Спектральные последовательности.

ГА5◇1. Точная диаграмма модулей $\begin{tikzcd} D_1 \arrow[rr, "i_1"] & & D_1 \arrow[dl, "j_1"] \\ & E_1 \arrow[ul, "k_1"] & \end{tikzcd}$ обозначается $(D_1, E_1, i_1, j_1, k_1)$ и называется *точной парой*[1]. Положим $d_1 = j_1 k_1 : E_1 \to E_1$, $E_2 = \ker d_1 / \operatorname{im} d_1$, $D_2 = \operatorname{im} i_1$, $i_2 = i_1|_{\operatorname{im} i_1}$, $j_2 : i_1(x) \mapsto j_1(x)$, $k_2 : x \,(\operatorname{mod} \operatorname{im} d_1) \mapsto k_1(x)$. Покажите, что **а)** $d_1^2 = 0$, j_2 и k_2 определены корректно, а $(D_2, E_2, i_2, j_2, k_2)$ является точной парой (она называется *производной* от $(D_1, E_1, i_1, j_1, k_1)$) **б)** в $(r-1)$-той производной паре $(D_r, E_r, i_r, j_r, k_r)$ модули $D_r = \operatorname{im} i_1^{r-1}$ и $E_r = k_1^{-1}(\operatorname{im} i_1^{r-1}) / j_1(\ker i_1^r)$ включаются в точную тройку $0 \to \operatorname{im} i_1^{r-1} / \operatorname{im} i_1^r \to E_r \to \ker i_1^r / \ker i_1^{r-1} \to 0$

ГА5◇2. Пусть модули в точной паре $(D_1, E_1, i_1, j_1, k_1)$ $\mathbb{Z}^2$-градуированы: $D_1 = \bigoplus\limits_{p,q\in\mathbb{Z}} D_1^{p,q}$, $E_1 = \bigoplus\limits_{p,q\in\mathbb{Z}} E_1^{p,q}$, а морфизмы однородны степени $\deg i_1 = (-1, 1)$, $\deg j_1 = (0, 0)$, $\deg k_1 = (1, 0)$. Разместим модули $E_r^{p,q}$ из $(r-1)$-той прозводной $(D_r, E_r, i_r, j_r, k_r)$ от исходной пары $(D_1, E_1, i_1, j_1, k_1)$ в прямоугольную таблицу с горизонтальной координатой p и вертикальной q. Покажите, что $d_r = (j_r \circ k_r) : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r}$ это дифференциал с когомологиями $E_{r+1}^{p,q}$.

ГА5◇3. Пусть в условиях предыдущей задачи $E_1^{p,q} = 0$ при $q \ll 0$ равномерно по p и при $p \ll 0$ равномерно по q. **а)** Какие условия это накладывает на $D^{p,q}$ с фиксированным $(p+q) = n$ при $p \ll 0$ и при $p \gg 0$? **б)** Покажите, что $\forall\, n\ \exists\, N$: $E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q}$ при всех $r > N$ и всех p, q с $p + q = n$ (эти стабильные члены называются *предельными* и обозначаются $E_\infty^{p,q}$). **в)** Опишите $E_\infty^{p,q}$ и $\bigoplus\limits_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$ в терминах гомоморфизма $i_1 : D_1 \to D_1$.

Предел спектралки. Пусть $\forall\, p, q\ \exists\, N = N(p, q)$, такое что входящий в клетку (p, q) и выходящий из клетки (p, q) дифференциалы во всех таблицах $E_r^{p,q}$ с $r > N$ зануляются, так что определены $E_\infty^{p,q} \overset{\text{def}}{=} E_{N+1}^{p,q} = E_{N+2}^{p,q} = \dots$. Если в этих условиях существуют модули E_∞^n с такими убывающими фильтрациями $F^p E_\infty^n$, что $E_\infty^n = \bigcup\limits_p F^p E_\infty^n$, $\bigcap\limits_p F^p E_\infty^n = 0$ и $F^p E_\infty^n / F^{p+1} E_\infty^n = E_\infty^{p,n-p}$, то говорят, что спектралка $E_r^{p,q}$ *сходится* к E_∞^n и пишут $E_r^{p,q} \Rightarrow E_\infty^n$.

ГА5◇4. Пусть каждый член K^m комплекса $\cdots \to K^m \to K^{m+1} \to \cdots$, снабжён убывающей фильтрацией $K^m = F^0 K^m \supset F^1 K^m \supset F^2 K^m \supset \cdots$ и $d(F^p K^m) \subset F^p K^{m+1}$ при всех p, m. Покажите, что при каждом p корректно определён фактор комплекс $G^p K$ с m-тым членом $F^p K^m / F^{p+1} K^m$ и дифференциалом, индуцированным дифференциалом d исходного комплекса K, постройте биградуированную точную пару с $D_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p K)$, $E_1^{p,q} = H^{p+q}(G^p K)$, опишите элементы $E_r^{p,q}$ всех её производных пар и покажите, что когда фильтрации равномерно ограничены, имеется спектралка $E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(K)$ с $E_1^{p,q} = H^{p+q}(G^p K)$.

ГА5◇5. Рассмотрите на тотальном комплексе $\operatorname{Tot}(K)$ бикомплекса $K = \oplus K^{p,q}$ две фильтрации ${}^{I}F$ и ${}^{II}F$, имеющие ${}^{I}F^p \operatorname{Tot}^m(K) = \bigoplus\limits_{\substack{\nu \geqslant p \\ p+q=n}} K^{p,q}$ и ${}^{II}F^q \operatorname{Tot}^m(K) = \bigoplus\limits_{\substack{\nu \geqslant q \\ p+q=n}} K^{p,q}$ и выведите из предыдущей задачи существование пары спектралок: ${}^{I}E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(\operatorname{Tot}(K))$ с ${}^{I}E_2^{p,q} = H_{d_1}^p(H_{d_2}^q(K))$ и ${}^{II}E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(\operatorname{Tot}(K))$ с ${}^{II}E_2^{p,q} = H_{d_2}^q(H_{d_1}^p(K))$.

ГА5◇6. Получите предыдущие две спектралки напрямую, используя вместо зад. ГА5◇4 подходящие точные пары.

ГА5◇7. Пусть у комплекса R-модулей K имеется единственный ненулевой модуль когомологий $H_0(K) = M$, а модуль N таков, что $\operatorname{Ext}^\nu(K_i, N) = 0$ при всех i и всех $\nu \geqslant 1$. Покажите, что $\operatorname{Ext}_R^m(M, N) = H^m\big(\operatorname{Hom}_R(K, N)\big)$.

ГА5◇8. Пусть $M = \mathbb{C}[x, y]/(x, y)$, $N = \mathbb{C}[x, y]/(x-2)$, $K = \mathbb{C}[x, y]/\big((x-1)^2 + y^2 - 1\big)$. В категории $\mathbb{C}[x, y]$-модулей вычислите все Ext^ν и все Tor_ν между всеми девятью парами модулей M, N, K.

[1] по-английски *coupled pair*

Персональный табель ____________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 5 (18 марта 2015)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2			
3а			
б			
в			
4			
5			
6			
7			
8			