Когомологии алгебр 1.

Терминология. Пусть A-ассоциативная алгебра над полем $\Bbbk$, снабжённая тождественным на $\Bbbk \subset A$ эпиморфизмом алгебр[1] $\varepsilon : A \twoheadrightarrow \Bbbk$. Для левого A-модуля M пространства $H_i(A, M) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Tor}_i^A(\Bbbk, M)$ называются *гомологиями*, а $H^i(A, M) = \operatorname{Ext}_A^i(\Bbbk, M)$ — *когомологиями* алгебры A с коэффициентами в M. Под (ко)гомологиями группы G (соотв. алгебры Ли $\mathfrak{g}$) с коэффициентами в G-модуле (соотв. $\mathfrak{g}$-модуле) M всегда понимаются (ко)гомологии групповой алгебры $\Bbbk[G]$ с аугументацией $\varepsilon : \sum\limits_{g\in G} x_g \cdot g \mapsto \sum\limits_{g\in G} x_g$ (соотв. универсальной обёртывающей алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ со стандартной аугументацией[2]). Для A-A-бимодуля M, рассматриваемого как левый модуль над алгеброй $A \underset{\Bbbk}{\otimes} A^{\mathrm{opp}}$, пространства $\mathbb{H}_i(A, M) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Tor}_i^{A\otimes A^{\mathrm{opp}}}(A, M)$ называются *гомологиями Хохшильда*, а $\mathbb{H}^i(A, M) \overset{\text{def}}{=} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Ext}^i_{A\otimes A^{\mathrm{opp}}}(A, M)$ — *когомологиями Хохшильда* алгебры A с коэффициентами в M.

ГА7◇1 (бар-конструкция). Обозначим через $\mathbb{B}_n = \mathbb{B}_n(A) \overset{\text{def}}{=} A^{\otimes(n+2)}$ тензорное произведение $n + 2$ копий векторного пространства A над $\Bbbk$, зададим для всех $n \geqslant 0$ и $0 \leqslant \nu \leqslant n$ $\Bbbk$-линейный оператор $\partial_\nu : \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_{n-1}$, $a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \mapsto a_0 \otimes \cdots \otimes a_{\nu-1} \otimes \left(a_\nu a_{\nu+1}\right) \otimes a_{\nu+2} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$ и положим $\partial \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \partial_\nu$. Последовательность $\cdots \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_1 \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_0 \xrightarrow{\partial} A \to 0$ называется *бар-конструкцией*. Покажите, что **а)** бар-конструкция является свободной резольвентой левого $A \underset{\Bbbk}{\otimes} A^{\mathrm{opp}}$-модуля A с действием $a_1 \otimes a_2 : \alpha \mapsto a_1 \alpha a_2$ **б)** для любого левого A-модуля M тензорное произведение $\mathbb{B} \underset{A}{\otimes} M$, в котором $\mathbb{B}$ рассматривается как правый A-модуль, является свободной резольвентой модуля M в категории левых A-модулей и явно опишите действие дифференциала на элемент $a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m \in \mathbb{B}_n \underset{A}{\otimes} M \simeq A^{\otimes(n+1)} \underset{\Bbbk}{\otimes} M$ **в)** когомологии $H^i(A, \Bbbk)$ с коэффициентами в тривиальном модуле $\Bbbk$ суть когомологии DG-алгебры $\mathsf{T}(A^*) = \bigoplus\limits_{k\geqslant 0} A^{*\otimes k}$, умножение в которой — тензорное умножение, а дифференциал $d : \mathsf{T}(A^*) \to \mathsf{T}(A^*)$ имеет степень 1, переводит 1 в 0, ковектор $\alpha : A \to \Bbbk$ из A^* в билинейную форму $d\alpha(a_1, a_2) = \alpha(a_1 a_2)$ из $A^* \otimes A^*$, и распространяется на всю тензорную алгебру по s-правилу Лейбница **г)** тензорное умножение в $\mathsf{T}(A^*)$ корректно индуцирует структуру ассоциативной алгебры на $H^i(A, \Bbbk)$, и это умножение совпадает с умножением Ионеды на $\operatorname{Ext}_A^i(\Bbbk, \Bbbk) = H^i(A, \Bbbk)$

ГА7◇2 (комплекс Шевалле). Вложим внешнюю алгебру $\Lambda\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $\mathsf{T}\mathfrak{g} \subset \mathsf{T}\mathfrak{U}$, где $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ — универсальная обёртывающая алгебра, так: $x_1 \wedge \ldots \wedge x_m \mapsto \frac{1}{m!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(m)}$. Покажите, что: **а)** $\mathfrak{U} \otimes \Lambda\mathfrak{g} \subset \mathfrak{U} \otimes \mathsf{T}(\mathfrak{U}) = \mathbb{B}(\mathfrak{U}) \underset{\mathfrak{U}}{\otimes} \Bbbk$ переводится в себя бар-дифференциалом и подкомплекс $\cdots \to \mathfrak{U} \otimes \Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{U} \xrightarrow{\varepsilon} \Bbbk \to 0$ тоже является свободной резольвентой тривиального $\mathfrak{U}$-модуля $\Bbbk$ **б)** ограничение на неё бар-дифференциала имеет вид $\partial\left(u \otimes x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_m\right) = $
$$= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_m + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_m.$$

ГА7◇3. Пусть $C = C_n$ — циклическая группа порядка n с образующей σ, и $N = 1 + \sigma + \sigma^2 + \cdots \sigma^{n-1} \in \mathbb{Z}[C]$. Покажите, что комплекс $\cdots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[C] \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}[C] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[C] \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}[C] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$, где отображения $\mathbb{Z}[C] \xrightarrow{z} \mathbb{Z}[C] : x \mapsto zx$, является свободной резольвентой тривиального модуля $\mathbb{Z}$ в категории $\mathbb{Z}[C]$-модулей и найдите **а)** $H^i(C_n, \mathbb{Z})$ **б)** $H_i(C_n, \mathbb{Z})$ **в)** $H^i(C_n \times C_m, \mathbb{Z})$ **г)** $H_i(C_n \times C_m, \mathbb{Z})$.

ГА7◇4. Пусть F — свободная группа с базисом X. Покажите, что $0 \to \ker\varepsilon \to \mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ это свободная резольвента $\mathbb{Z}$ и вычислите все $H^i(F, \mathbb{Z})$ и $H_i(F, \mathbb{Z})$.

ГА7◇5. Установите для любой группы G, её подгруппы $H \subset G$ и H-модуля U канонические изоморфизмы: **а)** $H_i(G, \operatorname{Ind}(U)) \simeq H_i(H, U)$ **б)** $H^i(G, \operatorname{Coind}(U)) \simeq H^i(H, U)$.

[1] такой эпиморфизм называется *аугументацией*, а его ядро $\ker\varepsilon \subset A$ — идеалом аугументации
[2] факторизацией по двустороннему идеалу, порождённому пространством $\mathfrak{g}$

Персональный табель ________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 7 (15 апреля 2015)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
2а			
б			
3а			
б			
в			
г			
4			
5а			
б			