Ext и Tor.

ГА6◇1. Вычислите все $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(M,N)$ и $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_i(M,N)$ для **а)** $M=\mathbb{Z}$, $N=\mathbb{Z}/(n)$ **б)** $M=\mathbb{Z}/(m)$, $N=\mathbb{Z}$ **в)** $M=\mathbb{Z}/(m)$, $N=\mathbb{Z}/(n)$ при $\text{нод}(m,n)=1$ **г)** $M=\mathbb{Z}/(p^m)$, $N=\mathbb{Z}/(p^n)$ для простого p.

ГА6◇2. Покажите, что сопоставление точной тройке $0\to M\to X\to N\to 0$ элемента $\delta(\mathrm{Id}_M)\in\in\mathrm{Ext}^1(N,M)$, где $\delta:\mathrm{Hom}(M,M)\to\mathrm{Ext}^1(N,M)$ — связывающий гомоморфизм длинной последовательности Ext'ов, получающейся применением к тройке функтора $\mathrm{Hom}(*,M)$, задаёт биекцию между $\mathrm{Ext}^1(N,M)$ и классами троек с фиксированными M и N и произвольными X по модулю тождественных на M и N изоморфизмов между средними элементами.

ГА6◇3. Как действует на классах точных троек из зад. ГА6◇2 сложение в абелевой группе $\mathrm{Ext}^1(N,M)$, и класс какой тройки отвечает нулевому элементу из $\mathrm{Ext}^1(N,M)$?

ГА6◇4. Покажите, что точные тройки $M\hookrightarrow X\twoheadrightarrow N$ и $N\hookrightarrow Y\twoheadrightarrow K$ тогда и только тогда включаются в коммутативную диаграмму (с точными строками и столбцами)

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, hook] & Y \arrow[r, two heads] & K \\
X \arrow[u, two heads] \arrow[r, hook] & Z \arrow[u, two heads] \arrow[r, two heads] & K \arrow[u, equal] \\
M \arrow[u, hook] \arrow[r, equal] & M \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd},$$

когда произведение Ионеды их классов из $\mathrm{Ext}^1(N,M)$ и $\mathrm{Ext}^1(K,N)$ нулевое в $\mathrm{Ext}^2(K,M)$.

Обозначения. Для градуированной алгебры $A=\bigoplus_{k\geqslant 0}A_k$ над полем $\Bbbk$ через $A[m]$ обозначим свободный градуированный A-модуль $A\cdot e$ с базисным вектором e степени $-m$, так что $A[m]_i=A_{i+m}$ для всех i. Для A-модуля M и конечномерного векторного пространства W над $\Bbbk$ через $W\otimes M$ обозначается модуль, копредставляющий функтор $A\text{-}\mathcal{M}od\to\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$, $X\mapsto W^*\otimes\mathrm{Hom}_A(M,X)$, и (неканонически) изоморфный прямой сумме $\dim W$ копий M, через $S=S(V)=\bigoplus_{k\geqslant 0}S^kV$ и $\Lambda=\Lambda(V)=\bigoplus_{k\geqslant 0}\overset{k}{\Lambda}V$ — симметрическая и внешняя алгебры пространства V.

ГА6◇5. Обозначим через $x_i\in S(V)$ и $\xi_i\in\Lambda(V)$ классы стандартных базисных векторов пространства $V=\Bbbk^n$. **а)** Покажите, что дифференциалы Кошуля: $\partial=\sum x_i\otimes\frac{\partial}{\partial\xi_i}$ и Де Рама $d=\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\otimes\xi_i$, действующие на $S\otimes\Lambda$, не зависят от выбора базиса и имеют нулевые квадраты. Вычислите **б)** коммутатор $\partial d+d\partial$ **в)** когомологии обох дифференциалов.

ГА6◇6. Вычислите все $\mathrm{Ext}^i(M,N)$ и $\mathrm{Tor}^i(M,N)$ в категориях градуированных **а)** S-модулей **б)** (левых) Λ-модулей для M, N пробегающих все 4 возможных комбинации из тривиального модуля $\Bbbk$ и свободного модуля S (соотв. Λ) ранга 1.

ГА6◇7. Покажите, что **а)** всякий конечно порождённый градуированный S-модуль M обладает свободной резольвентой $\cdots\to F_2\to F_1\to F_0\to M\to 0$, в которой $F_p=\bigoplus_q W_{p,q}\otimes S[-q]$, где $W_{p,q}$ — векторные пространства, и дифференциал $d:F_p\to F_{p-1}$ аннулируется тензорным умножением на тривиальный S-модуль[1] $\Bbbk$ **б)** каждое пространство[2] $W_{p,q}$ не зависят от выбора минимальной резольвенты и канонически изоморфно однородной компоненте степени q градуированного модуля $\mathrm{Tor}^S_p(M,\Bbbk)$ **в)** длина минимальной резольвенты не превышает[3] $\dim V+1$

ГА6◇8. Постройте минимальную резольвенту идеала $I(C)\subset S(V^*)$, порождённого однородными многочленами, тождественно зануляющимися на проективном многообразии $C\subset\mathbb{P}(V)$, для

а) кубики Веронезе $C_3=\{\psi^3\mid\psi\in U\}$ в $\mathbb{P}_3=\mathbb{P}\left(U^{\otimes 3}\right)$, где $\dim U=2$

б*) кривой Веронезе $C_d=\{\psi^d\mid\psi\in U\}$ в $\mathbb{P}_d=\mathbb{P}\left(U^{\otimes d}\right)$, где $\dim U=2$

---

[1] такая резольвента называется *минимальной*

[2] оно называется *пространством p-тых сизигий степени q*

[3] этот факт известен как *теорема Гильберта о сизигиях*

Персональный табель ________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 6 (1 апреля 2015)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
2			
3			
4			
5а			
б			
в			
6а			
б			
7а			
б			
в			
8а			
б			