

А.Л.Городенцев

Полугодовой спецкурс «Гомологическая алгебра и производные категории» Полугодовой семинар «Вычисления в гомологической алгебре»

Это вводный полугодовой курс гомологической алгебры и теории пучков, ориентированный главным образом на приложения в алгебраической геометрии. Курс будет читаться во втором семестре (модули III, IV) и может рассматриваться как продолжение читаемого в первом семестре курса С. М. Натанзона «Гомологическая алгебра и теория пучков». Курс и семинар являются неотъемлемыми частями друг друга: занятия будут состоять из одной пары лекций (1 час 20 мин) и одной пары упражнений (1 час 20 мин) в неделю. На упражнениях будет происходить обсуждение и сдача задач, выдаваемых в виде листков (1 листок в 1-2 недели). Итоговая отметка будет в равной степени учитывать результаты итогового письменного экзамена и сданные в течение семестра задачи из листков.

Рекомендуемые учебники:

[Д] В. И. Данилов. *Когомологии алгебраических многообразий*. В кн. «Алгебраическая геометрия – 2». ВИНТИ. Современная математика. Фундаментальные направления. (есть в колхозе)

[ГМ] С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин. *Методы гомологической алгебры*. Том I. М., «Наука» (есть в колхозе).

Пререквизиты: алгебра, геометрия и топология в объёме первых трёх семестров бакалавриата матфака ВШЭ или НМУ; знакомство с курсом С. М. Натанзона «Гомологическая алгебра и теория пучков» желательно, но не обязательно.

Примерная программа:

1. Категории, функторы, предпучки. Пример: симплициальные множества. Категория функторов, лемма Йонеды. Сопряжённые функторы. (Ко) пределы диаграмм.
2. Абелевы категории. Точные категории. Группа Гротендика K_0 . Диаграмный поиск. Категория комплексов. Гомотопическая категория комплексов. Триангулированные категории.
3. Классические производные функторы Ext^i и Tor_i на категории модулей над алгеброй. Инъективные и проективные резольвенты. Спектральные последовательности. Комплексы Кошуля. Теорема Гильберта о сизигиях. Гомологии и когомологии Хохшильда. Комплекс Шевалле. Кошулева двойственность квадратичных алгебр.
4. Теория пучков: прямой и обратный образ, абелевы пучки, когомологии пучков, критерий ацикличности покрытия, высшие прямые образы, когомологические свойства когерентных пучков модулей на алгебраических многообразиях. Когомологии обратимых пучков и пучков $L^k \mathcal{F}$ и $L^k \Omega$ на проективном пространстве.
5. Производная категория абелевой категории. Производные функторы. Спектральная последовательность композиции. Если хватит времени и сил: модельные структуры и локализация по Квиллену.
6. Производные категории когерентных пучков: 6 операций, дуализирующий комплекс, горенштейновость и коэн-маколеевость, двойственность Серра – Гротендика – Вердье, теорема Римана – Роха – Хирцебруха – Гротендика. Полуортогональное разложение производной категории когерентных пучков на проективном пространстве. Свойства полуортогональных разложений триангулированных категорий.
7. Примеры эквивалентностей между производными категориями в алгебраической геометрии и теории представлений (насколько останется время).