Когомологии пучков.

ГА9◇1. Пучок F абелевых групп на топологическом пространстве X называется *вялым*, если ограничение $F(X) \to F(U)$ сюрьективно для любого открытого $U \subset X$. Для точной тройки пучков $0 \to F \to G \to H \to 0$ с вялым F покажите, что **а)** G вял $\Rightarrow$ H вял **б)** последовательность $0 \to F(U) \to G(U) \to H(U) \to 0$ точна над любым открытым $U \subset X$.

ГА9◇2. Покажите, что сопоставление пучку F его *вялой оболочки Годемана* G_F с $G_F(U) \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_{x \in U} F_x$ является точным функтором.

ГА9◇3. Пусть X хаусдорфово и в любое его открытое покрытие вписывается локально конечное. Пучок F абелевых групп на X называется *мягким*, если его слой F_Z над каждым замкнутым $Z \subset X$ состоит из ростков глобальных сечений. Покажите, что **а)** каждый вялый пучок мягок **б*)** пучки колец непрерывных (соотв. гладких) функций на вещественном (гладком) многообразии и все пучки модулей над этими кольцами мягкие **в)** в точной тройке пучков $0 \to F \to G \to H \to 0$ с мягким F мягкость G влечёт мягкость H и последовательность абелевых групп $0 \to F_Z \to G_Z \to H_Z \to 0$ точна над любым замкнутым $Z \subset X$ **г)** каждый мягкий пучок допускает разложение единицы: для любых сечения $s \in F(U)$ и открытого покрытия $U = \bigcup W_\alpha$ найдутся такие сечения $s_\alpha \in F(U)$ с носителями[1] в U_α, что для каждой точки $x \in U$ в слое F_x лишь конечное число ростков $s_\alpha(x)$ отлично от нуля и $\sum\limits_\alpha s_\alpha(x) = s(x)$.

ГА9◇4. Покажите, что пучок, допускающий разложение единицы, ацикличен.

ГА9◇5. Малая категория $\mathcal{F}$ называется *фильтрующейся*[2], если из любых двух объектов выходят стрелки с общим концом и для любых двух стрелок φ, ψ с общими началом и концом имеется такая стрелка ζ, что $\zeta\varphi = \zeta\psi$. Покажите, что копредел является точным функтором из категории фильтрующихся диаграмм модулей в категорию модулей (над любым кольцом).

ГА9◇6. Покажите, что локализация KS^{-1} коммутативного кольца K является плоским K-модулем.

ГА9◇7. Пусть аффинное алгебраическое многообразие X покрыто главными открытыми множествами $U_i = \mathcal{D}(f_i) = \{p \in X \mid f_i(p) \neq 0\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и $A = \Bbbk[X] = \mathcal{O}_X(X)$. Покажите, что **а)** последовательность A-модулей точна тогда и только тогда, когда для каждого i точна её локализация по[3] f_i **б)** для любого A-модуля M и любых $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ комплекс Кошуля $M_{f_1^{n_1} f_2^{n_2} \cdots f_m^{n_m}} = M \bigotimes\limits_A K_{f_1^{n_1} f_2^{n_2} \cdots f_m^{n_m}}$ точен **в)** дополненный слева модулем M комплекс Чеха $0 \to M \to \prod\limits_i M_{(f_i)} \to \prod\limits_{i<j} M_{(f_i f_j)} \to \prod\limits_{i<j<k} M_{(f_i f_j f_k)} \to \cdots$ (где $M_{(f)} \overset{\text{def}}{=} M \bigotimes\limits_A A[f^{-1}]$) является фильтрующимся копределом комплексов Кошуля и тоже точен **г)** аффинные открытые покрытия алгебраических многообразий ацикличны для квазикогерентных пучков[4]

ГА9◇8. На комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}_n$ вычислите когомологии когерентного пучка **а)** $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(d)$, сечения которого над открытым $U \subset \mathbb{P}_n$ суть рациональные функции от однородных координат x на $\mathbb{P}_n$, допускающие в каждой точке $p \in U$ такое представление в виде $f(x)/g(x)$ с однородными[5] f, g, что $\deg f - \deg g = d$ и $g(p) \neq 0$ **б)** $\Lambda^k \Omega_{\mathbb{P}_n}$, сечения которого над открытым $U \subset \mathbb{P}_n$ суть дифференциальные k-формы с коэффицентами в $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(U)$ **в)** $\Lambda^k \mathcal{T}_{\mathbb{P}_n}$, сечения которого над открытым $U \subset \mathbb{P}_n$ суть k-векорные поля с коэффицентами в $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(U)$.

---

[1] это означает, что $s|_W = 0$ для всех W с $W \cap U_\alpha = \varnothing$

[2] например, любой чум, в котором у каждых двух элементов есть общая верхняя грань, является фильтрующейся категорией

[3] т. е. результат применения к ней точного функтора $M \mapsto M \bigotimes\limits_A A[f_i^{-1}]$

[4] пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{M}$ на алгебраическом многообразии X называется квазикогерентным, если существует такое аффинное покрытие $X = \bigcup U_i$, что $\mathcal{M}(W) = \mathcal{M}(U_i) \bigotimes\limits_{\mathcal{O}_X(U_i)} \mathcal{O}_X(W)$ для всех открытых $W \subset U_i$ и всех i

[5] которые могут зависеть от точки $p \in U$

Персональный табель ____________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 9 (20 мая 2015)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2			
3а			
б			
в			
г			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
г			
8а			
б			
в			