

## §1. Категории и функторы

**1.1. Категории.** Категория  $\mathcal{C}$  это класс<sup>1</sup> объектов, обозначаемый  $\text{Ob } \mathcal{C}$ , в котором для каждой упорядоченной пары объектов  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  задано множество морфизмов

$$\text{Hom}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Для разных пар объектов эти множества не пересекаются. Морфизмы удобно представлять себе в виде стрелок  $\varphi : X \rightarrow Y$ . Объединение всех стрелок категории  $\mathcal{C}$  обозначается  $\text{Mor } \mathcal{C} = \bigsqcup_{X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  и тоже является классом, а не множеством.

Кроме того, для каждой тройки объектов  $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$  имеется отображение

$$\text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z), \quad (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \circ \psi (= \varphi\psi),$$

именуемое *композицией*<sup>2</sup> и ассоциативное в том смысле, что  $(\chi \circ \varphi) \circ \psi = \chi \circ (\varphi \circ \psi)$  всякий раз, когда эти композиции определены.

Наконец, у каждого объекта  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  есть *тождественный эндоморфизм*

$$\text{Id}_X \in \text{Hom}(X, X),$$

удовлетворяющий условиям<sup>3</sup>  $\varphi \circ \text{Id}_X = \varphi$  и  $\text{Id}_X \circ \psi = \psi$  для любых стрелок  $\varphi : X \rightarrow Y$  и  $\psi : Z \rightarrow X$ .

Подкатегория  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$  это категория, все объекты, стрелки и композиции которой наследуются из  $\mathcal{C}$ . Подкатегория называется *полной*, если для всех  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Категория  $\mathcal{C}$  называется *малой*, если  $\text{Ob } \mathcal{C}$  это множество, а не больший класс. В этом случае  $\text{Mor } \mathcal{C}$  тоже является множеством.

**ПРИМЕР 1.1 (КАТЕГОРИИ, НЕ ЯВЛЯЮЩИЕСЯ МАЛЫМИ)**

Примеры категорий, которые *не* являются малыми, это категория *Set* всех множеств и всех отображений, категория *Top* топологических пространств и непрерывных отображений, категория  $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$  векторных пространств над полем  $\mathbb{k}$  и  $\mathbb{k}$ -линейных отображений и её полная подкатегория  $\text{vec}_{\mathbb{k}}$  конечномерных пространств, категории *R-Mod* и *Mod-R* левых и правых модулей над кольцом  $R$  и  $R$ -линейных отображений и их полные подкатегории *R-mod* и *mod-R* конечно представимых<sup>4</sup> модулей, категория абелевых групп *Ab* =  $\mathbb{Z}$ -*Mod*, категория *Grp* всех групп и групповых гомоморфизмов, категория *Com* коммутативных колец с единицей и гомоморфизмов, переводящих единицу в единицу, и т. п.

<sup>1</sup>Не хотелось бы вдаваться в точную формализацию этого термина (содержательную в той же мере, как формализация арифметики и теории множеств, изучаемые в стандартном курсе математической логики). Для наших нужд достаточно, что такая формализация существует и позволяет говорить, например, о «категории множеств», объекты которой, по понятным причинам, множества не образуют.

<sup>2</sup>Значок композиции « $\circ$ », как и знак умножения, принято опускать, когда ясно, о чём речь.

<sup>3</sup>Выкладка  $\text{Id}' = \text{Id}' \circ \text{Id}'' = \text{Id}''$  показывает, что тождественный морфизм единствен.

<sup>4</sup>Модуль называется *конечно представимым*, если он изоморфен фактору свободного модуля конечного ранга по конечно порождённому подмодулю.

ПРИМЕР 1.2 (ПРЕДПОРЯДКИ, ЧУМЫ И ТОПОЛОГИИ)

Каждое множество  $M$  с предпорядком<sup>1</sup>  $\leq$  может рассматриваться как малая категория, объекты которой суть элементы  $m \in M$ , стрелки суть неравенства:

$$\text{Hom}_M(n, m) = \begin{cases} \text{одноэлементное множество, когда } n \leq m, \\ \emptyset \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

а композиция стрелок  $k \leq \ell$  и  $\ell \leq n$  это стрелка  $k \leq n$ . Таким образом, наличие композиции и тождественных морфизмов превращаются в транзитивность и рефлексивность отношения  $\leq$ .

Если предпорядок  $\leq$  кососимметричен, т. е. задаёт на  $M$  (частичный) порядок, то при  $m \neq n$  как минимум одно из множеств  $\text{Hom}(m, n)$ ,  $\text{Hom}(n, m)$  пусто. Важным примером такой категории-чума<sup>2</sup> является категория  $\mathcal{U}(X)$  всех открытых подмножеств топологического пространства  $X$ , стрелками в которой являются включения:

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}(X)}(U, W) = \begin{cases} \text{вложение } U \hookrightarrow W, \text{ если } U \subseteq W \\ \text{пустое множество, когда } U \not\subseteq W. \end{cases}$$

ПРИМЕР 1.3 (МАЛЫЕ КАТЕГОРИИ И АССОЦИАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ)

Всякую ассоциативную алгебру<sup>3</sup>  $A$  с единицей  $e \in A$  можно рассматривать как малую категорию с одним объектом  $e$  и множеством стрелок  $\text{Hom}(e, e) = A$ , композиция на котором задаётся умножением в этой алгебре. Наоборот, со всякой малой категорией  $\mathcal{C}$  и коммутативным кольцом  $K$  можно связать алгебру стрелок  $K[\mathcal{C}]$ , состоящую из формальных конечных линейных комбинаций стрелок категории  $\mathcal{C}$  с коэффициентами в  $K$ . Условимся для заданного множества  $M$  обозначать через  $K \otimes M$  свободный  $K$ -модуль с базисом  $M$ , образованный всеми конечными формальными линейными комбинациями элементов множества  $M$  с коэффициентами из  $K$ . Тогда

$$K[\mathcal{C}] \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}} K \otimes \text{Hom}(X, Y) = \left\{ \sum x_i \varphi_i \mid x_i \in K, \varphi_i \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \right\}.$$

Умножение стрелок в алгебре  $K[\mathcal{C}]$  определяется их композицией в категории  $\mathcal{C}$

$$\varphi \psi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi \circ \psi & \text{если конец } \psi \text{ совпадает с началом } \varphi \\ 0 & \text{во всех прочих случаях} \end{cases}$$

и по дистрибутивности распространяется на произвольные конечные линейные комбинации стрелок. Алгебру  $K[\mathcal{C}]$  можно представлять себе как алгебру финитных квадратных матриц<sup>4</sup>, строки и столбцы которых занумерованы объектами категории, и в каждой клетке  $(Y, X)$  стоят элементы из своего  $K$ -модуля  $K \otimes \text{Hom}(X, Y)$ . Эта алгебра, вообще говоря, некоммутативна и без единицы, однако, для всякого  $f \in K[\mathcal{C}]$  существует идемпотент  $e_f = e_f^2$  со свойствами  $e_f \circ f = f \circ e_f = f$ . В качестве такового можно взять сумму тождественных эндоморфизмов  $\text{Id}_X$  всех объектов  $X$ , служащих началами или концами стрелок, линейной комбинацией которых является стрелка  $f$ .

<sup>1</sup>Т. е. рефлексивным и транзитивным бинарным отношением.

<sup>2</sup>Т. е. частично упорядоченного множества.

<sup>3</sup>Более общим образом — любой ассоциативный моноид, т. е. полугруппу с единицей.

<sup>4</sup>Возможно, бесконечного размера, но с конечным числом ненулевых элементов.

**1.1.1. Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы.** Стрелка  $\varphi$  называется *мономорфизмом*<sup>1</sup> (соотв. *эпиморфизмом*<sup>2</sup>), если на неё можно сокращать слева (соотв. справа), т. е. когда  $\varphi\alpha = \varphi\beta \Rightarrow \alpha = \beta$  (соотв.  $\alpha\varphi = \beta\varphi \Rightarrow \alpha = \beta$ ). По умолчанию мы используем стрелки  $\hookrightarrow$  для обозначения мономорфизмов, и стрелки  $\twoheadrightarrow$  для эпиморфизмов. Стрелка  $\varphi : X \rightarrow Y$  называется *изоморфизмом* (или *обратимой стрелкой*) и обозначается  $\cong$ , если существует такая стрелка  $\psi : Y \rightarrow X$ , что  $\varphi\psi = \text{Id}_Y$  и  $\psi\varphi = \text{Id}_X$ . В этой ситуации объекты  $X$  и  $Y$  называются *изоморфными*, а морфизмы  $\varphi$  и  $\psi$  — *обратными* друг к другу. Например, в предпорядоченном множестве  $M$ , рассматриваемом как категория<sup>3</sup>, изоморфность элементов  $m$  и  $n$  означает, что  $m \leq n$  и  $n \leq m$ , т. е.  $m$  и  $n$  принадлежат одному классу эквивалентности, ассоциированному с предпорядком.

**1.1.2. Подобъекты и фактор объекты.** Класс инъективной стрелки с концом в  $X$  по модулю её умножения справа на обратимые стрелки называется *подобъектом* объекта  $X$ , а класс сюръективной стрелки с началом в  $X$  по модулю левого умножения на обратимые стрелки — *фактор объектом* объекта  $X$ . Категория называется *умеренно мощной*<sup>4</sup>, если подобъекты любого её объекта образуют множество. Все категории из **прим. 1.3** умеренно мощны.

**УПРАЖНЕНИЕ 1.1** (частичный порядок на под- и фактор объектах). Проверьте, что в умеренно мощной категории отношение  $\varphi \subseteq \psi$ , означающее, что существует такая стрелка  $\xi$ , что  $\varphi = \psi\xi$ , задаёт частичный порядок на множестве подобъектов, а отношение  $\varphi \supseteq \psi$ , означающее наличие такой стрелки  $\xi$ , что  $\varphi = \xi\psi$ , задаёт частичный порядок на множестве фактор объектов.

**ПРИМЕР 1.4** (конечные упорядоченные множества и комбинаторные симплексы) Обозначим через  $\Delta_{\text{big}}$  категорию, объектами которой являются конечные упорядоченные множества  $X$ , а морфизмами — сохраняющие порядок<sup>5</sup> отображения. Категория  $\Delta_{\text{big}}$  не является малой<sup>6</sup>, но содержит полную малую подкатеорию  $\Delta \subset \Delta_{\text{big}}$ , объектами которой являются конечные подмножества в  $\mathbb{Z}$  вида

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \dots, n\}, \quad n \geq 0, \quad (1-1)$$

со стандартным порядком. Множество (1-1) называется  *$n$ -мерным комбинаторным симплексом*, а категория  $\Delta$  — *симплициальной категорией*. Для любого  $X \in \text{Ob } \Delta_{\text{big}}$  имеется *единственный* изоморфизм  $n_X : X \cong [n]$  с *единственным*  $[n] \in \text{Ob } \Delta$ , а именно нумерация элементов  $X$  в порядке возрастания.

**УПРАЖНЕНИЕ 1.2.** Сколько всего стрелок в множестве  $\text{Hom}_{\Delta}([n], [m])$ ? Сколько среди них инъективных? Сколько сюръективных? Покажите, что алгебра стрелок  $\mathbb{Z}[\Delta]$ ,

<sup>1</sup>А также *вложением* или *инъективным морфизмом*.

<sup>2</sup>А также *наложением* или *сюръективным морфизмом*.

<sup>3</sup>См. **прим. 1.2** на стр. 4.

<sup>4</sup>По-английски: *well powered*.

<sup>5</sup>Т. е. такие отображения  $\varphi : X \rightarrow Y$ , что  $x_1 \leq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$  для всех  $x_1, x_2 \in X$ .

<sup>6</sup>По упомянутым выше логическим причинам, см. сноску на стр. ??.

как абстрактная ассоциативная алгебра, порождается стрелками

$$e_n = \text{Id}_{[n]} \quad (\text{тождественное отображение}) \quad (1-2)$$

$$\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n] \quad (\text{вложение, образ которого не содержит } i) \quad (1-3)$$

$$s_n^{(i)} : [n] \rightarrow [n-1] \quad (\text{наложение, склеивающее } i \text{ с } (i+1)) \quad (1-4)$$

и опишите образующие идеала соотношений между этими стрелками.

**1.1.3. Обращение стрелок.** С каждой категорией  $\mathcal{C}$  связана *противоположная* категория  $\mathcal{C}^{\text{opp}}$  с теми же объектами, но с обращённым направлением всех стрелок:

$$\text{Ob } \mathcal{C}^{\text{opp}} = \text{Ob } \mathcal{C}, \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{opp}}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X), \quad \varphi^{\text{opp}} \circ \psi^{\text{opp}} = (\psi \circ \varphi)^{\text{opp}}.$$

На языке алгебр такое обращение стрелок означает переход от алгебры  $\mathcal{C} = K[\mathcal{C}]$  к противоположной алгебре  $\mathcal{C}^{\text{opp}}$  из тех же элементов, но с происходящим в противоположном порядке умножением. Мономорфизмы и подобъекты категории  $\mathcal{C}$  являются эпиморфизмами и фактор объектами категории  $\mathcal{C}^{\text{opp}}$  и наоборот.

**1.2. Функторы.** Функтор<sup>1</sup>  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  из категории  $\mathcal{C}$  в категорию  $\mathcal{D}$  это отображение классов  $\text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{D}$ ,  $X \mapsto F(X)$ , и набор таких отображений множеств<sup>2</sup>

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), \quad \varphi \mapsto F(\varphi), \quad (1-5)$$

что  $F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$  для всех  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  и  $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$  всякий раз, когда композиция  $\varphi \circ \psi$  определена. На языке ассоциативных алгебр, каждый функтор  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  задаёт *гомоморфизм* алгебр стрелок  $F : K[\mathcal{C}] \rightarrow K[\mathcal{D}]$ . Если все отображения (1-5) сюръективны, функтор  $F$  называется *полным*<sup>3</sup>. Образ такого функтора является полной подкатегорией. Если все отображения (1-5) инъективны, функтор  $F$  называется *строгим*<sup>4</sup>. Такой функтор задаёт вложение алгебр стрелок. Полные строгие функторы иначе называются *вполне строгими*.

Простейшие функторы — это *тождественный функтор*  $\text{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , тождественно действующий на объектах и морфизмах, и *забывающие функторы*, действующие из какой-либо категории множеств с дополнительной структурой<sup>5</sup>, морфизмы в которой суть сохраняющие эту структуру отображения множеств, в категорию *Set* всех множеств — такие функторы просто забывают о структуре. Забывающий функтор не строг, если имеются различные морфизмы структур, одинаково действующие на подлежащих множествах, и не полон, если не всякое отображение множеств сохраняет рассматриваемую структуру.

<sup>1</sup>Иногда вместо «функтор» говорят *ковариантный функтор*.

<sup>2</sup>По одному отображению для каждой упорядоченной пары объектов  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ .

<sup>3</sup>По-английски: *full*.

<sup>4</sup>По-английски: *faithful*.

<sup>5</sup>Например, геометрической — такой, как топология или структура гладкого многообразия, или алгебраической — такой, как структура группы, кольца или модуля.

ПРИМЕР 1.5 (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КОМБИНАТОРНЫХ СИМПЛЕКСОВ)

Зададим функтор  $\Delta \rightarrow \mathcal{T}op$  из категории комбинаторных симплексов в категорию топологических пространств, сопоставляя  $n$ -мерному комбинаторному симплексу  $[n]$  стандартный  $n$ -мерный симплекс<sup>1</sup>

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_\nu = 1, x_\nu \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad (1-6)$$

а стрелке  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  — единственное аффинное отображение  $\varphi_* : \Delta^n \rightarrow \Delta^m$ , действующее на базисные векторы по правилу  $e_\nu \mapsto e_{\varphi(\nu)}$ . Это строгий, но не полный функтор. Образующие элементы (1-3) и (1-4) алгебры стрелок категории  $\Delta$  переводятся этим функтором, соответственно, во вложение  $i$ -той грани  $\Delta^{(n-1)} \hookrightarrow \Delta^n$  и в вырождение вдоль  $i$ -того ребра<sup>2</sup>  $\Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^{(n-1)}$ .

**1.2.1. Предпучки.** Функтор  $F : \mathcal{C}^{opp} \rightarrow \mathcal{D}$  называется *контравариантным функтором* из  $\mathcal{C}$  в  $\mathcal{D}$  или *предпучком*<sup>3</sup> объектов категории  $\mathcal{D}$  на категории  $\mathcal{C}$ . Такой функтор оборачивает композицию:  $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$  и на языке ассоциативных алгебр является *антигомоморфизмом* алгебр стрелок.

ПРИМЕР 1.6 (ТРИАНГУЛИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА)

Обозначим через  $\Delta_s \subset \Delta$  неполную подкатегорию, объектами которой тоже являются комбинаторные симплексы,  $Ob \Delta_s = Ob \Delta$ , но в качестве морфизмов допускаются только *строго возрастающие*<sup>4</sup> отображения. Категория  $\Delta_s$  называется *полусимплициальной категорией*.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3. Убедитесь, что алгебра стрелок  $K[\Delta_s]$  порождается тождественными стрелками  $e_n = Id_{[n]}$  и отображениями вложения граней  $\partial_n^{(i)}$  из (1-3).

Предпучок множеств  $X : \Delta_s^{opp} \rightarrow \mathcal{S}et$  на полусимплициальной категории  $\Delta_s$  называется *полусимплициальным множеством* и является ни чем иным, как комбинаторным описанием *триангулированного топологического пространства*  $|X|$ , которое называется *геометрической реализацией* полусимплициального множества  $X$ . В самом деле, функтор  $X$  задаёт для каждого целого неотрицательного  $n$  множество  $X_n = X([n])$ , каждый элемент которого мы будем воспринимать как стандартный  $n$ -мерный симплекс (1-6). Таким образом, каждое множество  $X_n$  представляет собою набор одинаковых  $n$ -мерных симплексов  $\Delta^n$ . Пространство  $|X|$  склеивается из них так. Стрелки  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  категории  $\Delta_s$  биективно соответствуют  $n$ -мерным граням  $m$ -мерного симплекса  $\Delta^m$ . Будем воспринимать отображение  $X(\varphi) : X_m \rightarrow X_n$ , которое функтор  $X$  сопоставляет стрелке  $\varphi$ , как *правило склейки*: оно указывает каждому  $m$ -мерному симплексу  $x \in X_m$ , какой именно  $n$ -мерный симплекс  $X(\varphi)x \in X_n$  надлежит приклеить к  $x$  в качестве  $\varphi$ -той  $n$ -мерной грани.

Так, на рис. 1◊1 показана стандартная триангуляция двумерного тора, склеенного из прямоугольника, изображённого на рис. 1◊2. Эта триангуляция состоит из одного 0-мерного симплекса, в который склеятся все вершины прямоугольника, трёх 1-

<sup>1</sup>Т. е. выпуклую оболочку концов стандартных базисных векторов  $e_0, e_1, \dots, e_n$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

<sup>2</sup>Т. е. в проекцию симплекса на грань вдоль ребра, соединяющего  $i$ -тую вершину с  $(i+1)$ -й.

<sup>3</sup>Термин «предпучок» употребляется чаще в ситуациях, когда категория  $\mathcal{C}$  мала.

<sup>4</sup>Т. е. сохраняющие порядок и инъективные.

мерных симплексов, в которые склеятся, соответственно, две горизонтальных стороны, две вертикальных стороны, и диагональ прямоугольника, а также пары 2-мерных симплексов, на которые прямоугольник разрезается диагональю. Стрелки на рис. 1◊2 изображают порядок на множестве вершин каждого симплекса и направлены от меньших вершин к большим. Вертикальные рёбра  $e_2$  с рис. 1◊2 изображаются на рис. 1◊1 меридианом тора, а горизонтальные рёбра  $e_1$  — экватором тора. Соответствующее полусимплициальное множество  $X$  имеет  $X_0 = \{v\}$ ,  $X_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $X_2 = \{f_1, f_2\}$ , и  $X_i = \emptyset$  для всех  $i \geq 3$ , а отображения склейки  $X(\varphi)$  действуют по правилам

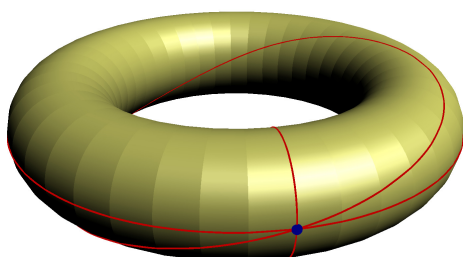


Рис. 1◊1. Триангуляция тора.

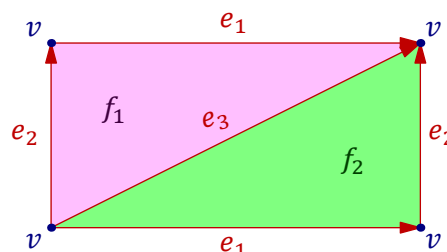


Рис. 1◊2. Симплексы триангуляции.

$$\begin{aligned}
 X(\partial_1^0) = X(\partial_1^1): X_1 &\rightarrow X_0, & e_i &\mapsto v \text{ для всех } i = 1, 2, 3 \\
 X(\partial_2^0): X_2 &\rightarrow X_1, & f_1 &\mapsto e_1, f_2 \mapsto e_2, \\
 X(\partial_2^1): X_2 &\rightarrow X_1, & f_1 &\mapsto e_3, f_2 \mapsto e_3, \\
 X(\partial_2^2): X_2 &\rightarrow X_1, & f_1 &\mapsto e_2, f_2 \mapsto e_1.
 \end{aligned}
 \tag{1-7}$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.4. Существует ли триангуляция окружности  $S^1$  а) тремя 0-мерными и тремя 1-мерными симплексами<sup>1</sup> б) одним 0-мерным и одним 1-мерным симплексом? Существует ли триангуляция двумерной сферы  $S^2$  в) четырьмя 0-мерными, шестью 1-мерными и четырьмя 2-мерными симплексами г) двумя 0-мерными, одним 1-мерным и одним 2-мерным симплексом? Если да, задайте все отображения  $X(\varphi)$  явно, если нет, объясните почему.

ПРИМЕР 1.7 (СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА)

Предпучок множеств  $X: \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \text{Set}$  на всей симплициальной категории называется *симплициальным множеством*. Из каждого симплициального множества  $X$  также, как и в предыдущем примере, можно изготовить топологическое пространство  $|X|$ , называемое его *геометрической реализацией*. Для этого, как и выше, сопоставим каждой точке  $x \in X_n$  стандартный  $n$ -мерный симплекс  $\Delta_x^n$  и обозначим через  $\varphi^* \stackrel{\text{def}}{=} X(\varphi)$  отображение  $X_m \rightarrow X_n$ , которое функтор  $X$  сопоставляет каждому неубывающему отображению  $\varphi: [n] \rightarrow [m]$  из категории  $\Delta$ , а через  $\varphi_*: \Delta^n \rightarrow \Delta^m$  — аффинное отображение симплексов, переводящее вершины симплекса  $\Delta^n$  в вершины симплекса  $\Delta^m$  так, как предписывает  $\varphi$ . После чего для каждого  $m$ , каждого  $x \in X_m$  и каждой стрелки  $\varphi: [n] \rightarrow [m]$  склеим каждую точку  $s \in \Delta_{\varphi^*(x)}^n$  с точкой  $\varphi_*(s) \in \Delta_x^m$ . На языке

<sup>1</sup>Т. е. можно ли получить окружность в качестве геометрической реализации полусимплициального множества  $X$ , у которого  $X_0$  и  $X_1$  состоят из трёх элементов, а все остальные  $X_i$  пусты.

формулу результат такой склейки описывается как топологическое фактор пространство дизъюнктного объединения<sup>1</sup>  $\bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n$  по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему отождествления  $(\varphi^*x, s) \simeq (x, \varphi_*s)$  для всех точек  $x \in X_m$ ,  $s \in \Delta^n$  и стрелок  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ .

Если стрелка  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  является композицией наложения  $\sigma : [n] \twoheadrightarrow [k]$  и вложения  $\delta : [k] \hookrightarrow [m]$ , то каждый  $n$ -мерный симплекс  $\Delta^n$ , лежащий в образе  $\varphi^*$  и помеченный точкой  $z = \sigma^*y = \sigma^*\delta^*x$ , вклеится в пространство  $|X|$  в виде  $k$ -мерного симплекса  $\Delta_y^k = \sigma_*\Delta_z^n$ , полученного из  $\Delta_z^n$  аффинно линейной проекцией  $\sigma_* : \Delta^n \rightarrow \Delta^k$ . При этом он окажется  $\delta$ -той  $k$ -мерной гранью  $m$ -мерного симплекса  $\Delta_x^m$ . Таким образом, каждый симплекс  $z \in X_n$ , лежащий в образе отображения  $\sigma^*$ , отвечающего какой-нибудь стрелке  $\sigma : [n] \rightarrow [k]$  с  $k < n$ , виден в итоговом пространстве  $|X|$  как симплекс меньшей, чем  $n$  размерности. Такие симплексы называются *вырожденными*. Их использование позволяет описывать более общие клеточные структуры, чем стандартные триангуляции. Платой за это является громоздкость получающегося описания: для любого функтора  $X : \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$  каждое из множеств  $X_n$  непусто.

Например,  $n$ -мерная сфера  $S^n$  гомеоморфна топологическому фактору стандартного  $n$ -мерного симплекса по его границе<sup>2</sup>  $S^n \simeq \Delta^n / \partial\Delta^n$ . Этот гомеоморфизм задаёт на сфере  $S^n$  клеточную структуру, состоящую из одной 0-нульмерной вершины, в которую склеится граница симплекса, и одной  $n$ -мерной клетки, в которую превратится весь симплекс. Она описывается предпучком  $X : \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ , у которого при всех  $k$  множество  $X_k = X([k])$  получается из множества  $\text{Hom}_\Delta([k], [n])$  отождествлением всех неэпиморфных стрелок в один элемент, а правило склейки  $\varphi^* : X_m \rightarrow X_k$ , отвечающее неубывающему отображению  $\varphi : [k] \rightarrow [m]$ , переводит класс стрелки  $\zeta : [m] \rightarrow [n]$  в класс стрелки  $\zeta\varphi : [k] \rightarrow [n]$ .

**Упражнение 1.5.** Убедитесь, что это описание корректно задаёт предпучок  $X$  с геометрической реализацией  $|X| \simeq S^n$ , и найдите количество элементов в каждом множестве  $X_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

**Пример 1.8 (Предпучки и пучки на топологических пространствах)**

Исторически, термин «предпучок» впервые возник в контексте категории  $\mathcal{C} = \mathcal{U}(X)$  всех открытых подмножеств  $U \subset X$  заданного топологического пространства  $X$ . Предпучок  $F : \mathcal{U}(X)^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{D}$  сопоставляет каждому открытому множеству  $U \subset X$  объект  $F(U) \in \text{Ob } \mathcal{D}$ , который называется *сечениями* предпучка  $F$  над  $U$ . В зависимости от категории  $\mathcal{D}$  сечения могут образовывать множество, кольцо, алгебру, векторное или топологическое пространство и т. п. Морфизм  $F(W) \rightarrow F(U)$ , отвечающий включению  $U \subset W$ , называется *ограничением сечений*, определённых над  $W$ , на подмножество  $U$ , а результат его применения к сечению  $s \in F(W)$  обозначается через  $s|_U$ . Вот несколько типичных примеров таких предпучков:

- 1) предпучок  $\Gamma_E$  локальных сечений непрерывного отображения  $p : E \rightarrow X$  имеет в качестве  $\Gamma_E(U)$  множество таких непрерывных отображений  $s : U \rightarrow E$ ,

<sup>1</sup>В котором множества  $X_n$  рассматриваются с *дискретной*, а симплексы  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  со стандартной топологией объёмлющего вещественного аффинного пространства.

<sup>2</sup>Т. е. склеивании всех точек границы в одну. Например, двумерная сфера  $S^2$  получается таким способом из треугольника.

что<sup>1</sup>  $p \circ s = \text{Id}_U$ , а его отображения ограничения — это обычные ограничения сечений с большего подмножества на меньшее

- 2) беря в предыдущем примере в качестве отображения проекцию  $p : X \times Y \rightarrow X$ , получаем предпучок локальных непрерывных отображений  $C^0(X, Y)$  пространства  $X$  в пространство  $Y$ , имеющий в качестве сечений над  $U \subset X$  непрерывные отображения  $s : U \rightarrow Y$
- 3) дальнейшими специализациями являются так называемые *структурные предпучки*  $\mathcal{O}_X$ : предпучок дифференцируемых функций  $X \rightarrow \mathbb{R}$  на гладком вещественном многообразии  $X$ , предпучок локальных голоморфных функций  $X \rightarrow \mathbb{C}$  на комплексно аналитическом многообразии  $X$ , предпучок локальных рациональных функций  $X \rightarrow \mathbb{k}$  на алгебраическом многообразии  $X$  над полем  $\mathbb{k}$  и т. п. (все они являются предпучками алгебр над соответствующим полем)
- 4) постоянный предпучок  $S$  имеет в качестве  $S(U)$  одно и то же фиксированное множество  $S$  для всех  $U \subset X$ , и все его отображения ограничения — тождественные морфизмы  $\text{Id}_S$ .

Предпучок  $F$  называется *пучком*, если для любого семейства открытых подмножеств  $U_i$  и любого набора таких локальных сечений  $s_i \in F(U_i)$ , что  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$  при всех  $i, j$ , существует единственное такое сечение  $s \in F(\bigcup_i U_i)$ , что  $s|_{U_i} = s_i$  при всех  $i$ . В случае, когда имеется не более одного такого сечения (но может не быть и ни одного), предпучок  $F$  называется *отделимым*. Все предпучки (1) – (4) отделимы, и только последний из них — постоянный предпучок — не является пучком, поскольку для непересекающихся открытых множеств  $U_1, U_2$  не всякая пара констант  $s_i \in S(U_i)$  является ограничением одной константы  $s \in S(U_1 \sqcup U_2)$ . Тем не менее, наряду с постоянным предпучком в природе имеется и

- 5) постоянный пучок  $S^\sim$ , у которого  $S^\sim(U)$  это непрерывные отображения  $U \rightarrow S$  в множество  $S$ , рассматриваемое с дискретной топологией, или — что то же самое — локально постоянные функции со значениями в  $S$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Опишите множество первообразных действительной функции  $1/x$ .

**1.2.2. Функторы  $\text{Hom}$ .** С каждым объектом  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  любой категории  $\mathcal{C}$  связаны функтор  $h^X : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ , который переводит объект  $Y$  в множество морфизмов

$$h^X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}(X, Y),$$

а стрелку  $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$  в отображение  $\varphi_* : \text{Hom}(X, Y_1) \rightarrow \text{Hom}(X, Y_2)$ ,  $\psi \mapsto \varphi \circ \psi$ , левого умножения на эту стрелку, а также предпучок  $h_X : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ , который переводит объект  $Y$  в множество морфизмов

$$h_X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}(Y, X),$$

а стрелку  $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$  в отображение  $\varphi^* : \text{Hom}(Y_2, X) \rightarrow \text{Hom}(Y_1, X)$ ,  $\psi \mapsto \psi \circ \varphi$ , правого умножения на эту стрелку.

<sup>1</sup>Это требование означает, что каждая точка  $x \in U$  отображается в слой  $p^{-1}(x)$  над нею.



Например, предпучок  $h_{[n]} : \Delta_S \rightarrow \mathcal{S}et$  на полусимплициальной категории  $\Delta_S$  задаёт стандартную триангуляцию стандартного  $n$ -мерного симплекса: множество её  $k$ -мерных симплексов  $h_{[n]}([k]) = \text{Hom}([k], [m])$  это в точности множество всех  $k$ -мерных граней. Предпучок  $h_U : \mathcal{U}(X) \rightarrow \mathcal{S}et$  на топологическом пространстве  $X$  имеет ровно одно сечение над всеми  $W \subseteq U$  и пустое множество сечений над любым  $W \not\subseteq U$ . Вот ещё несколько примеров.

**ПРИМЕР 1.9 (двойственность в категории векторных пространств)**

Предпучок  $h_{\mathbb{k}} : \mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$  сопоставляет векторному пространству  $V$  двойственное векторное пространство  $h_{\mathbb{k}}(V) = \text{Hom}(V, \mathbb{k}) = V^*$ , а линейному отображению  $\varphi : V \rightarrow W$  — двойственное отображение  $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$ , переводящее линейную форму  $\xi : W \rightarrow \mathbb{k}$  в линейную форму  $\xi \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$ .

**ПРИМЕР 1.10 (двойственность конечных упорядоченных множеств)**

Это комбинаторная версия предыдущего примера. Обозначим через  $\nabla_{\text{big}}$  категорию конечных упорядоченных множеств из не менее двух элементов, морфизмами в которой являются неубывающие отображения, переводящие минимальный элемент в минимальный, а максимальный — в максимальный<sup>1</sup>. Тавтологическое включение  $\nabla_{\text{big}} \hookrightarrow \Delta_{\text{big}}$  является строгим, но не полным функтором. Предпучки

$$h_{[1]} : \Delta_{\text{big}}^{\text{opp}} \rightarrow \nabla_{\text{big}} \quad \text{и} \quad h_{[1]} : \nabla_{\text{big}}^{\text{opp}} \rightarrow \Delta_{\text{big}}$$

переводят упорядоченные множества  $X \in \text{Ob } \Delta_{\text{big}}$  и  $Y \in \text{Ob } \nabla_{\text{big}}$  в множества

$$X^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\Delta_{\text{big}}}(X, [1]) \quad \text{и} \quad Y^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\nabla_{\text{big}}}(Y, [1]),$$

порядок на которых задаётся поточечным сравнением значений:

$$\varphi \leq \psi, \quad \text{если } \varphi(x) \leq \psi(x) \text{ для всех } x.$$

Стрелка  $\varphi : Z_1 \rightarrow Z_2$  переводится обоими функторами в морфизм правого умножения  $\varphi^* : \text{Hom}(Z_2, [1]) \rightarrow \text{Hom}(Z_1, [1])$ ,  $\xi \mapsto \xi \circ \varphi$ . Иначе можно сказать, что множество  $Z^*$  это множество «дедекиндовых сечений» множества  $Z$ , т. е. множество таких разбиений  $Z = Z_0 \sqcup Z_1$ , что  $z_0 < z_1$  для всех  $z_0 \in Z_0$ ,  $z_1 \in Z_1$ , причём оба множества  $Z_i$  должны быть непусты, когда  $Z \in \text{Ob } \nabla_{\text{big}}$ , но одно из них может быть пусто, когда  $Z \in \text{Ob } \Delta_{\text{big}}$ . Обратите внимание, что сечения ведут себя *контравариантно* по отношению к морфизмам: при наличии неубывающего отображения  $Z_1 \rightarrow Z_2$  разбиение второго множества  $Z_2$  индуцирует разбиение на  $Z_1$ , но не наоборот.

**1.3. Естественные преобразования.** Для пары функторов  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  естественным (или функториальным) преобразованием  $F$  в  $G$  называется такое занумерованное объектами  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  семейство стрелок  $f_X : F(X) \rightarrow G(X)$  в категории  $\mathcal{D}$ , что для любой стрелки  $\varphi : X \rightarrow Y$  из  $\mathcal{C}$  возникающая в категории  $\mathcal{D}$  диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(Y) \\ f_X \downarrow & & \downarrow f_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(\varphi)} & G(Y) \end{array} \quad (1-8)$$

<sup>1</sup>Отметим, что минимальный и максимальный элементы различны.

коммутативна. На языке алгебр, гомоморфизм  $F : K[\mathcal{C}] \rightarrow K[\mathcal{D}]$  наделяет алгебру  $K[\mathcal{D}]$  структурой модуля над алгеброй  $K[\mathcal{C}]$ , в которой умножение элемента  $b \in K[\mathcal{D}]$  на элемент  $a \in K[\mathcal{C}]$  определяется правилом  $a \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} F(a) \cdot b$ . Пара функторов  $F, G$  задаёт на алгебре  $K[\mathcal{D}]$  две различных структуры  $K[\mathcal{C}]$ -модуля, и естественное преобразование  $f : F \rightarrow G$  это гомоморфизм  $K[\mathcal{C}]$ -модулей, переводящий стрелку  $\psi$  с концом в  $F(X)$  в стрелку  $f_X \circ \psi$  с концом в  $G(X)$ , а все не заканчивающиеся в объектах вида  $F(X)$  стрелки — в нуль.

**УПРАЖНЕНИЕ 1.7.** Убедитесь, что  $K[\mathcal{C}]$ -линейность описанного отображения действительно означает, что для любого  $\varphi \in K[\mathcal{C}]$  действие на  $K[\mathcal{D}]$  операторов  $F(\varphi)$  и  $G(\varphi)$  удовлетворяет соотношению  $f \circ F(\varphi) = G(\varphi) \circ f$ .

**1.3.1. Категории функторов.** Функторы из малой категории  $\mathcal{C}$  в произвольную категорию  $\mathcal{D}$  образуют категорию  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ , объектами которой являются функторы  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , а морфизмами — естественные преобразования  $f : F \rightarrow G$ . Для малой категории  $\mathcal{C}$  мы будем обозначать категорию предпучков  $\text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{D})$  через  $pSh(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ . Опущенная буква  $\mathcal{D}$  в этой записи по умолчанию означает, что  $\mathcal{D} = \text{Set}$ , т. е.  $pSh(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \text{Set})$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 1.8.** Проверьте, что описанное в н° 1.2.2 сопоставление  $X \mapsto h_X$  задаёт функтор  $\mathcal{C} \rightarrow pSh(\mathcal{C})$ , а сопоставление  $X \mapsto h^X$  — предпучок  $\mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Set})$ .

**ПРИМЕР 1.11 (КАТЕГОРИЯ ПРЕДУЧКОВ)**

Предпучки на категории  $\mathcal{U}(X)$  открытых множеств топологического пространства  $X$  обычно называются просто предпучками на  $X$ . Они образуют категорию, обозначаемую  $pSh(X)$ . Морфизм предпучков  $f : F \rightarrow G$  на  $X$  задаётся набором согласованных с ограничениями отображений между множествами сечений  $f_U : F(U) \rightarrow G(U)$ , по одному отображению для каждого открытого  $U \subset X$ . Согласованность с ограничениями означает, что  $f_W(s)|_U = f_U(s|_U)$  для любой пары вложенных открытых множеств  $U \subset W$  и любого сечения  $s \in F(W)$ . Пучки и отделимые предпучки<sup>1</sup> на  $X$  составляют полные подкатегории  $Sh(X)$  и  $spSh(X)$  в категории всех предпучков  $pSh(X)$ .

**ПРИМЕР 1.12 (КАТЕГОРИЯ СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ)**

Предпучки  $X : \Delta \rightarrow \text{Set}$  на симплициальной категории<sup>2</sup>  $\Delta$ , образуют категорию, морфизмами  $X \rightarrow Y$  в которой являются наборы отображений  $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ , согласованные со склейкой, т. е. такие, что для любого симплекса  $x \in X_m$  и неубывающего отображения  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  из  $\Delta$  в  $Y_n$  выполняется равенство  $f_n(\varphi^*x) = \varphi^*f_m(x)$ . На геометрическом языке такому отображению отвечает непрерывное отображение  $f : |X| \rightarrow |Y|$ , при котором образ каждого симплекса  $\Delta_x^n$  в пространстве<sup>3</sup>  $|X|$  отображается на образ симплекса  $\Delta_{f_n(x)}^n$  в пространстве  $|Y|$  так, что все соотношения инцидентности<sup>4</sup> между симплексами при этом сохраняются.

<sup>1</sup>См. прим. 1.8 на стр. 9.

<sup>2</sup>См. прим. 1.7 на стр. 8.

<sup>3</sup>Этот образ, вообще говоря, может быть симплексом меньшей, чем  $n$ , размерности.

<sup>4</sup>Т. е. отношения вида «симплекс  $a$  является  $\varphi$ -той гранью (или  $\psi$ -тым вырождением) симплекса  $b$ ».

**1.3.2. Эквивалентности категорий.** Категории  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  называются *эквивалентными*, если между ними есть такие функторы  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  и  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , что композиция  $GF$  естественно изоморфна тождественному функтору  $\text{Id}_{\mathcal{C}}$ , а композиция  $FG$  естественно изоморфна  $\text{Id}_{\mathcal{D}}$ , т. е. имеются функториальные по  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  и  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$  преобразования

$$GF(X) \simeq X \quad \text{и} \quad FG(Y) \simeq Y, \quad (1-9)$$

являющиеся для всех  $X$  и  $Y$  изоморфизмами в категориях  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  соответственно. Такие функторы  $F$  и  $G$  называются *квазиобратными* друг другу *эквивалентностями категорий*. Подчеркнём, что наличие изоморфизмов (1-9) не означает равенств  $FG = \text{Id}_{\mathcal{D}}$  или  $GF = \text{Id}_{\mathcal{C}}$ : объекты  $GF(X)$  и  $X$  могут быть различны, как и объекты  $FG(Y)$  и  $Y$ .

ПРИМЕР 1.13 (ВЫБОР БАЗИСА)

Зафиксируем поле  $\mathbb{k}$  и обозначим через  $\text{vec}$  категорию конечномерных векторных пространств над  $\mathbb{k}$ , а через  $\text{crd} \subset \text{vec}$  — её полную малую подкатегорию со счётным множеством объектов, коими являются *координатные* пространства  $\mathbb{k}^n$ , где  $n \geq 0$  и  $\mathbb{k}^0 = \{0\}$ . Зафиксируем в каждом пространстве  $V \in \text{Ob } \text{vec}$  какой-нибудь базис, т. е. выберем для каждого  $V \in \text{Ob } \text{vec}$  изоморфизм<sup>1</sup>

$$f_V : V \simeq \mathbb{k}^{\dim(V)}, \quad (1-10)$$

причём для всех координатных пространств положим  $f_{\mathbb{k}^n} = \text{Id}_{\mathbb{k}^n}$ . Рассмотрим функтор  $F : \text{vec} \rightarrow \text{crd}$ , переводящий векторное пространство  $V$  в координатное пространство  $\mathbb{k}^{\dim V}$ , а стрелку  $\varphi : V \rightarrow W$  — в стрелку  $F(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}$ , которую можно воспринимать как матрицу оператора  $\varphi$  в выбранных базисах пространств  $V$  и  $W$ . Покажем, что  $F$  является эквивалентностью категорий, квазиобратной к тавтологическому вложению  $G : \text{crd} \hookrightarrow \text{vec}$ . По построению мы имеем точное равенство<sup>2</sup>  $FG = \text{Id}_{\text{crd}}$ . Противоположная композиция  $GF : \text{vec} \rightarrow \text{vec}$  принимает значения в несопоставимой с  $\text{vec}$  по мощности малой подкатегории  $\text{crd} \subset \text{vec}$ . Однако изоморфизмы (1-10) задают естественное преобразование из  $\text{Id}_{\text{vec}}$  в  $GF$ , т. к. в силу определения действия функтора  $F$  на стрелки все диаграммы (1-8) коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}_{\text{vec}}(V) = V & \xrightarrow{\varphi = \text{Id}_{\text{vec}}(\varphi)} & W = \text{Id}_{\text{vec}}(W) \\ f_V \downarrow & & \downarrow f_W \\ GF(V) = \mathbb{k}^{\dim V} & \xrightarrow{GF(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}} & \mathbb{k}^{\dim W} = GF(W). \end{array}$$

Тем самым, тождественный функтор  $\text{Id}_{\text{vec}}$  естественно изоморфен композиции  $GF$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.9. Покажите, что категория  $\Delta_{\text{big}}$  канонически эквивалентна симплициальной подкатегории  $\Delta \subset \Delta_{\text{big}}$  (см. прим. 1.4 на стр. 5).

<sup>1</sup>Переводящий выбранный базис в стандартный базис пространства  $\mathbb{k}^n$ .

<sup>2</sup>А не просто изоморфизм функторов.

## ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1

Функтор  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  тогда и только тогда задаёт эквивалентность категорий, когда он вполне строг<sup>1</sup> и каждый объект  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$  изоморфен объекту вида  $G(X)$  для некоторого (зависящего от  $Y$ ) объекта<sup>2</sup>  $X = X(Y) \in \text{Ob } \mathcal{C}$ .

Доказательство. Пусть для каждого  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$  указаны  $X = X(Y) \in \text{Ob } \mathcal{C}$  и изоморфизм  $f_Y : Y \simeq G(X)$ , причём когда  $Y = G(X)$ , мы положим  $f_{G(X)} = \text{Id}_{G(X)}$ . Зададим функтор  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  на объектах правилом  $F(Y) = X(Y)$ , а для стрелки  $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$  положим  $F(\varphi)$  равным такой стрелке<sup>3</sup>  $\psi : X(Y_1) \rightarrow X(Y_2)$ , что  $G(\psi) = f_{Y_2} \circ \varphi \circ f_{Y_1}^{-1}$ . Тогда  $FG = \text{Id}_{\mathcal{C}}$  и для любой стрелки  $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$  коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}_{\mathcal{D}}(Y_1) = Y_1 & \xrightarrow{\varphi} & Y_2 = \text{Id}_{\mathcal{D}}(Y_2) \\ f_{Y_1} \downarrow & & \downarrow f_{Y_2} \\ GF(Y_1) = X_1 & \xrightarrow{GF(\varphi)=G(\psi)} & X_2 = GF(Y_2). \end{array}$$

Таким образом,  $f_Y : Y \simeq G(X) = GF(Y)$  задают естественный изоморфизм тождественного функтора  $\text{Id}_{\mathcal{D}}$  с композицией  $GF$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1.10. Покажите, что функтор дуализации из прим. 1.10 и ограничение функтора дуализации из прим. 1.9 на полную подкатегорию конечномерных пространств являются квазиобратными самим себе антиэквивалентностями<sup>4</sup> категорий.

**1.4. Представимые функторы.** Предпучок  $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ , естественно изоморфный предпучку  $h_X : Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  для некоторого  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , называется *представимым*, и объект  $X$  в этом случае называют *представляющим* предпучок  $F$ . Двойственным образом, ковариантный функтор  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$  называется *копредставимым*, если он естественно изоморфен функтору  $h^X : Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  для некоторого объекта  $X$ , который в этом случае называется *копредставляющим* функтор  $F$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.11. Убедитесь, что тензорное произведение конечномерных векторных пространств  $U \otimes V$  копредставляет функтор  $\mathcal{V}ec \rightarrow \mathcal{S}et$ , сопоставляющий векторному пространству  $W$  множество билинейных отображений  $U \times V \rightarrow W$ .

Множество  $X_n = X([n])$  всех  $n$ -мерных симплексов триангулированного топологического пространства  $X : \Delta_s^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$  можно описать как множество всех *симплициальных* отображений  $\Delta^n \rightarrow X$  из стандартным образом триангулированного  $n$ -мерного симплекса  $\Delta^n = h_{[n]}$  в триангулированное пространство  $X$ , т. е. как множество естественных преобразований  $\text{Hom}_{p\mathcal{S}h(\Delta_s)}(h_{[n]}, X)$ . Прямым обобщением этого наблюдения является

<sup>1</sup>Т. е. все отображения  $G : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(Y))$  являются изоморфизмами.

<sup>2</sup>Функторы  $G$ , обладающие этим свойством, называются *по существу сюръективными* (по-английски: *essentially surjective*).

<sup>3</sup>Поскольку  $G : \text{Hom}(X_1, X_2) \simeq \text{Hom}(G(X_1), G(X_2))$  является изоморфизмом, стрелка  $\psi$  существует и единственна.

<sup>4</sup>Т. е. контравариантными эквивалентностями: устанавливают эквивалентность не  $\mathcal{C}$  с  $\mathcal{D}$ , а  $\mathcal{C}^{\text{opp}}$  с  $\mathcal{D}$ .

ЛЕММА 1.1 (ЛЕММА ИОНЕДЫ 1)

Для любого предпучка множеств  $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$  на произвольной категории  $\mathcal{C}$  имеется функториальная по  $F \in \text{pSh}(\mathcal{C})$  и по  $A \in \mathcal{C}$  биекция  $F(A) \simeq \text{Hom}_{\text{pSh}(\mathcal{C})}(h_A, F)$ , переводящая элемент  $a \in F(A)$  в естественное преобразование

$$f_X : \text{Hom}(X, A) \rightarrow F(X), \quad (1-11)$$

которое посылает стрелку  $\varphi : X \rightarrow A$  в значение отображения  $F(\varphi) : F(A) \rightarrow F(X)$  на элементе  $a$ . Обратная биекция сопоставляет каждому естественному преобразованию (1-11) значение отображения  $f_A : h_A(A) \rightarrow F(A)$  на элементе  $\text{Id}_A \in h_A(A)$ .

Доказательство. Для любого естественного преобразования (1-11), любого объекта  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  и любой стрелки  $\varphi : X \rightarrow A$  мы имеем коммутативную диаграмму (1-8)

$$\begin{array}{ccc} h_A(A) = \text{Hom}(A, A) & \xrightarrow{h_A(\varphi)} & \text{Hom}(X, A) = h_A(X) \\ f_A \downarrow & & \downarrow f_X \\ F(A) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(X), \end{array} \quad (1-12)$$

верхняя строка которой переводит  $\text{Id}_A$  в  $\varphi$ , так что  $f_X(\varphi) = F(\varphi)(f_A(\text{Id}_A))$ . Это означает, что естественное преобразование  $f : h_A \rightarrow F$  однозначно восстанавливается по элементу  $a = f_A(\text{Id}_A) \in F(A)$ . Каждому элементу  $a \in F(A)$  при этом отвечает преобразование (1-11), переводящее  $\varphi \in \text{Hom}(X, A)$  в  $f_X(\varphi) = F(\varphi)(a) \in F(X)$  и естественное, поскольку для любой стрелки  $\psi : Y \rightarrow X$  и всех  $\varphi \in h_A(X)$  имеем

$$f_Y(h_A(\psi)\varphi) = f_Y(\varphi\psi) = F(\varphi\psi)a = F(\psi)F(\varphi)a = F(\psi)(f_X(\varphi)),$$

т. е.  $f_Y \circ h_A(\psi) = F(\psi) \circ f_X$  как отображения  $h_A(X) \rightarrow F(Y)$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1.12 (ЛЕММА ИОНЕДЫ 2). Для ковариантного функтора  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$  постройте функториальную по  $F$  и  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$  биекцию  $F(A) \simeq \text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{S}et)}(h^A, F)$ .

СЛЕДСТВИЕ 1.1

Функторы  $X \mapsto h_X$  и  $X \mapsto h^X$  задают вполне строгие ковариантное и контравариантное вложения категории  $\mathcal{C}$  в категории предпучков и ковариантных функторов соответственно. Иными словами, имеются функториальные по  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$  изоморфизмы  $\text{Hom}_{\text{pSh}(\mathcal{C})}(h_A, h_B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  и  $\text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{C})}(h^A, h^B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ .

Доказательство. Применяем леммы Ионеды к функторам  $F = h_B$  и  $F = h^B$ .  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1.2

Если объект  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , копредставляющий функтор  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$  (соотв. представляющий предпучок  $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ ) существует, то он единствен с точностью до канонического изоморфизма.

Доказательство. Если имеются два таких объекта  $A, B$ , что  $h^A \simeq F \simeq h^B$  (соотв.  $h_A \simeq F \simeq h_B$ ), то беря подходящую композицию этих естественных изоморфизмов, мы получаем естественный изоморфизм  $h^B \simeq h^A$  (соотв.  $h_A \simeq h_B$ ), которому по лемме Ионеды отвечает естественный по  $A$  и  $B$  изоморфизм  $A \simeq B$ .  $\square$

**1.4.1. Описание объектов универсальными свойствами.** При помощи сл. 1.2 можно пытаться переносить в произвольную категорию  $\mathcal{C}$  естественные<sup>1</sup> операции над множествами, имеющиеся в категории  $\mathcal{S}et$ . А именно, будем называть результатом применения такой операции к набору объектов  $X_i \in \text{Ob } \mathcal{C}$  представляющий объект  $X$  предпучка  $\mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ , переводящего каждый объект  $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  в результат применения этой операции к множествам  $\text{Hom}(Y, X_i)$  в категории  $\mathcal{S}et$ . Разумеется, такое неявное описание не даёт никаких гарантий существования определяемого объекта, т. к. рассматриваемый функтор может оказаться непредставимым. Однако, если он представим, то представляющий объект  $X$ , во-первых, автоматически обладает некоторыми «универсальными свойствами», а во-вторых, единствен с точностью до единственного изоморфизма, сохраняющего эти свойства. Вдобавок, у каждой такого рода конструкции есть двойственная версия, получающаяся из предыдущей обращением стрелок и объявляющая результатом теоретико множественной операции над объектами  $X_i \in \text{Ob } \mathcal{C}$  копредставляющий объект ковариантного функтора  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ , переводящего  $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  в результат применения операции к множествам  $\text{Hom}(X_i, Y)$ .

ПРИМЕР 1.14 (ПРОИЗВЕДЕНИЕ  $A \times B$ )

Определим *произведение*  $A \times B$  объектов  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$  произвольной категории  $\mathcal{C}$  как объект, представляющий предпучок  $\mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ ,  $Y \mapsto \text{Hom}(Y, A) \times \text{Hom}(Y, B)$ . Если произведение существует, то имеется функториальный по  $Y$  изоморфизм

$$\beta_Y : \text{Hom}(Y, A \times B) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(Y, A) \times \text{Hom}(Y, B).$$

Полагая в нём  $Y = A \times B$ , получаем пару стрелок

$$A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B, \quad (1-13)$$

изображающих элемент  $\beta_{A \times B}(\text{Id}_{A \times B}) \in \text{Hom}(A \times B, A) \times \text{Hom}(A \times B, B)$ . Пара стрелок (1-13) универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок

$$A \xleftarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} B, \quad (\varphi, \psi) \in \text{Hom}(Y, A) \times \text{Hom}(Y, B), \quad (1-14)$$

существует единственная стрелка  $\varphi \times \psi : Y \rightarrow A \times B$ , такая что  $\beta_Y(\varphi \times \psi) = (\varphi, \psi)$ . Коммутативная диаграмма<sup>2</sup>

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(A \times B, A \times B) & \xrightarrow{h_{A \times B}(\varphi \times \psi)} & \text{Hom}(Y, A \times B) \\ \beta_{A \times B} \downarrow & & \downarrow \beta_Y \\ \text{Hom}(A \times B, A) \times \text{Hom}(A \times B, B) & \xrightarrow{h_A(\varphi \times \psi) \times h_B(\varphi \times \psi)} & \text{Hom}(Y, A) \times \text{Hom}(Y, B), \end{array}$$

верхняя горизонтальная стрелка которой переводит  $\text{Id}_{A \times B}$  в  $\varphi \times \psi$ , а композиция нижней и левой стрелок действуют на  $\text{Id}_{A \times B}$  как

$$\text{Id}_{A \times B} \xrightarrow{\beta_{A \times B}} (\pi_A, \pi_B) \xrightarrow{h_A(\varphi \times \psi) \times h_B(\varphi \times \psi)} (\pi_A \circ (\varphi \times \psi), \pi_B \circ (\varphi \times \psi)),$$

<sup>1</sup>Т. е. функториальные по всем участвующим множествам.

<sup>2</sup>Ср. с использованной в доказательстве леммы Йонеды диаграммой из форм. (1-12) на стр. 15

показывает, что равенство  $\beta_Y(\varphi \times \psi) = (\varphi, \psi)$  равносильно равенствам  $\varphi = \pi_A \circ (\varphi \times \psi)$  и  $\psi = \pi_B \circ (\varphi \times \psi)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.13. Пусть диаграмма  $A \xleftarrow{\pi'_A} C \xrightarrow{\pi'_B} B$  тоже универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок (1-14) существует единственная такая стрелка  $Y \rightarrow C$ , композиции которой с  $\pi'_A$  и  $\pi'_B$  равны  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно. Убедитесь, что существует единственный изоморфизм  $\gamma : C \xrightarrow{\sim} A \times B$ , такой что  $\pi_A \circ \gamma = \pi'_A$  и  $\pi_B \circ \gamma = \pi'_B$ . Покажите также, что любая пара стрелок

$$\alpha : A_1 \rightarrow A_2, \quad \beta : B_1 \rightarrow B_2$$

задаёт единственный морфизм  $\alpha \times \beta : A_1 \times B_1 \rightarrow A_2 \times B_2$ , такой что  $\alpha \circ \pi_A = (\alpha \times \beta) \circ \alpha$  и  $\beta \circ \pi_B = (\alpha \times \beta) \circ \beta$ .

В категории множеств произведение  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ . Снабжённое слабой топологией, в которой  $\pi_A$  и  $\pi_B$  непрерывны, это множество задаёт произведение и в категории топологических пространств. Снабжённое покомпонентными операциями, оно же является произведением групп, колец и модулей над кольцами.

ПРИМЕР 1.15 (КОПРОИЗВЕДЕНИЕ  $A \otimes B$ )

Двойственным образом, копроизведение  $A \otimes B$  объектов  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$  произвольной категории  $\mathcal{C}$  определяется как объект, копредставляющий ковариантный функтор

$$Y \mapsto \text{Hom}(A, Y) \times \text{Hom}(B, Y)$$

из  $\mathcal{C}$  в  $\text{Set}$ . Обращая все стрелки в предыдущем примере, мы можем охарактеризовать копроизведение как объект, включающийся в диаграмму

$$A \xrightarrow{\iota_A} A \otimes B \xleftarrow{\iota_B} B,$$

универсальную в том смысле, что для любой пары стрелок в  $\mathcal{C}$

$$A \xrightarrow{\varphi} Y \xleftarrow{\psi} B$$

имеется единственный морфизм  $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \rightarrow Y$ , такой что  $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_A$  и  $\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_B$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.14. Убедитесь, что если такая универсальная диаграмма существует, то она единственна с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со стрелками  $\iota_A, \iota_B$ , и что любая пара стрелок  $\alpha : A_1 \rightarrow A_2, \beta : B_1 \rightarrow B_2$  задаёт единственный такой морфизм  $\alpha \otimes \beta : A_1 \otimes B_1 \rightarrow A_2 \otimes B_2$ , что  $\iota_A \circ \alpha = (\alpha \otimes \beta) \circ \alpha$ .

Копроизведение в категории множеств и топологических пространств это дизъюнктное объединение  $A \otimes B = A \sqcup B$ . В категории групп это свободное произведение групп<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Т. е. фактор свободной группы, порождённой дизъюнктным объединением  $A \sqcup B$ , по наименьшей нормальной подгруппе соотношений, позволяющих заменять пару соседних лежащих в одной группе букв их произведением. К примеру,  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \mathbb{F}_2$  это свободная (некоммутативная) группа с двумя образующими.

$A \otimes B = A * B$ . В категории модулей над кольцом<sup>1</sup> копроизведение совпадает с произведением и равно прямой сумме модулей  $A \otimes B = A \times B = A \oplus B$ . В категории коммутативных колец с единицей копроизведение  $A \otimes B$  это тензорное произведение колец<sup>2</sup>.

ПРИМЕР 1.16 (свободные модули)

Обозначим через  $R\text{-Mod}$  категорию левых модулей над фиксированным кольцом  $R$ . Для любого множества  $E \in \text{Ob } \mathcal{S}et$  ковариантный функтор

$$R\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{S}et, \quad M \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M),$$

копредставим *свободным*  $R$ -модулем с базисом  $E$ . Мы будем обозначать такой свободный модуль через  $R \otimes E$ . По определению, он состоит из формальных линейных комбинаций  $\sum_{e \in E} x_e e$  элементов множества  $E$  с коэффициентами  $x_e \in R$ , лишь конечное число из которых отлично от нуля.

УПРАЖНЕНИЕ 1.15. Установите функториальный по  $M$  и  $E$  изоморфизм

$$\text{Hom}_{R\text{-Mod}}(R \otimes E, M) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M). \quad (1-15)$$

<sup>1</sup>В частности, в категории  $Ab$  абелевых групп.

<sup>2</sup>Т. е. тензорное произведение подлежащих абелевых групп, как модулей над  $\mathbb{Z}$ , с покомпонентным умножением:  $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$ .



### Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Транзитивность очевидна, рефлексивность — взять  $\xi = \text{Id}$ , кососимметричность: в силу возможности сокращать слева (соотв. справа), равенства  $\varphi = \psi\xi = \varphi\xi'\xi$  (соотв.  $\varphi = \xi\psi = \xi\xi'\psi$ ) влекут  $\xi'\xi = \text{Id}$  (соотв.  $\xi\xi' = \text{Id}$ ), а равенства  $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$  (соотв.  $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$ ) влекут  $\xi\xi' = \text{Id}$  (соотв.  $\xi\xi' = \text{Id}$ )

Упр. 1.6. Типичный ответ: « $\ln|x| + C$ , где  $C$  — произвольная константа» *неверен*<sup>1</sup>. На самом деле  $C$  является сечением *постоянного пучка*  $\mathbb{R}^\sim$  над несвязным открытым множеством  $\mathbb{R} \setminus 0$ .

Упр. 1.12. Элементу  $a \in F(A)$  отвечает естественное преобразование

$$f_X : \text{Hom}(A, X) \rightarrow F(X),$$

посылающее стрелку  $\varphi : A \rightarrow X$  в значение отображения  $F(\varphi) : F(A) \rightarrow F(X)$  на элементе  $a$ . Обратное отображение сопоставляет естественному преобразованию  $f_*$  значение отображения  $f_A : h^A(A) \rightarrow F(A)$  на элементе  $\text{Id}_A \in h^A(A)$ . Проверяется это с помощью построенной по произвольной стрелке  $\varphi : A \rightarrow X$  диаграммы

$$\begin{array}{ccc} h^A(A) = \text{Hom}(A, A) & \xrightarrow{h^A(\varphi)} & \text{Hom}(A, X) = h^A(X) \\ f_A \downarrow & & \downarrow f_X \\ F(A) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(X), \end{array} \quad (6-16)$$

верхняя строка которой переводит  $\text{Id}_A$  в  $\varphi$ , так что  $f_X(\varphi) = F(\varphi)(f_A(\text{Id}_A))$ .

---

<sup>1</sup>И в былые годы абитуриентам мехмата случалось получать за такой ответ двойку на устном вступительном экзамене по математике.