrow[dr, mapsto, "\gamma''"'] \arrow[r, mapsto, "\alpha''"] & u_1 \arrow[r, mapsto, "\beta''"] & \begin{pmatrix} -\varphi u_1 \\ u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
{} & \begin{pmatrix} -dw \\ 0 \\ w \end{pmatrix} & {} & \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[ll, mapsto, "\partial''"] & {}
\end{tikzcd}$$

означающие, что α' обратен β', а α'' обратен β'' в категории $\mathcal{Ho}$.

Определение 3.3

Периодическая последовательность в гомотопической категории комплексов $\mathcal{Ho}$ вида

$$\cdots \xrightarrow{\alpha} B[-1] \xrightarrow{\beta} C[-1] \xrightarrow{\gamma} A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1] \xrightarrow{\alpha} B[1] \xrightarrow{\beta} \cdots$$

называется *отмеченным треугольником*, если она изоморфна в категории $\mathcal{H}o$ последовательности (3-17), т. е. когда каждый её член X можно отождествить с конусом морфизма между двумя предыдущими членами таким изоморфизмом, который переводит входящую в X и выходящую из X стрелки в тройку (3-15).

Предложение 3.2
Каждый морфизм $A \xrightarrow{\varphi} B$ в категории $\mathcal{H}o$ включается в отмеченный треугольник

$$\cdots \xrightarrow{\pi} A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\iota} \mathrm{Con}(\varphi) \xrightarrow{\pi} A[1] \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\iota} \cdots , \tag{3-20}$$

и сопоставление $\varphi \mapsto \mathrm{Con}\,\varphi$ задаёт функтор из категории диаграмм вида $\bullet \to \bullet$ в категорию отмеченных треугольников, т. е. любой коммутативный квадрат $\beta\varphi = \varphi'\alpha$ продолжается до морфизма отмеченных треугольников

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\pi"] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\beta"] & \mathrm{Con}(\varphi) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\gamma"] & A[1] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & B[1] \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\beta"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\pi'"] & A' \arrow[r, "\varphi'"] & B \arrow[r, "\iota"] & \mathrm{Con}(\varphi') \arrow[r, "\pi'"] & A'[1] \arrow[r, "\varphi'"] & B'[1] \arrow[r, "\iota'"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

где все квадраты коммутативны, и композиция морфизмов между диаграммами $\bullet \to \bullet$ переходит в композицию морфизмов между треугольниками.

Доказательство. Первое уже было проверено выше. Морфизм $\gamma : A[1] \oplus B \to A'[1] \oplus B'$ задаётся диагональной матрицей из морфизмов α и β. □

Предложение 3.3 (точная последовательность когомологий)
Для каждого отмеченного треугольника $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1]$ в гомотопической категории $\mathcal{H}o(\mathcal{A})$ комплексов объектов абелевой категории $\mathcal{A}$ в самой категории $\mathcal{A}$ имеет место длинная точная последовательность когомологий

$$\cdots \xrightarrow{\gamma_*} H^i(A) \xrightarrow{\alpha_*} H^i(B) \xrightarrow{\beta_*} H^i(C) \xrightarrow{\gamma_*} H^{i+1}(A) \xrightarrow{\alpha_*} \cdots . \tag{3-21}$$

Доказательство. С каждым из морфизмов α, β, γ связана точная тройка (3-15) в категории $\mathcal{C}om$. Выше мы видели, что в категории $\mathcal{H}o$ все эти тройки соединяются в одну коммутативную диаграмму, строки которой — треугольники (3-20)

$$\begin{tikzcd}
C[-1] \arrow[r, hook] & \mathrm{Con}(\beta)[-1] \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & B \arrow[d, equal] & & & \\
& A \arrow[r, hook] \arrow[ur, "\alpha"] & \mathrm{Con}(\gamma)[-1] \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & C \arrow[d, equal] & & \\
& & B \arrow[r, hook] \arrow[ur, "\beta"] & \mathrm{Con}(\alpha) \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & A[1] \arrow[d, equal] & \\
& & & C \arrow[r, hook] \arrow[ur, "\gamma"] & \mathrm{Con}(\beta) \arrow[r, two heads] & B[1]
\end{tikzcd}$$

а вертикальные равенства — изоморфизмы в категории $\mathcal{H}o$. Поэтому длинные точные последовательности когомологий всех треугольников отождествляются друг с другом в одну длинную точную последовательность (3-21). □

Предложение 3.4 (конус композиции или диаграмма октаэдра)
Для любой пары отмеченных треугольников $A \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} B$ и $C \xrightarrow{\gamma} E \xrightarrow{\delta} D$ с общей вершиной E имеется такой канонический изоморфизм конусов композиций

$$\mathrm{Con}(\delta\alpha) \simeq \mathrm{Con}(\beta\gamma)\,,$$

что будучи отождествлёнными при помощи этого изоморфизма, они включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, "\delta\alpha"] \arrow[ddr, "\alpha"'] & & & \\
& & D \arrow[dr, "\delta'"] & \\
& E \arrow[ur, "\delta"'] \arrow[dr, "\beta"] & & F = \mathrm{Con}(\delta\alpha) = \mathrm{Con}(\beta\gamma) \\
& & B \arrow[ur, "\beta'"'] & \\
C \arrow[uur, "\gamma"] \arrow[urr, "\beta\gamma"'] & & &
\end{tikzcd} \tag{3-22}$$

где $F = \mathrm{Con}(\delta\alpha) = \mathrm{Con}(\beta\gamma)$, а $A \xrightarrow{\delta\alpha} D \xrightarrow{\delta'} F$ и $C \xrightarrow{\beta\gamma} B \xrightarrow{\beta'} F$ — отмеченные треугольники. Иначе говоря, на картинке ниже левая диаграмма производит правую

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "\delta\alpha"'] & & B \arrow[ll, squiggly, "\varphi"'] \\
& E \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dl, "\delta"] & \\
D \arrow[rr, squiggly, "\psi"'] & & C \arrow[ul, "\gamma"'] \arrow[uu, "\beta\gamma"']
\end{tikzcd}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[dd, "\delta\alpha"'] & & B \arrow[ll, squiggly, "\varphi"'] \arrow[dl, "\beta'"] \\
& F \arrow[ul, squiggly, "\alpha'"] \arrow[dr, squiggly, "\gamma'"] & \\
D \arrow[ur, "\delta'"] \arrow[rr, squiggly, "\psi"'] & & C \arrow[uu, "\beta\gamma"']
\end{tikzcd} \tag{3-23}$$

в которой $\alpha'\beta' = \varphi$, $\gamma'\delta' = \psi$, и обе они соединяются в одну диаграмму из рёбер октаэдра с экватором $ABCD$, треугольные грани которого состоят из чередующихся в шахматном порядке коммутативных и отмеченных треугольников[1], а меридиан $EBFD$ коммутативен.

Доказательство. □

[1] в диаграммах (3-23) стрелки каждого отмеченного треугольника задают циклический порядок на его вершинах, а стрелки каждого коммутативного — линейный, при этом волнистые стрелки вроде $B \rightsquigarrow A$ обозначают морфизмы степени 1, т. е. стрелки вида $B \to A[1]$ в соответствующих отмеченных треугольниках

3.4. Комплексы Кошуля. Рассмотрим коммутативное кольцо K и для произвольного элемента $f \in K$ обозначим через K_f двучленный комплекс

$$0 \to K \xrightarrow{f} K \to 0\,, \tag{3-24}$$

сосредоточенный в степенях -1 и 0, дифференциалом в котором является гомоморфизм умножения на $f \colon x \mapsto fx$. Когомологии комплекса K_f суть $H^0(K_f) = K/(f)$ и $H^{-1}(K_f) = \operatorname{Ann} f = \{a \in K \mid af = 0\}$.

Лемма 3.1
Любой комплекс K-модулей C вписывается в категории $\mathcal{C}om$ в точную тройку

$$0 \to C \hookrightarrow K_f \otimes C \twoheadrightarrow C[1] \to 0 \tag{3-25}$$

которая производит длинную точную последовательность когомологий

$$\cdots \to H^i(C) \xrightarrow{f} H^i(C) \to H^i(K_f \otimes C) \to H^{i+1}(C) \xrightarrow{f} H^{i+1}(C) \to \cdots$$

со связывающим гомоморфизмом $\delta : H^i(C[1]) = H^{i+1}(C) \to H^{i+1}(C)$, $\delta(x) = fx$.

Доказательство. Комплекс $K_f \otimes C$ имеет компонентой степени k сумму

$$K_f^{-1} \otimes C^{k+1} \oplus K_f^0 \otimes C^k = C^{k+1} \oplus C^k\,,$$

и как K-модуль изоморфен $C[1] \oplus C$, а его дифференциал $f \otimes 1 + 1 \otimes d_C$ действует согласно Кошулеву правилу знаков: $1 \otimes c^{k+1} \mapsto f \otimes c^{k+1} - 1 \otimes dc^{k+1}$, $1 \otimes c^k \mapsto 1 \otimes dc^k$. Таким образом, комплекс $K_f \otimes C$ совпадает с конусом морфизма $f : C \to C$, $c \mapsto fc$, и все утверждения вытекают из прим. 3.3 на стр. 58. □

Следствие 3.1
Если $f \in K$ обратим, то комплекс $K_f \otimes C$ ацикличен для любого комплекса C. □

Следствие 3.2
Если $f \in K$ не делит нуль, то комплекс $H^i\left(K_f \otimes C\right) \simeq H^i(C)/f \cdot H^i(C)$ при всех i. □

Пример 3.5 (комплекс Кошуля последовательности элементов)
Для конечной последовательности $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ тензорное произведение

$$K_{f_1 f_2 \cdots f_m} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\alpha=1}^{m} K_{f_\alpha}$$

двучленных комплексов (3-24) называется *комплексом Кошуля* (упорядоченного) набора элементов $f_1, f_2, \dots, f_m$. Комплекс Кошуля сосредоточен в степенях от $-m$ до 0, и его компонента степени $-k$ является прямой суммой $\binom{m}{k}$ свободных модулей $K^{\otimes m} = K \otimes K \otimes \cdots \otimes K \simeq K$ ранга 1, занумерованных возрастающими последовательностями $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ индексов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant m$, равных номерам тех k из m тензорных сомножителей, что имеют степень -1. Если сопоставить грассманов моном

$\xi_I = \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k}$ базисному вектору $1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$ того произведения, где степени единиц, стоящих в позициях $i_1, i_2, \dots, i_k$ равны -1, а степени остальных нуль, то компонента степени $-k$ комплекса $K_{f_1 f_2 \dots f_m}$ изоморфно отобразится на компоненту степени k грассмановой алгебры $\Lambda(K^m)$ свободного K-модуля ранга m с базисом $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$. При этом отождествлении дифференциал комплекса Кошуля запишется грассмановым дифференциальным оператором

$$\partial = \sum_{\alpha=1}^{m} f_\alpha \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} : \Lambda^k\left(K^m\right) \to \Lambda^{k-1}\left(K^m\right), \quad \omega \mapsto \sum_{\alpha=1}^{m} f_\alpha \cdot \partial\omega / \partial\xi_\alpha, \tag{3-26}$$

а сам комплекс приобретёт вид

$$0 \to \Lambda^m\left(K^m\right) \to \Lambda^{m-1}\left(K^m\right) \to \dots \to \Lambda^2\left(K^m\right) \to K^m \to K \to 0 \tag{3-27}$$

(самый правый ненулевой дифференциал переводит ξ_i в $f_i \in K$).

Определение 3.4
Последовательность $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ называется *регулярной*, если класс элемента f_i не делит нуль в факторе $K/(f_{i+1}, \dots, f_m)$ при всех[1] $0 \leqslant i \leqslant m$.

Из сл. 3.1 и сл. 3.2 убывающей индукцией по m получаем

Следствие 3.3
Если элементы $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ образуют регулярную последовательность, комплекс Кошуля (3-27) имеет $H^0(K_{f_1 f_2 \dots f_m}) \simeq K/(f_1, f_2, \dots, f_m)$ и ацикличен во всех отрицательных степенях. В частности, если хоть один из элементов f_i обратим в K, комплекс Кошуля ацикличен всюду.

Пример 3.6 (комплексы Кошуля и Де Рама кольца многочленов)
Полагая в прим. 3.5 $K = SV^*$ и $f_i = x_i$, где V^* — конечномерное векторное пространство над полем $\Bbbk$ с базисом $x_1, x_2, \dots, x_n$, мы получаем из (3-27) ацикличный комплекс модулей над кольцом многочленов $SV^* = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$:

$$0 \to \Lambda^m V^* \otimes SV^* \to \dots \to \Lambda^2 V^* \otimes SV^* \to V^* \otimes SV^* \to SV^* \to \Bbbk \to 0 \tag{3-28}$$

сосредоточенный в степенях от $-m$ до $+1$ с дифференциалом

$$\partial = \sum x_i \partial/\partial\xi_i : \Lambda^k V^* \otimes S^m V^* \to \Lambda^{k-1} V^* \otimes S^{k+1} V^*, \quad \omega \otimes f \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\omega}{\partial\xi_i} \otimes x_i \cdot f, \tag{3-29}$$

где x_i и ξ_i — базисные векторы пространства V^* рассматриваемые как образующие симметрической и внешней алгебр пространства V соответственно, а самый правый ненулевой дифференциал это факторизация $SV^* \twoheadrightarrow SV^*/(x_1, x_2, \dots, x_n) \simeq \Bbbk$ кольца многочленов по идеалу многочленов без свободного члена. Все прочие модули $\Lambda^k V^* \otimes SV^*$ свободны рангов $\dim \Lambda^k V = \binom{\dim V}{k}$. Ацикличность комплекса (3-28) можно установить и без сл. 3.3 при помощи таких гомотопических соображений. На пространстве

[1] при $i = m$ это означает, что f_m не делит нуль в K

$\Lambda V^* \otimes SV^*$ помимо дифференциала Кошуля, который является гомоморфизмом SV^*-модулей и имеет бистепень $(-1,1)$ по грассмановым и коммутирующим переменным, есть ещё и *дифференциал ДеРама*, который имеет бистепень $(1,-1)$ и линеен по грассманову сомножителю. Он задаётся известной из курса анализа формулой:

$$d = \sum \xi_i \partial/\partial x_i \,:\, \Lambda^k V^* \otimes S^m V^* \to \Lambda^{k+1} V^* \otimes S^{k-1} V^*\,, \quad \omega \otimes f \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i \wedge \omega \otimes \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

и является ($\mathbb{Z}$-линейным) эндоморфизмом степени -1 комплекса (3-28).

Упражнение 3.14. Убедитесь, что $d^2 = 0$ и что коммутатор $[\partial, d] = \partial d + d\partial$ действует на компоненте $\Lambda^k V^* \otimes S^m V^*$ гомотетией с коэффициентом[1] $(k+m)$.

Из упражнения вытекает, что дифференциал Де Рама стягивает эндоморфизм комплекса (3-28), действующий на каждую однородную компоненту $\Lambda^k V^* \otimes S^m V^*$ умножением на полную степень $k+m$. Поэтому такое умножение действует нулём на когомологиях комплекса (3-28), откуда мы заключаем, что комплекс (3-28) ацикличен во всех членах, кроме разве что самого правого, где ацикличность очевидна и так. Это же рассуждение доказывает ацикличность *комплекса ДеРама*

$$\cdots \xrightarrow{d} S^3 V^* \otimes \Lambda V^* \xrightarrow{d} S^2 V^* \otimes \Lambda V^* \xrightarrow{d} V^* \otimes \Lambda V^* \xrightarrow{d} \Bbbk \to 0$$

который представляет собою бесконечный влево комплекс свободных модулей над алгеброй грассмановых многочленов ΛV^* и может восприниматься как комплекс *дифференциальных форм с полиномиальными коэффициентами* на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ посредством отождествления $\xi_i \mapsto dx_i$.

3.4.1. Комплекс Кошуля квадратичной алгебры. Предыдущий пример допускает следующее некоммутативное обобщение. Градуированная алгебра $A = T(V)/(I)$, являющаяся фактором свободной ассоциативной алгебры $T(V) = \bigoplus\limits_{k \geqslant 0} V^{\otimes k}$ конечномерного векторного пространства V над полем $\Bbbk$ по двустороннему идеалу $(I) \subset T(V)$, порождённому векторным подпространством $I \subset V \otimes V$, называется *квадратичной алгеброй*. Внешняя алгебра SV и грассманова алгебра ΛV являются примерами квадратичных алгебр и их идеалы соотношений порождаются линейными оболочками тензоров вида $v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$ и вида $v \otimes v$ соответственно. Квадратичная алгебра $B = A^! \overset{\text{def}}{=} T(V^*)/(I^\perp)$, где $I^\perp = \operatorname{Ann} I \subset V^* \otimes V^*$, называется *двойственной* к квадратичной алгебре $A = T(V)/(I)$. Очевидно, что эта двойственность рефлексивна: $A^{!!} \simeq A$.

Упражнение 3.15. Убедитесь, что квадратичные алгебры SV и ΛV^* двойственны друг другу.

Из пары двойственных квадратичных алгебр A и $B = A^!$ можно изготовить ещё одну ассоциативную алгебру $B \otimes A$, задав на тензорном произведении векторных пространств $B \otimes A$ умножение мономов согласованной с кошулевым правилом формулой

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \overset{\text{def}}{=} (-1)^{|a_2||b_1|} (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$$

[1]этот факт известен как *теорема Эйлера об однородных функциях*

и распространив его на разложимые тензоры по линейности.

Упражнение 3.16. Убедитесь, что так определённое умножение корректно определено и ассоциативно.

Тензор $\mathrm{Id}_V \in \mathrm{End}\,V \simeq V^* \otimes V \subset B \otimes A$ называется *элементом Казимира* алгебры $B \otimes A$ и обозначается $\varkappa$. В двойственных базисах x_i и e_i пространств V^* и V он записывается как $\varkappa = \sum x_i \otimes e_i$.

Упражнение 3.17. Покажите, что $\varkappa^2 = 0$ в алгебре $B \otimes A$.

Тензорное произведение векторных пространств $K_B \overset{\text{def}}{=} B \otimes A^*$ является правым $B \otimes A$-модулем, на котором элемент $b \otimes a$ действует оператором $\varrho_b \otimes \lambda_a^*$, где $\varrho_b : B \to B$, $\beta \mapsto \beta b$, — оператор правого умножения на b в B, а $\lambda_a^* : A^* \to A^*$ — оператор, двойственный к оператору $\lambda_a : A \to A$, $\alpha \mapsto a\alpha$, левого умножения на a в A. В силу упр. 3.17 правое действие оператора Казимира $\varkappa$ задаёт на K_B структуру комплекса левых B-модулей. Этот комплекс называется *комплексом Кошуля* квадратично двойственных алгебр. В терминах пары двойственных базисов $x_i \in V^*$ и $e_i \in V$ действие дифференциала задаётся формулой

$$\partial : \beta \otimes \alpha \mapsto \sum (\beta \cdot x_i) \otimes (e_i \llcorner \alpha),$$

где $\alpha \in T(V^*)$ рассматривается как полилинейная форма на пространстве V, и $e_i \llcorner \alpha$ означает подстановку в её первый аргумент вектора e_i.

Упражнение 3.18. Убедитесь, что для алгебр $A = S(V)$ и $B = \Lambda(V^*)$ оператор Казимира $\varkappa$ переводит $\Lambda^k V^* \otimes S^m V^*$ в $\Lambda^{k-1} V^* \otimes S^{k+1} V^*$ и его действие на этой однородной компоненте связано с кошулевым дифференциалом ∂ из форм. (3-29) на стр. 66 соотношением $\varkappa = m^{-1}\partial$.

3.5. Спектральные последовательности. Рассмотрим последовательность таблиц $E_0, E_1, E_2, \dots$, клетки которых занумерованы целыми числами (p, q), где p увеличивается по горизонтали, а q по вертикали. Если при каждом r

- в клетках таблицы E_r располагаются модули $E_r^{p,q}$ и задан дифференциал d_r бистепени $(r, 1-r)$ по (p, q), действующий из клеток диагонали $p + q = n$ в клетки следующей диагонали $p + q = n + 1$ со сдвигом на r единиц вправо:
$$d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r}, \quad d_r^2 = 0$$
- очередная таблица E_{r+1} состоит из когомологий предыдущей таблицы E_r:
$$E_{r+1}^{p,q} = \ker(d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r}) / d_r(E_r^{p-r,q-1+r})$$

то говорят, что эти таблицы образуют *спектральную последовательность*[1] (когомологического типа[2]). Скажем, что спектральная последовательность *стабилизируется*, если содержимое каждой клетки с какого-то момента перестаёт меняться, т. е.

$$\forall (p, q)\ \exists N = N(p, q) : \forall r \geqslant N \quad d_r\left(E_r^{p,q}\right) = 0 \quad \text{и} \quad d_r\left(E_r^{p-r,q+r-1}\right) = 0\,. \tag{3-30}$$

[1]в просторечии *спектралку*

[2]в спектралке гомологического типа таблицы нумеруют верхним индексом: $E^0, E^1, E^2, \dots$ и заполняют модулями $E^r_{p,q}$ с дифференциалами $\partial_r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ бистепени $(-r, r-1)$, бьющими из клеток диагонали $p + q = n$ в клетки предыдущей диагонали $p + q = n - 1$ со сдвигом на r единиц в влево

Например, такое заведомо происходит, когда в одной из таблиц E_r на каждой диагонали $p+q=\mathrm{const}$ имеется лишь конечное число ненулевых модулей. Если спектральная последовательность стабилизируется, то модуль $E_r^{p,q}$ с $r \geqslant N(p,q)$ из условия (3-30) обозначается $E_\infty^{p,q}$ и называется *предельным*. В этой ситуации говорят, что спектралка *сходится* к градуированным модулям

$$E_\infty^n \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$$

и пишут $E_r^{p,q} \Rightarrow E_\infty^n$. Спектральные последовательности являются основным инструментом для получения информации о когомологиях комплексов, тем или иным способом «собранных» из более элементарных комплексов. Простейшим примером этой ситуации является

3.5.1. Спектральная последовательность фильтрованного комплекса. Пусть комплекс C обладает убывающей системой подкомплексов

$$F^pC \subset C\,, \quad \text{где} \quad p \in \mathbb{Z}\,, \quad F^pC \supseteq F^{p+1}C \quad \text{и} \quad d_C(F^pC) \subset F^pC\,. \tag{3-31}$$

Фильтрация (3-31) задаёт убывающую фильтрацию на когомологиях $H(C)$, относящую в подмодуль $F^pH(C)$ все коциклы, лежащие F^pC, по модулю кограниц, попавших в F^pC. Присоединённые факторы этой фильтрации

$$\mathrm{Gr}^pH(C) = F^pH(C)/F^{p+1}H(C) \tag{3-32}$$

можно вычислять при помощи спектральной последовательности, начинающейся с таблицы E_0, столбцы которой суть присоединённые фактор комплексы Gr^pC фильтрации FC, выровненные по вертикалям так, чтобы n-тый член C^n комплекса C был распределён вдоль n-той диагонали $p+q=n$ и подмодуль $F^pC^n \subset C^n$ занимал клетки с горизонтальными координатами $\geqslant p$, т. е.

$$E_0^{p,q} = \mathrm{Gr}^pC^{p+q} = F^pC^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q}\,, \tag{3-33}$$

а дифференциал $d_0 \,:\, \mathrm{Gr}^pC^{p+q} \to \mathrm{Gr}^pC^{p+q+1}$ индуцирован дифференциалом d комплекса C. Следующая таблица $E_1 = H(E_0)$ состоит из модулей когомологий дифференциала d_0:

$$E_1^{p,q} = \frac{\ker\left(d_0 \,:\, F^pC^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q} \to F^pC^{p+q+1}/F^{p+1}C^{p+q+1}\right)}{d_0\left(F^pC^{p+q-1}/F^{p+1}C^{p+q-1}\right)}$$

которые удобно отождествить с подфакторами модуля F^pC^{p+q}:

$$\begin{gathered} E_1^{p,q} \simeq Z_0^{p,q}/\left(B_0^{p,q} \cap Z_0^{p,q}\right) \simeq \left(Z_0^{p,q} + B_0^{p,q}\right)/B_0^{p,q}\,, \quad \text{где} \\ Z_0^{p,q} = \{c \in F^pC^{p+q} \mid dc \in F^{p+1}C^{p+q+1}\} \quad \text{и} \quad B_0^{p,q} = d\left(F^pC^{p+q-1}\right) + F^{p+1}C^{p+q}\,. \end{gathered} \tag{3-34}$$

Иначе говоря, таблица E_1 состоит из таких элементов $c \in F^pC^n$, которые отображаются дифференциалом d не в нуль, а в более глубокую фильтрационную компоненту $F^{p+1}C^{n+1}$ следующего члена комплекса, и рассматриваются они не по модулю кограниц $d\left(C^{n-1}\right)$, а по модулю элементов, лежащих в $d\left(F^pC^{n-1}\right) + F^{p+1}C^n$. Дифференциал

d комплекса C корректно задаёт на таких классах отображение $d_1 : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$ с $d_1^2 = 0$, действующее вдоль строк таблицы E_1.

Упражнение 3.19. Убедитесь в этом.

В следующей таблице $E_2 = H(E_1)$ стоят модули когомологий дифференциала d_1. Как подфакторы в F^pC^{p+q} они имеют вид

$$E_2^{p,q} = Z_1^{p,q}/\left(Z_1^{p,q} \cap B_1^{p,q}\right) \simeq \left(Z_1^{p,q} + B_1^{p,q}\right)/B_1^{p,q}, \quad \text{где}$$
$$Z_1^{p,q} = \{c \in F^pC^{p+q} \mid dc \in F^{p+2}C^{p+q+1}\} \quad \text{и} \quad B_1^{p,q} = d\left(F^{p-1}C^{p+q-1}\right) + F^{p+1}C^{p+q},$$

Упражнение 3.20. Убедитесь в этом.

В общем виде переход от $(r+1)$-й таблицы к $(r+2)$-й таков. Для каждого $r \geqslant 0$ положим

$$Z_r^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \{c \in F^pC^{p+q} \mid dc \in d\left(F^{p+r}C^{p+q}\right)\} \tag{3-35}$$
$$B_r^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} d\left(F^{p-r}C^{p+q-1}\right) + F^{p+1}C^{p+q} \tag{3-36}$$
$$E_{r+1}^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} Z_r^{p,q}/\left(B_r^{p,q} \cap Z_r^{p,q}\right) \simeq \left(Z_r^{p,q} + B_r^{p,q}\right)/B_r^{p,q}. \tag{3-37}$$

Правило $c \mapsto dc$ корректно задаёт дифференциал $d_{r+1} : E_{r+1}^{p,q} \to E_{r+1}^{p+r+1,q-r}$, т. к. для всех $\eta \in F^{p-r}C^{p+q-1}$ и $\zeta \in F^{p+1}C^{p+q}$ с $d(c+d\eta+\zeta) \in F^{p+r+1}C^{p+q+1}$, элемент $d(c+d\eta+\zeta) = dc+d\zeta \in dc+d\left(F^{p+1}C^{p+q}\right)$ лежит в $Z_r^{p+r+1,q-r}$ (даже в $\ker d$) и сравним с dc по модулю $B_r^{p+r+1,q-r} \cap Z_r^{p+r+1,q-r} \supset d(F^{p+1}C^{p+q})$.

Упражнение 3.21. Убедитесь, что в клетке (p,q) ядро $\ker d_{r+1} \simeq Z_{r+1}^{p,q}/\left(B_r^{p,q} \cap Z_{r+1}^{p,q}\right)$, а образ $d_{r+1}\left(E_{r+1}^{p-r-1,q+r}\right) \simeq \left(B_{r+1}^{p,q} \cap Z_{r+1}^{p,q}\right)/\left(B_r^{p,q} \cap Z_{r+1}^{p,q}\right)$.

Тем самым, модуль когомологий дифференциала d_{r+1} в клетке (p,q) изоморфен

$$\frac{Z_{r+1}^{p,q}/\left(B_r^{p,q} \cap Z_{r+1}^{p,q}\right)}{\left(B_{r+1}^{p,q} \cap Z_{r+1}^{p,q}\right)/\left(B_r^{p,q} \cap Z_{r+1}^{p,q}\right)} \simeq \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{Z_{r+1}^{p,q} \cap B_{r+1}^{p,q}} = E_{r+2}^{p,q}.$$

Итак, таблицы E_r, составленные из модулей (3-37), образуют спектральную последовательность, начинающуюся таблицами (3-33) и (3-34).

Предложение 3.5
Пусть на комплексе C задана такая убывающая фильтрация (3-31), что для каждого n подмодули F^pC^n совпадают с C при всех $p \ll 0$ и зануляются при всех $p \gg 0$. Тогда существует спектральная последовательность с $E_1^{p,q} = H^{p+q}\left(\mathrm{Gr}^p C\right)$, сходящаяся к присоединённым факторам индуцированной убывающей фильтрации на $H(C)$, т. е. имеющая $E_\infty^{p,q} \simeq \mathrm{Gr}^p H^{p+q}(C) = F^pH^{p+q}(C)/F^{p+1}H^{p+q}(C)$.

Доказательство. В условиях предложения на каждой диагонали $p+q = \mathrm{const}$ таблицы (3-33) имеется лишь конечное число ненулевых модулей. Поэтому спектральная последовательность стабилизируется и сходится к модулям $E_\infty^{p,q} = Z_\infty^{p,q}/\left(B_\infty^{p,q} \cap Z_\infty^{p,q}\right)$, где по формулам (3-35) и (3-36) $Z_\infty^{p,q} = \{c \in F^pC^{p+q} \mid dc \in F^\infty C^{p+q+1}\} = F^pC^{p+q} \cap \ker d$, а

$B_\infty^{p,q} \cap Z_\infty^{p,q} = \big(d(F^{-\infty}C^{p+q-1}) + F^{p+1}C^{p+q}\big) \cap Z_\infty^{p,q} = \operatorname{im} d \cap F^pC^{p+q} + F^{p+1}C^{p+q} \cap \ker d$, т. е.

$$\begin{aligned} E_\infty^{p,q} &\simeq \frac{F^pC^{p+q} \cap \ker d}{\operatorname{im} d \cap F^pC^{p+q} + F^{p+1}C^{p+q} \cap \ker d} \\ &\simeq \frac{\big(F^pC^{p+q} \cap \ker d\big) / \big(F^pC^{p+q} \cap \operatorname{im} d\big)}{\big(F^{p+1}C^{p+q} \cap \ker d\big) / \big(F^{p+1}C^{p+q} \cap \operatorname{im} d\big)} \simeq \\ &\simeq \frac{F^pH^{p+q}(C)}{F^{p+1}H^{p+q}(C)} = \operatorname{Gr}^p H^{p+q}(C)\,. \end{aligned}$$

□

Пример 3.7 (двучленная фильтрация)
Точная тройка комплексов $0 \to U \to V \to W \to 0$ задаёт на среднем комплексе V двучленную фильтрацию $V = F^0V \supset U = F^1V \supset 0 = F^2V$ с присоединёнными факторами $\operatorname{Gr}^0 V = V/U = W$ и $\operatorname{Gr}^1 V = U$. В этом случае таблица E_1 спектральной последовательности из предл. 3.5 сосредоточена в двух столбцах $p = 0, 1$ и имеет вид

$$\begin{array}{ccc} H^{p+1}(W) & \xrightarrow{\delta} & H^{p+2}(U) \\ \\ H^{p}(W) & \xrightarrow{\delta} & H^{p+1}(U) \\ \\ H^{p-1}(W) & \xrightarrow{\delta} & H^{p}(U) \\ \\ H^{p-2}(W) & \xrightarrow{\delta} & H^{p-1}(U) \end{array}$$

Таблица её когомологий $E_2 = H(E_1)$ совпадает с предельной таблицей E_∞ и состоит из присоединённых факторов индуцированной двучленной фильтрации на $H(V)$:

$$0 \to \operatorname{coker}\big(H^{n-1}(W) \to H^n(U)\big) \hookrightarrow H^n(V) \twoheadrightarrow \ker\big(H^n(W) \to H^{n+1}(U)\big) \to 0\,,$$

что согласуется с длинной последовательностью когомологий (3-10)

$$\cdots \to H^{n-1}(W) \xrightarrow{\delta} H^n(U) \to H^n(V) \to H^n(W) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(U) \to \cdots\,,$$

исходной точной тройки комплексов $0 \to U \to V \to W \to 0$. Таким образом, спектральная последовательность двучленной фильтрации содержит ровно столько же информации, что и длинная последовательность когомологий.

3.5.2. Спектральная последовательность бикомплекса. На тотальном комплексе[1] $C^n = \operatorname{Tot}^n(V) = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}$ бикомплекса $V = V^{p,q}$ имеются две симметричных фильтрации, получающиеся одна из другой отражением $p \leftrightarrow q$ относительно диагонали $p = q$. Первая имеет

$$F^p \operatorname{Tot}^n(V) = \bigoplus_{\nu \geqslant p} V^{\nu, n-\nu}$$

[1] см. n° 3.1.3 на стр. 56

и индуцирует убывающую фильтрацию на $H^n\left(\mathrm{Tot}^n(V)\right)$, присоединённые градуированные факторы которой можно вычислять при помощи спектральной последовательности из предл. 3.5, имеющей в столбцах начальной таблицы E_0 фактор комплексы

$$E_0^{p,*} = G^p\,\mathrm{Tot}(V) \simeq V^{p,*}$$

с дифференциалом d_0, индуцированным на них дифференциалом $d = d_\mathrm{h} + d_\mathrm{v}$ бикомплекса V, где $d_\mathrm{h} : V^{p,q} \to V^{p+1,q}$ и $d_\mathrm{v} : V^{p,q} \to V^{p,q+1}$ суть горизонтальный и вертикальный дифференциалы на V.

Упражнение 3.22. Убедитесь, что фактор комплексы $G^p\,\mathrm{Tot}(V)$ с дифференциалом d_0 суть столбцы бикомплекса V с вертикальным дифференциалом d_v.

Таким образом, таблица $E_1 = H(E_0)$ состоит из когомологий комплексов-столбцов

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}\Big(\mathrm{Gr}^p\left(\mathrm{Tot}(V)\right)\Big) = H_\mathrm{v}^q\left(V^{p,*}\right)$$

бикомплекса V, а действие на них горизонтального дифференциала d_1 таблицы E_1, индуцированного дифференциалом $d = d_\mathrm{h} + d_\mathrm{v}$ тотального комплекса, совпадает с действием на когомологии $H_\mathrm{v}^q\left(V^{p,*}\right)$ комплексов-столбцов оператора $d_{\mathrm{h}*}$, индуцированного горизонтальной составляющей d_h дифференциала бикомплекса V.

Упражнение 3.23. Убедитесь, что всякий антикоммутирующий[1] с дифференциалами d_U, d_W комплексов U, W гомоморфизм нулевой степени $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}^0(U,W)$, корректно определяет морфизм когомологий[2] $\varphi_* : H(U) \to H(W)$.

Следовательно, таблица E_2 состоит из модулей $E_2^{p,q} = H_\mathrm{h}^p\left(H_\mathrm{v}^q(V)\right)$. Меняя местами буквы p и q, получаем ещё одну спектральную последовательность с $E_2^{p,q} = H_\mathrm{v}^p\left(H_\mathrm{h}^q(V)\right)$ с дифференциалами $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p-r+1,q+r}$, наклоняющимися с ростом r влево и вверх, сходящуюся к присоединённым градуированным факторам фильтрации на когомологиях $H^n(\mathrm{Tot}(V))$ тотального комплекса, индуцированной фильтрацией

$$F^q\,\mathrm{Tot}^n(V) = \bigoplus_{\nu \geqslant q} V^{n-\nu,\nu}$$

Суммируем сказанное как

Предложение 3.6 (спектральные последовательности бикомплекса)
Каждый бикомплекс V производит пару спектральных последовательностей с E_2-членами

$$^{I}E_2^{p,q} = H_\mathrm{h}^p\left(H_\mathrm{v}^q(V)\right) \quad \text{и} \quad ^{II}E_2^{p,q} = H_\mathrm{v}^p\left(H_\mathrm{h}^q(V)\right)\,. \tag{3-38}$$

Если на каждой диагонали $p + q = \mathrm{const}$ бикомплекса V имеется лишь конечное число ненулевых модулей $V^{p,q}$, обе спектралки сходятся к присоединённым градуированным факторам некоторых фильтраций на $H^{p+q}(\mathrm{Tot}(V))$. □

[1] в том смысле, что $d_W\varphi + \varphi d_U = 0$

[2] ср. с упр. 3.5 на стр. 57

3.5.3. Спектральная последовательность точной пары. Более общими источниками спектральных последовательностей являются *точные пары*[1], т. е. точные в каждом члене диаграммы модулей

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

Мы будем обозначать такую диаграмму (D, E, i, j, k). Композиция $d = jk : E \to E$ называется *дифференциалом* точной пары, поскольку $d^2 = jkjk = 0$, ибо $kj = 0$. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[rr, "i'"] & & D' \arrow[dl, "j'"] \\ & E' \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd}$$

где $E' = \ker d \,/\, \operatorname{im} d$, $D' = \operatorname{im} i$, $i' = i\big|_{D'}$, $j' : i(x) \mapsto j(x)$, $k' : x \,(\operatorname{mod} \operatorname{im} d) \mapsto k(x)$, называется *производной* от точной пары (D, E, i, j, k).

Упражнение 3.24. Убедитесь, что морфизмы j' и k' определены корректно, и производная (D', E', i', j', k') тоже является точной парой.

Модуль E' производной пары является подфактором исходного модуля E:

$$E' = H(E) = \ker(jk)/\operatorname{im}(jk) = k^{-1}(\ker j)/j(\operatorname{im} k) = k^{-1}(\operatorname{im} i)/j(\ker i)\,.$$

Повторяя это рассуждение, заключаем, что в r-той последовательной производной $(D_r, E_r, i_r, j_r, k_r)$ от (D, E, i, j, k)

$$E_r \simeq k_{r-1}^{-1}(\operatorname{im} i_{r-1})/j_{r-1}(\ker i_{r-1}) = k^{-1}\left(\operatorname{im} i^r\right)/j\left(\ker i^r\right)\,.$$

Если модули точной пары (D, E, i, j, k) биградуированы: $D = \bigoplus D^{p,q}$, $E = \bigoplus E^{p,q}$, а морфизмы имеют по (p, q) бистепени $\deg i = (-1, 1)$, $\deg j = (0, 0)$, $\deg k_1 = (1, 0)$, как в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
D^{p-1,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p+1,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q+2} \\
D^{p-1,q+1} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q+1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q+1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p+1,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q+1} \arrow[ull, "i"] \\
D^{p-1,q} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p+1,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q} \arrow[ull, "i"] \\
D^{p-1,q-1} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q-1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q-1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p+1,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q-1} \arrow[ull, "i"]
\end{tikzcd}$$

то размещая модули $E^{p,q}$ в клетки таблицы E_1, а их последовательные производные — в следующие таблицы $E_2, E_3, \ldots$, мы получаем спектральную последовательность с

$$E_r^{p,q} \simeq k^{-1}\left(i^{r-1}(D^{p+r,q-r+1})\right)/j\left(\ker(i^{r-1} : D^{p,q} \to D^{p-r+1,q+r-1})\right)\,. \tag{3-39}$$

[1] по-английски *exact couples*

Пример 3.8 (фильтрованные комплексы)
Если у комплекса C имеется убывающая фильтрация подкомплексами $F^pC \subset C$, то точные тройки комплексов $0 \to F^{p+1}C \to F^pC \to \mathrm{Gr}^pC \to 0$ производят длинные точные последовательности когомологий

$$\cdots \xrightarrow{k} H^n(F^{p+1}C) \xrightarrow{i} H^n(F^pC) \xrightarrow{j} H^n(\mathrm{Gr}^pC) \xrightarrow{k} H^{n+1}(F^{p+1}C) \xrightarrow{i} \cdots \tag{3-40}$$

которые собираются в точную пару $(E_1, D_1, i_1, j_1, k_1)$ биградуированных модулей

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}\left(\mathrm{Gr}^pC\right), \quad D_1^{p,q} = H^{p+q}\left(F^pC\right)$$

и морфизмов $i_1 : H^{p+q}(F^pC) \to H^{p+q}(F^{p-1}C)$, $j_1 : H^{p+q}(F^pC) \to H^{p+q}(\mathrm{Gr}^pC)$, $k_1 : H^{p+q}(\mathrm{Gr}^pC) \to H^{p+q+1}(F^{p+1}C)$, бистепеней $\deg i_1 = (-1, 1)$, $\deg j_1 = (0, 0)$, $\deg k_1 = (1, 0)$. Спектральная последовательность этой пары имеет в таблице E_r модули

$$E_r^{p,q} \simeq \frac{k^{-1}i^{r-1}\left(H^{p+q+1}(F^{p+r}C)\right)}{j\Big(\ker\left(i^{r-1} : H^{p+q}(F^pC) \to H^{p+q}(F^{p-r+1}C)\right)\Big)} \simeq$$

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.2. Транзитивность очевидна, рефлексивность — взять $\xi = \mathrm{Id}$, кососимметричность: в силу возможности сокращать слева (соотв. справа), равенства $\varphi = \psi\xi = \varphi\xi'\xi$ (соотв. $\varphi = \xi\psi = \xi\xi'\psi$) влекут $\xi'\xi = \mathrm{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \mathrm{Id}$), а равенства $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$ (соотв. $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$) влекут $\xi\xi' = \mathrm{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \mathrm{Id}$)

Упр. 1.7. Типичный ответ: «$\ln|x| + C$, где C — произвольная константа» *неверен*[1]. На самом деле деле C является сечением *постоянного пучка* $\mathbb{R}^{\sim}$ над несвязным открытым множеством $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Упр. 1.12. Элементу $a \in F(A)$ отвечает естественное преобразование $f_X : \mathrm{Hom}(A, X) \to F(X)$, посылающее стрелку $\varphi : A \to X$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратное отображение сопоставляет естественному преобразованию f_* значение отображения $f_A : h^A(A) \to F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h^A(A)$. Проверяется это с помощью построенной по произвольной стрелке $\varphi : A \to X$ диаграммы

$$\begin{tikzcd} h^A(A) = \mathrm{Hom}(A,A) \arrow[r, "h^A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \mathrm{Hom}(A,X) = h^A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X)\,, \end{tikzcd} \tag{3-41}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\mathrm{Id}_A)\big)$.

Упр. 1.22. Начальное множество и начальное топологическое пространство пусты, конечное множество и конечное топологическое пространство это одна точка. Начальный и конечный объекты категории групп это единичная группа. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей начальный и конечный объект это нуль.

Упр. 1.25. Гомоморфизмы коммутативных колец $A \leftarrow K \to A$ наделяют A и B структурами K-алгебр, и копроизведение $A \underset{K}{\otimes} B$ это *тензорное произведение* K-алгебр, т. е. фактор свободного K-модуля с базисом $A \times B$ (произведение в категории множеств) по подмодулю, порождённому всевозможными разностями

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \varkappa_1 b_1 + \varkappa_2 b_2) - \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \varkappa_j (a_i, b_j)$$

с $\lambda_i, \varkappa_i \in K$, $a_i \in A$, $\beta_j \in B$ (ср. с n° 1.5.1). Произведение на классах эквивалентности задаётся покомпонентно: $(a_1 \underset{K}{\otimes} b_1) \cdot (a_2 \underset{K}{\otimes} b_2) = (a_1 a_2) \underset{K}{\otimes} (b_1 b_2)$.

Упр. 1.27. По упр. 1.26 $\mathrm{colim}_{\to} X$ является фактором $\coprod_{\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}} X_\nu$ по наименьшему отношению эквивалентности, отождествляющему $x_\nu \in X_\nu$ с $X(\nu \to \mu)x_\nu$ для всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\mathcal{F}$. Это отношение склеивает $x_\nu \in X_\nu$ и $x_\mu \in X_\mu$ при наличии такой пары стрелок $\nu \longrightarrow \eta \longleftarrow \mu$, что $X(\nu \to \eta)x_\nu = X(\mu \to \eta)x_\mu$ в X_η. Тем самым, достаточно сделать лишь первую часть упражнения, в которой не очевидна лишь транзитивность.

[1] и в былые годы случалось, что абитуриентам ставили за такой ответ двойку на устном вступительном экзамене по математике

Если x_α эквивалентен x_β, а x_β эквивалентен x_γ, то в категории индексов $\mathcal{F}$ имеется (не обязательно коммутативная) диаграмма из таких стрелок

$$\begin{tikzcd}
 & & \varepsilon & & \\
 & & \delta \arrow[u, "\xi"] & & \\
 & \eta \arrow[ur, "\psi_{\delta\eta}"] & & \zeta \arrow[ul, "\psi_{\delta\zeta}"'] & \\
\alpha \arrow[ur, "\varphi_{\eta\alpha}"] & & \beta \arrow[ul, "\varphi_{\eta\beta}"] \arrow[ur, "\varphi_{\zeta\beta}"'] & & \gamma \arrow[ul, "\varphi_{\zeta\gamma}"']
\end{tikzcd}$$

что $X\left(\varphi_{\eta\alpha}\right)x_\alpha = X\left(\varphi_{\eta\alpha}\right)x_\beta$ и $X\left(\varphi_{\zeta\beta}\right)x_\beta = X\left(\varphi_{\zeta\gamma}\right)x_\gamma$ в категории $\mathcal{S}et$, а $\xi\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\beta} = \xi\psi_{\delta\zeta}\varphi_{\zeta\beta}$ в $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\beta,\varepsilon)$. Обозначая стрелку из последнего равенства через $\varkappa$, имеем

$$X\left(\varepsilon\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\alpha}\right)x_\alpha = X(\varkappa)x_\beta = X\left(\varepsilon\psi_{\delta\zeta}\varphi_{\zeta\gamma}\right)x_\gamma\,.$$

Упр. 2.1. Всё вытекает из дистрибутивности: $\varphi\alpha = \varphi\beta \iff \varphi(\alpha-\beta) = 0$.

Упр. 2.3. Инъективность ι_ν и сюрьективность π_ν вытекает из равенства $\pi_\nu\iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}$. Инъективность σ редуцируется к инъективности морфизма $X \oplus Y \to X \oplus Y$ суммы *двух* объектов при помощи леммы Цорна: рассмотрите чум таких подмножеств $S \subset N$, что отображение $\bigoplus\limits_{\nu\in S} X_\nu \to \prod\limits_{\nu\in S} X_\nu$ инъективно.

Упр. 2.5. В (а) по предл. 1.2 ядро задаёт правый сопряжённый функтор к функтору $\mathcal{A} \to \mathcal{A}r$, $X \mapsto \{X \to 0\}$, а коядро — левый сопряжённый функтор к функтору $\mathcal{A} \to \mathcal{A}r$, $X \mapsto \{X \to 0\}$ В (в) если φ обратим, то он не делит нуль, откуда $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$. Если $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$, то по упр. 2.4 диаграмма (2-6) приобретает вид

$$\begin{tikzcd}
0 & Y \arrow[l] & Y \arrow[l, "\mathrm{Id}_Y"'] \\
0 \arrow[r] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_X"] & X \arrow[u, "\overline{\varphi}"'] \,,
\end{tikzcd}$$

и обратимость $\overline{\varphi}$ влечёт обратимость φ. Если φ мономорфен или эпиморфен, его каноническое разложение (2-6) имеет, соответственно, вид

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{coker}\varphi & Y \arrow[l, "\varsigma"'] & \ker\varsigma \arrow[l, "\varkappa'"'] \\
0 \arrow[r] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_X"] & X \arrow[u, "\overline{\varphi}"']
\end{tikzcd}
\quad \text{или} \quad
\begin{tikzcd}
0 & Y \arrow[l] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_Y"] & Y \\
\ker\varphi \arrow[r, "\varkappa"] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varsigma'"] & \operatorname{coker}\varkappa \arrow[u, "\overline{\varphi}"'] \,,
\end{tikzcd}$$

и $\overline{\varphi}$ задаёт канонические изоморфизмы $X \xrightarrow{\sim} \ker\varsigma$ и $\operatorname{coker}\varkappa \xrightarrow{\sim} Y$.

Упр. 2.7. Коядро является фактором по *замыканию* образа. Вложение дискретной группы $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ со стандартной топологией и плотные обмотки торов мономорфны и эпиморфны, но не обратимы.

Упр. 2.9. Если существует β', то $\iota_A\beta' + \iota_B\beta : B \to A \oplus C$ является изоморфизмом. Если существует α', то изоморфизмом является $\alpha\pi_A + \alpha'\pi_B : A \oplus B \to B$.

Упр. 2.10. Если функтор F сохраняет точность троек, то он переводит каноническое разложение (2-7) любого морфизма φ в каноническое разложение морфизма $F(\varphi)$, в частности — переводит $\operatorname{im}\varphi$ в $\operatorname{im}\bigl(F(\varphi)\bigr)$.

Упр. 2.15. $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}//\mathbb{Z}$ очевидно удовлетворяют условиям лем. 2.3 на стр. 37. Гомоморфизм $\varphi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\varphi(a) \neq 0$ сначала строится на порождённом элементом a подмодуле $\mathbb{Z}\cdot a$ (изоморфном либо $\mathbb{Z}$ либо $\mathbb{Z}/(n)$), а потом по инъективности продолжается на весь модуль A.

Упр. 2.16. Подобъекты любого объекта X инъективно вкладываются в множество подгрупп группы $h^P(X) = \operatorname{Hom}(P, X)$.

Упр. 2.17. Для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ функтор $h_Y : Z \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, Y)$ переведёт точную последовательность $\operatorname{Hom}(G, X) \otimes G \xrightarrow{c} X \to \operatorname{coker} c \to 0$ в точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}(\operatorname{coker} c, Y) to \operatorname{Hom}(X, Y) \xrightarrow{c^*} \operatorname{Hom}(G, Y)^{\operatorname{Hom}(G,X)},$$

в которой c^* сопоставляет стрелке $\varphi : X \to Y$ график функции

$$h^G(\varphi) = \varphi^* : \operatorname{Hom}(G, X) \to \operatorname{Hom}(G, Y), \quad \psi \mapsto \varphi\psi .$$

Инъективность c^* равносильна инъективности $h^G : \operatorname{Hom}(X, Y) \to \operatorname{Hom}(h^G(X), h^G(Y)$. Если $\operatorname{coker} c = 0$, отображение c^* инъективно и h^G строг. Наоборот, если h^G строг, то $\operatorname{Hom}(\operatorname{coker} c, Y) = 0$ для всех Y, и беря $Y = \operatorname{coker} c$, заключаем, что $Y = 0$.

Упр. 2.18. Воспользуйтесь функториальным по X изоморфизмом $\operatorname{Hom}_R\left(X, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\right) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\bigl(X \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\bigr)$.

Упр. 2.43. Пересечение предпучков — предпучок, содержащий все h_U, коль скоро все пересекаемые предпучки его содержали. Условие локальности столь же очевидно.

Упр. 3.5. $\varphi(\xi)$ является циклом, поскольку $d_W\varphi\xi = \varphi d_V\xi = 0$, и $\varphi(\xi + d_V\zeta) = \varphi(\xi) + d_W(\varphi(\zeta))$ сравним с $\varphi(\xi)$ по модулю кограниц.

Упр. 3.9. Равенства $\psi_*\varphi_* = 0$, $\delta\psi_* = 0$ и $\varphi_*\delta = 0$ следуют прямо из определений морфизмов φ_*, ψ_* и δ. Точность композиции $\psi_*\varphi_*$: если класс коцикла η лежит в $\ker\psi_*$, то $\psi\eta = d_W\xi$, и для такого $\eta' \in V$, что $\psi\eta' = \xi$, когомологичная коциклу η разность $\eta - d_V\eta' \in \ker\psi$, а значит, найдётся такой $\zeta \in U$, что $\varphi\zeta = \eta - d_V\eta' \equiv \eta \,(\mathrm{mod}\ d)_V(V)$. Точность композиции $\delta\psi_*$: если класс коцикла $\xi = \psi(\eta) \in \ker\delta$, то $\delta\xi = d_V\varphi\zeta$ для некоторого $\zeta \in U$, откуда $\eta - \varphi\zeta \in \ker d_V$ является коциклом в V, и $\xi = \psi(\eta - \varphi\zeta)$. Точность композиции $\varphi_*\delta$: если коцикл $\zeta \in \ker d_U$ лежит в $\ker\varphi_*$, то $\varphi\zeta = d_V\eta$ для и $\eta \in V$, и $\zeta = \delta(\psi\eta)$, причём $\psi\eta \in W$ является коциклом, т. к. $d_W(\psi\eta) = \psi d_V\eta = \psi\varphi\zeta = 0$.

Упр. 3.11. Пусть $\psi : U \to V$ и $d_V\psi = \psi d_U$. Тогда для $\varphi = \delta_W\gamma + \gamma d_V$ имеем $\varphi\psi = \delta_W\gamma\psi + \gamma d_V\psi = \delta_W\gamma\psi + \gamma\psi d_U$.

Упр. 3.12. Если A стягиваем, то единственные отображения $\iota : 0 \to A$ и $\pi : A \to 0$ являются взаимно обратными изоморфизмами в категории $\mathcal{H}o$, т. к. $\pi\iota = \mathrm{Id}_0$, а $\iota\pi = 0 \sim \mathrm{Id}_A$.

Упр. 3.14. Дифференциалы ∂d и $d\partial$ переводят базисный моном

$$\xi_I \otimes x^M = \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$$

соответственно в $\big(\sum\limits_{i\in I} m_i\big) \cdot \xi_I \otimes x^M +$

$$+\sum_{j\notin I}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1} m_{i_\nu} \cdot \xi_j \wedge \xi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\xi_{i_\nu}} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{m_1} \cdots x_{i_\nu}^{m_{i_\nu}-1} \cdots x_j^{m_j+1} \cdots x_n^{m_n}$$

и $\left(\sum\limits_{j\notin I}(m_j+1)\right) \cdot \xi_I \otimes x^M +$

$$+\sum_{j\notin I}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu} m_{i_\nu} \cdot \xi_j \wedge \xi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\xi_{i_\nu}} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{m_1} \cdots x_{i_\nu}^{m_{i_\nu}-1} \cdots x_j^{m_j+1} \cdots x_n^{m_n}$$

где «крышка» означает пропуск стоящего под нею сомножителя.

Упр. 3.17. Выберем в $V \otimes V$ и $V^* \otimes V^*$ двойственные базисы ξ_ν и ξ_ν^* так, чтобы ξ_ν с $\nu \in N$ составляли базис в подпространстве $I \subset V \otimes V$, а ξ_μ^* с $\mu \notin N$ — базис в $I^\perp \subset V^* \otimes V^*$. Поскольку $\varkappa = \sum_i x_i \otimes e_i$, где x_i и e_i суть двойственные базисы в V^* и в V, его квадрат

$$\varkappa^2 = -\sum_{ij} \big(x_i \otimes x_j\big) \otimes \big(e_i \otimes e_j\big) \pmod{I^\perp \otimes \big(V \otimes V\big) + \big(V^* \otimes V^*\big) \otimes I}$$

является классом (по модулю соотношений в алгебре $B \otimes A$) эндоморфизма

$$-\mathrm{Id}_{V\otimes V} \in \big(V^* \otimes V^*\big) \otimes \big(V \otimes V\big) \simeq \mathrm{End}(V \otimes V)\,,$$

который в двойственных базисах ξ_ν и ξ_ν^* в $V \otimes V$ и $V^* \otimes V^*$ тоже запишется как

$$\varkappa^2 = -\sum_\alpha \xi_\alpha^* \otimes \xi_\alpha = -\sum_{\nu\in N} \xi_\nu^* \otimes \xi_\nu - \sum_{\mu\notin N} \xi_\mu^* \otimes \xi_\mu \in I^\perp \otimes \big(V \otimes V\big) + \big(V^* \otimes V^*\big) \otimes I\,.$$

Упр. 3.21. Ядро d_{r+1} состоит из таких элементов $c \in Z_r^{p,q}$, что $dc \in B_r^{p+r+1,q-r} = d\left(F^{p+1}C^{p+q}\right) + F^{p+r+2}C^{p+q+1}$, по модулю таких же элементов, лежащих в $B_r^{p,q} = d\left(F^{p-r}C^{p+q-1}\right) + F^{p+1}C^{p+q}$, и позволяющих отправить dc в $F^{p+r+2}C^{p+q+1}$.

Упр. 3.24. Корректность j': $j(x)$ коцикл, т. к. $dj(x) = jkj(x) = 0$; если $i(x_1) = i(x_2)$, то $x_2 = x_1 + k(y)$, и $j(x_2) = j(x_1) + dy$ когомологичен $j(x_1)$. Корректность k': $k(d(E)) \subset kj(D) = 0$. Равенство нулю композиций $i'k'$, $j'i'$ и $k'j'$ вытекает из равенства нулю композиций ik, ji и kj. Если $i'(i(x)) = i(i(x)) = 0$, то $i(x) = k(y)$, причём $d(y) = jk(y) = j(i(x)) = 0$, т. е. $\ker(i') \subset k'(E')$. Если $j'(i(x)) \in d(E)$, т. е. $j(x) = jk(y)$, то $x = k(y) + i(x')$ и $i(x) = i^2(x') \in \operatorname{im} i'$, т. е. $\ker j' \subset i'(D')$. Если $k'(y) = k(y) = 0$, то $y = j(x) = j'(i(x))$, т. е. $\ker(k') \subset j'(D')$.