Абелевы категории 2.

Терминология. Класс эквивалентности инъективной стрелки с концом в X по модулю правого умножения на обратимые стрелки называется*подобъектом* объекта X, а класс эквивалентности сюрьективной стрелки с началом в X по модулю левого умножения на обратимые стрелки — *фактор объектом*. Объект T называется *проективным* (соотв. *инъективным*), если функтор h^T (соотв. предпучок h_T) точен. Объект G называется *генератором* (соотв. *когенератором*), если функтор h^G (соотв. h_G) строг[1]. Объект K называется *компактным*, если функтор h^K перестановочен с (бесконечными) прямыми суммами. Стандартные *аксиомы абелевой категории* суть: (A0) есть нулевой[2] объект 0 (A1) у каждой пары объектов есть произведение и копроизведение (A2) у каждого морфизма есть ядро и коядро (A3) каждый мономорфизм[3] является ядром некоторой стрелки, а каждый эпимирфизм[4] — коядром некоторой стрелки.

ГА1◇1*. Покажите, что в категории[5] $\mathcal{C}$, удовлетворяющей (A0) – (A3): **а)** сопоставление стрелке её ядра и коядра корректно задают взаимно обратные биекции между множествами под- и фактор объектов каждого объекта **б)** любая одновременно мономорфная и эпиморфная стрелка обратима **в)** на подобъектах каждого объекта имеется частичный порядок[6], в котором любые два элемента имеют максимальную нижнюю грань (т. е. *пересечение*) **г)** любые две стрелки имеют уравнитель и коуравнитель[7] **д)** образ и кообраз любого морфизма канонически изоморфны **е)** для любой пары объектов X, Y каноническая стрелка $\iota : X \otimes Y \to X \times Y$ обратима, и диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\varphi+\psi"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & & Y \\
X \times X \arrow[r, "\varphi\times\psi"] & Y \times Y \arrow[r, "\iota^{-1}"] & Y \otimes Y \arrow[u, "\nabla_Y"']
\end{tikzcd}$$

задаёт на $\mathrm{Hom}(X, Y)$ структуру абелевой группы, делающую $\mathcal{C}$ аддитивной категорией.

ГА1◇2 (электрификация). Покажите, что всякая категория с генератором умеренно мощна[8].

ГА1◇3. Покажите, что **а)** для проективности модуля P необходимо и достаточно существования такого модуля Q, что модуль $P \oplus Q$ свободен **б)** компактность проективного модуля равносильна его конечной порождённости..

ГА1◇4. Покажите, что: **а)** абелева группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективна и для любых $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}b$ и $a \in A$ имеется $\psi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\psi(a) \neq 0$ **б)** абелева группа $I_R = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ со структурой правого R-модуля, задаваемой левым действием R на себе, является инъективным когенератором в $\mathcal{M}od$-R.

ГА1◇5. Для категории $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{X})$ открытых подмножеств топологического пространства $\mathcal{X}$ покажите, что **а)** продолжение по непрерывности $E : pSh(\mathcal{U}) \to \mathcal{T}op(\mathcal{X})$ функтора $\mathcal{U} \to \mathcal{T}op(\mathcal{X})$, переводящего U в его вложение $U \to X$, сопоставляет предпучку $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ отображение $\pi : E(F) \to X$, где $E(F)$ — пространство, точками которого являются пары (x, s_x) с $x \in \mathcal{X}$ и $s_x \in F_x \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname{colim}_{U \ni x} F(U)$, со слабейшей топологией, в которой непрерывны все отображения $s : U \to E(F)$, $x \mapsto (x, \text{ класс } s \text{ в } F_x)$, строящиеся по всевозможным $s \in F(U)$, и очевидным $\pi : (x, s_x) \mapsto x$ **б)** функтор $E : F \mapsto E(F)$ сопряжён слева к функтору $S : \mathcal{T}op(\mathcal{X}) \to pSh(\mathcal{U})$, сопоставляющему пространству $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ предпучок его сечений **в)** функторы E и S задают квазиобратные эквивалентности между категорией пучков на $\mathcal{X}$ и категорией локальных гомеоморфизмов $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ **г)** композиция SE сопряжена слева к вложению категории пучков на $\mathcal{X}$ в $pSh(\mathcal{U})$. **д)** Явно опишите множество сечений пучка $SE(F)$ над U в терминах сечений F над U.

---

[1]переводит разные стрелки в разные

[2]т. е. одновременно и начальный и конечный

[3]т. е. стрелка, на которую можно сокращать слева

[4]т. е. стрелка, на которую можно сокращать справа

[5]которая *не* предполагается $\mathbb{Z}$-линейной

[6]класс $\varphi : U \hookrightarrow X$ не больше класса $\psi : U \hookrightarrow X$, если $\varphi = \psi\xi$ для некоторого $\xi : U \to W$

[7]и, стало быть, существуют все послойные произведения и копроизведения

[8]т. е. подобъекты любого объекта составляют множество

Персональный табель ________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 3 (11 февраля 2015)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
д			
е			
2			
3а			
б			
4а			
б			
5а			
б			
в			
г			
д			