Производные категории.

ГА10◇1. Пусть подмножество S произвольного кольца K с единицей содержит 1, замкнуто относительно умножения и обладает *свойствами Оре*:

для любых $s \in S$ и $f \in K$ найдутся такие $t \in S$ и $g \in K$, а для любых $t \in S$ и $g \in K$ — такие $s \in S$ и $f \in K$, что $tf = gs$ $\quad (\mathrm{o}_1)$

для любого $h \in K$ наличие такого $t \in S$, что $th = 0$, равносильно наличию такого $s \in S$, что $hs = 0$. $\quad (\mathrm{o}_2)$

Покажите, что: **а)** отношения $(s_1, f_1) \underset{L}{\sim} (s_2, f_2)$ и $(g_1, t_1) \underset{R}{\sim} (g_2, t_2)$, означающие соответственно существование таких $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ и таких $\varrho_1, \varrho_2 \in K$, что $\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ & $\lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2$ и, соответственно, $g_1\varrho_1 = g_2\varrho_2$ & $t_1\varrho_1 = t_2\varrho_2 \in S$, являются эквивалентностями (класс пары (s, f) обозначается $s\backslash f = s^{-1}f$ и называется *левой дробью*, а класс пары (g, t) обозначается $f/t = gt^{-1}$ и называется *правой дробью*) **б)** свойство (o_1) корректно задаёт между множествами левых и правых дробей отношение равенства $t^{-1}g = fs^{-1}$ **в)** правило $(g_1t_1^{-1}) \cdot (g_2t_2^{-1}) \overset{\mathrm{def}}{=} (g_1f_2)(t_2s_1)^{-1}$, где $t_1^{-1}g_2 = f_2s_1^{-1}$, корректно задаёт ассоциативное умножение правых дробей **г)** правило $(g_1t_1^{-1}) + (g_2t_2^{-1}) \overset{\mathrm{def}}{=} (g_1f_2 + g_2s_1)(t_1f_2)^{-1} = (g_1f_2 + g_2s_1)(t_2s_1)^{-1}$, где $t_1f_2 = t_2s_1$ удовлетворяют свойству (o_1) для $t = t_1$ и $g = t_2$, корректно задаёт коммутативное и сложение правых дробей, дистрибутивное по отношению к умножению **д)** модуль правых дробей KS^{-1} является копределом направленной диаграммы свободных *правых* модулей $[s^{-1}] \cdot K \simeq K$ ранга 1 с базисными элементами $[s^{-1}]$ (по одному модулю для каждого $s \in S$) и гомоморфизмов $[s^{-1}] \mapsto [t^{-1}]f$ (по одному для каждой тройки таких элементов $s, t \in S$ и $f \in K$, что $t = sf$ в K).

ГА10◇2. Покажите, что класс S квазиизоморфизмов[1] и класс K всех морфизмов в гомотопической категории комплексов $\mathcal{Ho}(\mathcal{A})$ объектов абелевой категории $\mathcal{A}$ удовлетворяют условию предыдущей задачи с тем уточнением, что в свойстве (o_1) стрелки s, f имеют общее начало, а стрелки g, t — общий конец, и вместо единицы S содержит все тождественные стрелки Id_X. Выведите отсюда, что корректно определена и аддитивна *производная категория* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ с теми же объектами, что и $\mathcal{Ho}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \operatorname*{colim}_{s: X' \Rightarrow X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ho}}(X', Y)$, где копредел абелевых групп берётся над категорией индексов, объектами которой являются квазиизоморфизмы $s : X' \to X$, рассматриваемые с точностью до изоморфизмов над X, а морфизмами — морфизмы над X, а сами группы получаются применением к этой категории функтора $h_Y : (s : X' \to X) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ho}}(X', Y)$.

ГА10◇3. Покажите, что $\mathcal{D}(\mathcal{V}ec)$ эквивалентна категории градуированных векторных пространств[2].

ГА10◇4. Покажите, что каждый объект категории[3] $\mathcal{D}(\mathbb{Z}\text{-}\mathcal{M}od)$ изоморфен прямой сумме своих когомологий $X \simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(X)[-k]$ и группа $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathbb{Z}\text{-}\mathcal{M}od)}(X, Y)$ изоморфна группе последовательностей пар $(f_k, \xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, в которой $f_k \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(H^k(X), H^k(Y)\right)$, $\xi_k \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}\left(H^k(X), H^{k-1}(Y)\right)$

ГА10◇5. Покажите, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y[k]) \simeq \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)$ для любых двух объектов X, Y абелевой категории[4] $\mathcal{A}$ **а)** модулей над произвольным кольцом K с единицей **б)** пучков абелевых групп на топологическом пространстве.

---

[1] т. е. таких морфизмов комплексов, которые индуцируют изоморфизм когомологий

[2] то же самое верно для любой *полупростой* абелевой категории $\mathcal{A}$, т. е. такой категории, в которой $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$ при $i > 0$ для всех X, Y

[3] то же самое верно для любой абелевой категории $\mathcal{A}$ *с наследуемыми свойствами* (по-английски *hereditary*), т. е. такой категории, в которой $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$ при $i > 1$ для всех X, Y

[4] то же самое верно для любой абелевой категории, имеющей достаточно много проективных или достаточно много инъективных объектов (т. е. каждый объект является фактором проективного или, соответственно, подобъектом инъективного объекта)

Персональный табель ________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 10 (3 июня 2015)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
д			
2			
3			
4			
5а			
б			