Абелевы категории.

ГА1◇1. Покажите, что категория топологических абелевых групп и непрерывных гомоморфизмов аддитивна, имеет ядра и коядра любых морфизмов, но не является абелевой.

ГА1◇2. Покажите, что вложение категории пучков абелевых групп на топологическом пространстве в категорию предпучков является полным и строгим, но не точным.

ГА1◇3. Покажите, что в абелевой категории в любом расслоенном произведении

$$\begin{tikzcd} X \times_B Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd}$$

эпиморфность ξ влечёт эпиморфность ψ и ψ задаёт изоморфизм $\ker\varphi \xrightarrow{\sim} \ker\eta$.

ГА1◇4. Назовём *элементом* $a \in A$ объекта A абелевой категории $\mathcal{A}$ класс стрелок с концами в A по модулю эквивалентности, отождествляющей α_1 и α_2 при наличии такой пары эпиморфных стрелок π_1, π_2 с общим началом, что $\alpha_1\pi_1 = \alpha_2\pi_2$. Проверьте, что это эквивалентность и что всякий морфизм $\varphi : A \to B$ корректно отображает элементы A в элементы B, причём: **а)** мономорфность φ равносильна тому, что $\forall\, a \in A\ \varphi(a) = 0 \Rightarrow a = 0$ (где $0 \in A$ — класс нулевой стрелки), и тому, что $\forall\, a_1, a_2 \in A\ \varphi(a_1) = \varphi(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ **б)** эпиморфность φ равносильна тому, что $\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A : \varphi(a) = b$ **в)** $\varphi = 0 \iff \forall\, a \in A\ \varphi(a) = 0$ **г)** $\operatorname{im}\varphi$ совпадает с ядром стрелки ψ, такой что $\psi\varphi = 0$, если и только если $\forall\, b \in B : \psi(b) = 0\ \exists\, a \in A : \varphi(a) = b$ **д)** $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$, если и только если $\exists\, a \in A : \varphi(a) = 0$ и $\xi(a) = -\xi(a_1)$, $\zeta(a) = \zeta(a_2)$ для любой аннулирующей a_1 стрелки $\xi : A \to X$ и любой аннулирующей a_2 стрелки $\zeta : A \to Z$.

ГА1◇5. Покажите, что в коммутативной диаграмме с точными строками

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_4"] & X_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\ Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5 \end{tikzcd}$$

сюрьективным φ_1, инъективным φ_5 и обратимыми φ_2 и φ_4 стрелка φ_3 обратима.

ГА1◇6. Для коммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varphi'"] & B' \arrow[r, "\psi'"] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

постройте стрелку $\delta : \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha$, включающуюся в точную последовательность

$$0 \longrightarrow \ker\alpha \xrightarrow{\varphi_*} \ker\beta \xrightarrow{\psi_*} \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\alpha \xrightarrow{\varphi'_*} \operatorname{coker}\beta \xrightarrow{\psi'_*} \operatorname{coker}\gamma \longrightarrow 0$$

и выясните, влечёт ли обратимость стрелки β инъективность α и сюрьективность γ, а обратимость стрелок α и γ — обратимость β.

ГА1◇7. Покажите, что для точности тройки $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ достаточно, чтобы над любым объектом $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ естественные преобразования $0 \to h_A(X) \xrightarrow{\alpha^*} h_B(X) \xrightarrow{\beta^*} h_C(X) \to 0$ составляли точную тройку абелевых групп, и приведите пример, показывающий, что это условие не является необходимым.

ГА1◇8. Покажите, что для любого кольца R с единицей категории правых модулей над кольцами матриц $\operatorname{Mat}_{n\times n}(R)$ и $\operatorname{Mat}_{m\times m}(R)$ точно эквивалентны друг другу при всех $m, n \in \mathbb{N}$.

Персональный табель ________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 2 (4 февраля 2015)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4а			
б			
в			
г			
д			
5			
6			
7			
8			