## Когомологии алгебр 2.

**ГА8◇1.** Покажите, что сопоставление точной тройке $\mathfrak{g}$-модулей $0 \to V \to W \xrightarrow{\pi} \Bbbk \to 0$ отображения $\xi : \mathfrak{g} \to V$, $x \mapsto xw$, где $w \in W$ — произвольно фиксированный элемент с $\pi(w) = 1$, корректно задаёт биекцию между классами изоморфных расширений $\mathfrak{g}$-модуля $V$ тривиальным одномерным модулем $\Bbbk$ и группой $H^1(\mathfrak{g}, M)$ первых гомологий комплекса, полученного применением $\mathrm{Hom}(\,*\,, M)$ к комплексу Шевалле.

**ГА8◇2.** Для произвольного $\mathfrak{g}$-модуля $M$ зададим на пространстве $\mathfrak{h} = M \oplus \mathfrak{g}$ скобку правилами $[m_1, m_2]_{\mathfrak{h}} = 0$, $[x, m]_{\mathfrak{h}} = xm$, $[x, y]_{\mathfrak{h}} = [x, y]_{\mathfrak{g}} + \beta(x, y)$, где $m \in M$, $x, y \in \mathfrak{g}$, а $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to M$ билинейная форма. Покажите, что сопоставление $\mathfrak{h} \mapsto \beta$ задаёт биекцию между группой $H^2(\mathfrak{g}, M)$ и алгебрами Ли $\mathfrak{h}$, содержащими $M$ в качестве абелева идеала с $\mathfrak{h}/M \simeq \mathfrak{g}$ и рассматриваемыми с точностью до тождественного на $M$ и $\mathfrak{g}$ изоморфизма алгебр Ли.

**ГА8◇3.** *Дифференцированием*[1] группы $G$ со значениями в $G$-модуле $V$ называется всякое отображение множеств $D : G \to V$ со свойством $D(gh) = gD(h) + D(g)$. Дифференцирования вида $D_v : g \mapsto gv - v$, где $v \in V$, называются *главными*. Покажите, что дифференцирования образуют абелеву группу по сложению $\mathrm{Der}(G, V) \simeq \mathrm{Hom}_G(\ker \varepsilon, V)$, а главные дифференцирования образуют в ней подгруппу $\mathrm{PrDer}(G, V) \simeq V/V^G$, и $\mathrm{Der}(G, V)/\mathrm{PrDer}(G, V) \simeq H^1(G, V)$.

**ГА8◇4*.** Пусть $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ — конечное расширение Галуа с группой Галуа $G = \mathrm{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{K}$. Покажите, что $H_i(G, \mathbb{K}) = H^i(G, \mathbb{K}) = 0$ при всех $i > 0$.

**ГА8◇5 (квадратичные алгебры).** Для конечномерного векторного пространства $V$ над полем $\Bbbk$ алгебра $A = \mathsf{T}(V)/(I)$, где $(I)$ — двусторонний идеал, порождённый подпространством $I \subset V \otimes V$, и алгебра $B = A^! = \mathsf{T}(V^*)/(I^\perp)$, где $I^\perp = \mathrm{Ann}\, I \subset V^* \otimes V^*$, называются *двойственными квадратичными алгебрами.* На $B \otimes A$ есть умножение $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (-1)^{|a_2||b_1|}(a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$, а на $K_B \overset{\text{def}}{=} B \otimes A^*$ — правое действие алгебры $B \otimes A$, в котором $\beta \otimes a$ действует оператором $\varrho_\beta \otimes \lambda_a^*$, где $\varrho_\beta : B \to B$, $\beta' \mapsto \beta'\beta$, а $\lambda_a * : A^* \to A^*$ двойствен оператору $\lambda_a : A \to A$, $a' \mapsto aa'$. Покажите что $\varkappa \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id}_V \in \mathrm{End}(V) = V \otimes V^* \subset B \otimes A$ имеет $\varkappa^2 = 0$ в алгебре $B \otimes A$, а правое умножение на $\varkappa$ превращает $K_B$ в комплекс[2] левых $B$-модулей с дифференциалом $\partial : \beta \otimes \alpha \mapsto \sum (\beta \cdot x_i) \otimes (e_i \llcorner \alpha)$, где $x_i \in V^*$ и $e_i \in V$ — двойственные базисы.

**ГА8◇6.** Покажите, что алгебры $S(V)$ и $\Lambda(V^*)$ квадратично двойственны, и опишите когомологии их комплекса Кошуля.

**ГА8◇7*.** Докажите равносильность следующих условий на двойственные квадратичные алгебры $A$ и $B$: **а)** комплекс Кошуля $B \otimes A^*$ является свободной резольвентой тривиального модуля $\Bbbk$ в категории градуированных левых $B$-модулей **б)** отображение $1 \otimes \tau : B \otimes A^* \to B \otimes \mathsf{T}(B)$, где оператор $\tau : A^* \to \mathsf{T}(V^*) = \mathsf{T}(B_1) \subset \mathsf{T}(B)$ двойствен факторизации $\mathsf{T}(V) \twoheadrightarrow A = \mathsf{T}(V)/(I)$, является квазиизорфизмом[3] левых DG-$B$-модулей $K_B$ и $B \underset{\Bbbk}{\otimes} \mathsf{T}(B) \simeq \mathbb{B}(B) \underset{B}{\otimes} \Bbbk$, где $\mathbb{B}(B)$ — бар-конструкция **в)** $A \simeq H^*(B, \Bbbk) = \mathrm{Ext}^*_B(\Bbbk, \Bbbk)$ **г)** $B \simeq H^*(A, \Bbbk) = \mathrm{Ext}^*_A(\Bbbk, \Bbbk)$ **д)** компоненты степени $j$ градуированных $B$-модулей $H^i(B, \Bbbk) = \mathrm{Ext}^i_B(\Bbbk, \Bbbk)$ зануляются при всех $i \neq j$ **е)** для каждого $m \geqslant 3$ подпространства $W_\nu = V^{*\otimes\nu} \otimes I^\perp \otimes V^{*\otimes(m-\nu-2)} \subset V^{*\otimes m}$ с $0 \leqslant \nu \leqslant (m-2)$ образуют *дистрибутивную решётку*, т. е. $\forall\, \alpha, \beta, \gamma$ $W_\alpha \cap (W_\beta + W_\gamma) = W_\alpha \cap W_\beta + W_\alpha \cap W_\gamma$ и $W_\alpha + (W_\beta \cap W_\gamma) = (W_\alpha + W_\beta) \cap (W_\alpha + W_\gamma)$ **ж)** для каждого $m \geqslant 3$ в $V^{\otimes m}$ имеется такой базис $E = \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$, что $W_\alpha \cap E$ является базисом в $W_\alpha$ для всех подпространств $W_\alpha \subset V^{\otimes m}$ из предыдущего пункта.

---

[1] *дифференцирование* кольца $R$ в $R$-$R$-бимодуль $M$ это такое отображение $D : R \to M$, что $D(ab) = D(a)b + aD(b)$; здесь $R = \Bbbk[G]$, а $M$ это левый $G$-модуль $V$, на котором каждый $g \in G$ действует *справа* как $\mathrm{Id}_V$

[2] он называется *комплексом Кошуля* квадратично двойственных алгебр

[3] морфизмом комплексов, индуцирующим изоморфизм когомологий

Персональный табель ________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

**Листок № 8 (22 апреля 2015)**

| № | дата сдачи | имя и фамилия принявшего | подпись принявшего |
|---|---|---|---|
| **1** | | | |
| **2** | | | |
| **3** | | | |
| **4** | | | |
| **5** | | | |
| **6** | | | |
| **7а** | | | |
| **б** | | | |
| **в** | | | |
| **г** | | | |
| **д** | | | |
| **е** | | | |
| **ж** | | | |