Комплексы и когомологии.

Обозначения. Всюду ниже речь идёт про комплексы (левых) модулей над кольцом R с единицей. Мы обозначаем через $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(A,B) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_i \mathrm{Hom}^i(A,B)$ комплекс с компонентами $\mathrm{Hom}^i(A,B) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_\nu \mathrm{Hom}\left(A^\nu, B^{\nu+i}\right)$ и дифференциалом $d : \psi \mapsto d_B\psi - (-1)^{|\psi|}\psi d_A$, через $\mathrm{Hom}(A,B) \overset{\text{def}}{=} \ker d \cap \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(A,B)$ — ядро этого дифференциала в нулевой компоненте, а через $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}o}(A,B) \overset{\text{def}}{=} H^0\left(\mathrm{Hom}_D\, G(A,B)\right) = \mathrm{Hom}(A,B)/\operatorname{im} d$ — нулевую компоненту когомологий. Через $SA = A[1]$ обозначается комплекс с компонентами $SA^i = A^{i+1}$ и дифференциалом $d_{SA} = -d_A$, так что $\mathrm{Id}_A \in \ker d \cap \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathrm{DG}}(A,SA)$. Мы полагаем по индукции $A[k] \overset{\text{def}}{=} SA[k-1]$. Под m-комплексом[1] мы понимаем $\mathbb{Z}^m$-градуированный модуль $M = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z}^m} M^\mu$ над грассмановой алгеброй с m образующими $d_1, d_2, \dots, d_m$, в котором d_i действует оператором степени $e_i \in \mathbb{Z}^m$ (стандартный базисный вектор). Свёрткой m-комплекса M называется комплекс $\mathrm{Tot}\, M$ с компонентами $\mathrm{Tot}^n M = \bigoplus_{\sum\mu_i = n} M^\mu$ и дифференциалом $d = \sum d_i$.

ГА4◇1. Покажите, что **а)** комплексы с группами Hom в качестве морфизмов образуют абелеву категорию[2] **б)** комплексы с группами $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}$ в качестве морфизмов образуют DG-категорию[3] **в)** комплексы с группами $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}o}$ в качестве морфизмов образуют категорию[4] **г)** $\varphi \in \mathrm{Hom}(A,B)$ корректно задаёт гомоморфизм $\varphi_* : H(A) \to H(B)$ **д)** если $\varphi = \psi$ в $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}o}(A,B)$, то $f_* = \psi_*$

ГА4◇2. В категории $\mathcal{C}om$ постройте на каждом комплексе K функториальную по K убывающую фильтрацию подкомплексами $\dots \supset F^i \supset F^{i+1} \supset \dots$ присоединённые факторы которой $G^i = F^i/F^{i+1}$ изоморфны[5] **а)** K^i **б)** $H^i(K)$.

ГА4◇3. Функция $\alpha : \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \to A$ из объектов абелевой категории $\mathcal{A}$ в абелеву группу A называется *аддитивной*, если для любой точной тройки $0 \to K \to L \to M \to 0$ в $\mathcal{A}$ выполняется соотношение $\alpha(L) = \alpha(K) + \alpha(M)$ в A. Докажите для любой аддитивной функции α и любого ограниченного[6] комплекса K *формулу Эйлера* $\sum(-1)^i\alpha(K^i) = \sum(-1)^i\alpha\left(H^i(K)\right)$.

ГА4◇4. По точной тройке комплексов $0 \to K \xrightarrow{\varphi} L \xrightarrow{\psi} M \to 0$ постройте длинную точную последовательность их когомологий $\dots \to H^i(K) \xrightarrow{\varphi_*} H^i(L) \xrightarrow{\psi_*} H^i(M) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(K) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(L) \to \dots$.

ГА4◇5. Покажите, что тензорное произведение комплексов $A \otimes B$ образует комплекс с i-той компонентой[7] $\bigoplus_{\alpha+\beta=i} A^\alpha \otimes B^\beta$ и дифференциалом[8] $d_{A\otimes B} = d_A \otimes 1 + 1 \otimes d_B$.

ГА4◇6. Для $f \in \mathrm{Hom}(K,L)$ обозначим через Con_f свёртку бикомплекса C_f, состоящего из двух столбцов $C_f^{-1,i} = K^i$, $C_f^{0,i} = L^i$ с горизонтальным дифференциалом f и вертикальным дифференциалом $-d_K$ в столбце K и d_L в столбце L. Постройте точную тройку комплексов $0 \to L \to \mathrm{Con}_f \to K[1] \to 0$ и опишите гомоморфизмы её длинной когомологической последовательности.

ГА4◇7. Для коммутативного кольца K и $f \in K$ обозначим через K_f сосредоточенный в степенях 0 и 1 комплекс $K \to K$ с дифференциалом $x \mapsto fx$ и положим $K_{f_1f_2\dots f_m} \overset{\text{def}}{=} \bigotimes_\nu K_{f_\nu}$. **а)** Для любого комплекса K-модулей L постройте длинную точную последовательность $\dots \to H^i(L) \xrightarrow{x\mapsto fx} H^i(L) \to$ $\to H^i(K_f \otimes L) \to H^{i+1}(L) \xrightarrow{x\mapsto fx} H^{i+1}(L) \dots$ **б)** Вычислите $H(K_{f_1f_2\dots f_m})$ в случае, когда f_i не делит нуль в $K/(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$ при всех $i \geqslant 0$.

ГА4◇8. Обозначим через $V = K^m$ свободный K-модуль с базисом $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$. Вычислите когомологии комплекса $0 \to \Lambda^m V \to \Lambda^{m-1}V \to \dots \to \Lambda^1 V \to \Lambda^0 V \to 0$ с дифференциалом[9] $d = \sum f_i\partial/\partial\xi_i$.

---

[1] в частности, *бикомплексом*, *трикомплексом* и т.д.

[2] она называется *категорией комплексов* и обозначается $\mathcal{C}om$

[3] т.е. дифференциал на $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}$ связан с композицией *формулой Лейбница*: $d(\varphi\psi) = (d\varphi)\psi + (-1)^{|\varphi|}\varphi(d\psi)$; соответствующая категория называется DG-*категорией комплексов* и обозначается $\mathcal{C}om_{\mathrm{DG}}$

[4] она называется *гомотопической категорией комплексов* и обозначается $\mathcal{H}o$

[5] в обоих случаях имеются в виду комплексы с единственной ненулевой компонентой, находящейся в степени i

[6] комплекс K называется *ограниченным сверху* (соотв. *снизу*), если $K^i = 0$ при всех $i \gg 0$ (соотв. при всех $i \ll 0$), и просто *ограниченным*, если он ограничен и сверху и снизу

[7] здесь тензорное произведение означает тензорное произведение модулей

[8] применять который к однородным элементам надо сообразуясь с *Кошулевым правилом знаков*

[9] напомню, что *грассмановы* частные производные удовлетворяют *градуированному* правилу Лейбница $\frac{\partial}{\partial\xi_i}(\omega\wedge\eta) = \frac{\partial\omega}{\partial\xi_i}\wedge\eta + (-1)^{|\omega|}\omega\wedge\frac{\partial\eta}{\partial\xi_i}$

Персональный табель ______________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 4 (25 февраля 2015)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
д			
2а			
б			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
8			