

## §2. Сопряжённые функторы и (ко)пределы

**2.1. Сопряжённые функторы.** Функторы  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  и  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  между категориями  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  называются, соответственно, *левым* и *правым сопряжёнными* друг другу, если имеется функториальная по  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  и  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$  биекция

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)). \quad (2-1)$$

С каждой парой сопряжённых функторов связаны естественные преобразования

$$t : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad s : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F. \quad (2-2)$$

Стрелка  $t_Y : FG(Y) \rightarrow Y$ , задающая действие преобразования  $t$  над  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ , является образом элемента  $\text{Id}_{G(Y)}$  при изоморфизме (2-1), написанном для  $X = G(Y)$ :

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \ni \text{Id}_{G(Y)}.$$

Двойственным образом, стрелка  $s_X : X \rightarrow GF(X)$  получается из  $\text{Id}_{F(X)}$  при изоморфизме (2-1), написанном для  $Y = F(X)$ :

$$\text{Id}_{F(X)} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X)).$$

**ПРИМЕР 2.1** (ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМ. 1.15 ПРО СВОБОДНЫЕ МОДУЛИ)  
Изоморфизм из форм. (1-14) на стр. 17 означает, что функтор

$$F : \mathcal{S}et \rightarrow R\text{-Mod}, \quad E \mapsto R \otimes E,$$

сопоставляющий произвольному множеству  $E$  свободный левый  $R$ -модуль с базисом  $E$ , сопряжён слева к забывающему функтору  $G : R\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{S}et$ , переводящему модуль в множество его элементов, т. е.  $\text{Hom}_{R\text{-Mod}}(R \otimes E, M) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, G(M))$  функториально по модулю  $M$  и множеству  $E$ . Естественное преобразование

$$s_E : E \hookrightarrow G(R \otimes E)$$

вкладывает  $E$  в качестве множества базисных векторов в множество всех векторов свободного модуля  $R \otimes E$ . Естественное преобразование

$$t_M : R \otimes G(M) \twoheadrightarrow M$$

это  $R$ -линейный эпиморфизм огромного свободного модуля, базисом которого служит множество всех векторов модуля  $M$ , на модуль  $M$ . Он переводит каждый базисный вектор  $t$  в элемент  $t \in M$ , а формальную линейную комбинацию базисных векторов — в результат её вычисления внутри модуля  $M$ . Так, при  $M = R = \mathbb{R}$  векторное пространство  $\mathbb{R} \otimes G(\mathbb{R})$  состоит из формальных линейных комбинаций  $\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot x$ , в которых лишь конечное множество коэффициентов  $f(x)$  отлично от нуля. Оно изоморфно пространству всех функций  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  с конечным носителем, и преобразование  $t_{\mathbb{R}}$  сопоставляет такой функции  $f$  вещественное число  $\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot x$ .

Предложение 2.1

Для существования левого сопряжённого функтора  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  к данному функтору  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  необходимо и достаточно, чтобы для любого  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  функтор

$$h_G^X : \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}, \quad Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)), \quad (2-3)$$

был копредставим, и в этом случае  $F(X)$  является его копредставляющим объектом.

Доказательство. Необходимость очевидна из определений. Докажем достаточность. Пусть для каждого  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  функтор (2-3) представляется объектом  $F(X)$ , т. е. имеется естественный изоморфизм функторов  $f^X : h^{F(X)} \simeq h_G^X$ . Чтобы продолжить соответствие  $X \mapsto F(X)$  до функтора  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  заметим, что морфизм  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  задаёт естественное преобразование  $\varphi^* : h_G^{X_2} \rightarrow h_G^{X_1}$  заключающееся в правом умножении на  $\varphi$ : стрелка  $\psi : X_2 \rightarrow G(Y)$  переходит в  $\psi\varphi : X_1 \rightarrow G(Y)$ . Из леммы Ионеды вытекает<sup>1</sup>, что композиция естественных преобразований  $(f^{X_1})^{-1} \circ \varphi^* \circ f^{X_2} : h^{F(X_2)} \rightarrow h^{F(X_1)}$  задаётся правым умножением на единственную стрелку  $F(X_1) \rightarrow F(X_2)$ , которую мы и объявим образом  $F(\varphi)$  стрелки  $\varphi$  под действием функтора  $F$ . Прямо по построению мы получаем функториальный по  $X$  изоморфизм  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ .  $\square$

Упражнение 2.1. Докажите двойственное утверждение: для существования правого сопряжённого функтора  $G$  к функтору  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  необходимо и достаточно, чтобы для любого  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$  был предствим предпучок  $h_Y^G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ , переводящий  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  в  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$ , и  $G(X)$  в этом случае его и представляет.

Предложение 2.2

Функтор  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  тогда и только тогда сопряжён слева к функтору  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , когда существуют такие естественные преобразования  $t : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  и  $s : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ , что композиции  $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$  и  $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$  являются тождественными эндоморфизмами функторов  $F$  и  $G$ .

Доказательство. Если имеются функториальные по  $X$  и  $Y$  изоморфизмы

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\varrho} & \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \\ & \xleftarrow{\lambda} & \end{array} \quad (2-4)$$

то для любой стрелки  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  в  $\mathcal{C}$  и любого  $Y$  из  $\mathcal{D}$  коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_1), Y) & \xleftarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, G(Y)) \\ \uparrow F(\varphi)^* & & \uparrow \varphi^* \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_2), Y) & \xleftarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, G(Y)) \end{array}$$

вертикальные стрелки которой задаются правым умножением на  $F(\varphi)$  и на  $\varphi$  соответственно. Рисуя это для  $Y = F(X)$  и морфизма  $\varphi = s_X : X \rightarrow GF(X)$ , который задаёт

<sup>1</sup>См. сл. 1.1 на стр. 15.

действие над объектом  $X$  естественного преобразования  $s : \text{Id}_C \rightarrow GF$  из форм. (2-2) на стр. 18, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) & \xleftarrow{\sim \lambda} & \text{Hom}_C(X, GF(X)) \\ \uparrow F(s_X)^* & & \uparrow s_X^* \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGF(X), F(X)) & \xleftarrow{\sim \lambda} & \text{Hom}_C(GF(X), GF(X)) \end{array}$$

верхняя стрелка  $\lambda$  которой переводит  $s_X$  в  $\text{Id}_{F(X)}$ , а нижняя стрелка  $\lambda$  переводит  $\text{Id}_{GF(X)}$  в морфизм  $t_{F(X)} : FGF(X) \rightarrow F(X)$ , задающий действие второго естественного преобразования  $t : FG \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  из формулы (2-2) над объектом  $F(X)$ . Таким образом,

$$\text{Id}_{F(X)} = \lambda(s_X) = \lambda s_X^*(\text{Id}_{GF(X)}) = F(s_X)^* \lambda(\text{Id}_{GF(X)}) = F(s_X)^*(t_{F(X)}) = t_{F(X)} \circ F(s_X),$$

а это и значит, что композиция  $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$  задаёт тождественное преобразование функтора  $F$ . Проверка того, что  $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$  совпадает с  $\text{Id}_G$  полностью симметрична. Наоборот, если имеются преобразования  $s : \text{Id}_C \rightarrow GF$  и  $t : FG \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ , зададим в (2-4) действие  $\lambda$  и  $\varrho$  на стрелки  $\varphi : F(X) \rightarrow Y$  и  $\psi : X \rightarrow G(Y)$  правилами:

$$\varrho(\varphi) = G(\varphi) \circ s_X \quad \text{и} \quad \lambda(\psi) = t_Y \circ F(\psi),$$

в правых частях которых стоят сквозные отображения вдоль стрелок

$$X \xrightarrow{s_X} GF(X) \xrightarrow{G(\varphi)} G(Y) \quad \text{и} \quad F(X) \xrightarrow{F(\psi)} FG(Y) \xrightarrow{t_Y} Y.$$

Композиция  $\lambda\varrho(\varphi) = t_Y \circ FG(\varphi) \circ F(s_X) : F(X) \rightarrow Y$  представляет собою путь из левого нижнего угла в правый верхний на диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} & & F(X) & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \text{Id}_{F(X)} \nearrow & & & \nwarrow t_Y \\ & & F(X) & \xrightarrow{t_{F(X)}} & FGF(X) \\ & & \nwarrow F(s_X) & & \nearrow FG(\varphi) \\ F(X) & \xrightarrow{F(s_X)} & FGF(X) & \xrightarrow{FG(\varphi)} & FG(Y) \end{array}$$

правый параллелограмм которой коммутативен в силу естественности преобразования  $t$ , а левый треугольник — в силу равенства  $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$  и  $\text{Id}_F$ . Поэтому  $\lambda\varrho(\varphi) = \varphi$ . Равенство  $\varrho\lambda(\psi) = \psi$  проверяется симметричным образом.  $\square$

**2.2. Тензорные произведения и  $\text{Hom}$ .** Пусть  $R$  — произвольное кольцо. Тензорным произведением  $M \otimes_R N$  правого  $R$ -модуля  $M$  на левый  $R$ -модуль  $N$  называется фактор тензорного произведения абелевых групп<sup>1</sup>  $M \otimes N$  по подгруппе, порождённой всевозможными разностями

$$(mx) \otimes n - m \otimes (xn), \quad \text{где} \quad m \in M, \quad x \in R, \quad n \in N.$$

<sup>1</sup>Или, что то же самое,  $\mathbb{Z}$ -модулей.

Это абелева группа, на которой кольцо  $R$  никак не действует, но в которой выполняются соотношения  $(mx) \otimes_R n = m \otimes_R (xn)$ . Тензорное умножение на фиксированный левый  $R$ -модуль  $N$  задаёт функтор из категории правых  $R$ -модулей в абелевы группы

$$\mathcal{M}od\text{-}R \rightarrow \mathcal{A}b, \quad X \mapsto X \otimes_R N,$$

переводящий стрелку  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  в стрелку  $\varphi \otimes \text{Id}_N : m \otimes_R n \mapsto \varphi(m) \otimes_R n$ . Если левый  $R$ -модуль  $N$  одновременно является правым модулем над ещё одним кольцом  $S$  и правое действие  $S$  коммутирует с левым действием  $R$  (такие  $N$  называются  $R$ - $S$  бимодулями), функтор тензорного умножения на  $N$  отображает  $\mathcal{M}od\text{-}R$  в  $\mathcal{M}od\text{-}S$ : кольцо  $S$  действует на  $M \otimes N$  справа по правилу  $(m \otimes n)y = m \otimes (ny)$ . С другой стороны, представимый функтор  $h^N : \mathcal{M}od\text{-}S \rightarrow \mathcal{A}b, Y \mapsto \text{Hom}_S(N, Y)$ , принимает значения в  $\mathcal{M}od\text{-}R$ : правое действие  $x \in R$  на  $\text{Hom}_S(N, Y)$  переводит  $S$ -линейную справа стрелку  $\varphi : N \rightarrow Y$  в стрелку  $\varphi x : n \mapsto \varphi(xn)$ , так что выполняется равенство  $(\varphi x)n = \varphi(xn)$ .

Предложение 2.3

Тензорное умножение на  $R$ - $S$ -бимодуль  $N$  сопряжено слева функтору  $h^N$ , т. е. имеется естественный по  $X \in \text{Ob } \mathcal{M}od\text{-}R$  и  $Y \in \text{Ob } \mathcal{M}od\text{-}S$  изоморфизм абелевых групп

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(X \otimes_R N, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(X, \text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y)). \quad (2-5)$$

Доказательство. Отображение из левой части (2-5) в правую сопоставляет  $S$ -линейному справа гомоморфизму  $\varphi : X \otimes_R N \rightarrow Y$  зависящее от  $x \in X$  семейство гомоморфизмов  $\varphi_x : N \rightarrow Y, n \mapsto \varphi(x \otimes n)$ . Каждый из них  $S$ -линеен справа:

$$\varphi_x(ns) = \varphi(x \otimes ns) = \varphi(x \otimes n)s = \varphi_x(n)s,$$

а сопоставление  $x \mapsto \varphi_x$ , как отображение  $X \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y)$ ,  $R$ -линейно справа:

$$\varphi_{xr}n = \varphi(xr \otimes n) = \varphi(x \otimes rn) = \varphi_x(rn) = (\varphi_x r)n.$$

Обратное отображение из правой части (2-5) в левую переводит семейство  $S$ -линейных справа гомоморфизмов  $\varphi_x : N \rightarrow Y$ , которые  $R$ -линейно справа зависят от  $x \in X$ , в  $S$ -линейный справа гомоморфизм  $\varphi : x \otimes n \mapsto \psi_x(n)$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 2.2. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y) \otimes_R N \rightarrow Y \quad \text{и} \quad s_X : X \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, X \otimes_R N).$$

ПРИМЕР 2.2 (ИНДУЦИРОВАНИЕ И КОИНДУЦИРОВАНИЕ)

Если кольцо  $A$  содержится в кольце  $B$  и они имеют общую единицу, каждый правый  $B$ -модуль  $X$  одновременно является и правым  $A$ -модулем, что задаёт функтор ограничения

$$\text{res} : \mathcal{M}od\text{-}B \rightarrow \mathcal{M}od\text{-}A. \quad (2-6)$$

Рассмотрим  $B$  как  $A$ - $B$  бимодуль и положим в [предл. 2.3](#)  $S = N = B$ ,  $R = A$ . Абелева группа  $\text{Hom}_{\text{Mod-}B}(B, Y)$  канонически отождествляется с  $Y$  и как правый  $A$ -модуль изоморфна  $\text{res } Y$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.3. Убедитесь в этом.

Поэтому изоморфизм 2-5 из [предл. 2.3](#) превращается в функториальный по  $A$ -модулю  $X$  и  $B$ -модулю  $Y$  изоморфизм

$$\text{Hom}_{\text{Mod-}B}(X \otimes_A B, Y) \simeq \text{Hom}_{\text{Mod-}A}(X, \text{res } Y).$$

Правый  $B$ -модуль  $\text{ind } X \stackrel{\text{def}}{=} X \otimes_A B$  называется *индуцированным* с  $A$ -модуля  $X$ . Таким образом, функтор индуцирования  $\text{ind} : \text{Mod-}A \rightarrow \text{Mod-}B$  сопряжён слева к функтору ограничения.

УПРАЖНЕНИЕ 2.4. Явно опишите естественные преобразования

$$\lambda_Y : \text{res ind } Y \rightarrow Y \quad \text{и} \quad \varrho_X : X \rightarrow \text{ind res } X.$$

Теперь рассмотрим  $B$  как  $B$ - $A$  бимодуль и положим в [предл. 2.3](#)  $S = A$ ,  $N = R = B$ . Абелева группа  $X \otimes_B B$  канонически отождествляется с  $X$  и как правый  $A$ -модуль изоморфна  $\text{res } X$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.5. Убедитесь в этом.

Поэтому изоморфизм 2-5 из [предл. 2.3](#) превращается в функториальный по  $B$ -модулю  $X$  и  $A$ -модулю  $Y$  изоморфизм абелевых групп

$$\text{Hom}_{\text{Mod-}A}(\text{res } X, Y) \simeq \text{Hom}_{\text{Mod-}B}(X, \text{Hom}_{\text{Mod-}A}(B, Y)).$$

Правый  $B$ -модуль  $\text{coind } Y \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\text{Mod-}A}(B, Y)$  называется *коиндуцированным* с  $A$ -модуля  $Y$ . Таким образом, функтор коиндуцирования  $\text{coind} : \text{Mod-}A \rightarrow \text{Mod-}B$  сопряжён справа к функтору ограничения.

УПРАЖНЕНИЕ 2.6. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \text{res coind } Y \rightarrow Y \quad \text{и} \quad s_X : X \rightarrow \text{coind res } X.$$

В ситуации, когда  $A = \mathbb{k}[H]$  и  $B = \mathbb{k}[G]$  являются групповыми алгебрами группы  $G$  и её подгруппы  $H$  с коэффициентами в поле  $\mathbb{k}$ , мы получаем известные из начального курса алгебры функторы (ко)индуцирования линейных представлений группы  $G$  над полем  $\mathbb{k}$  с представлений её подгруппы  $H$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.7\*. Покажите, что функторы  $\text{ind}, \text{coind} : \text{Mod-}H \rightarrow \text{Mod-}G$  естественно изоморфны, если индекс  $[G : H]$  конечен.

ПРИМЕР 2.3 (СИНГУЛЯРНЫЕ СИМПЛЕКСЫ)

Свяжем с топологическим пространством  $Y$  симплициальное множество его *сингулярных симплексов*  $S(Y) : \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \text{Set}$ , которое сопоставляет комбинаторному симплексу  $[n] \in \text{Ob } \Delta$  множество  $S_n(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta^n, Y) = h_Y(\Delta^n)$  всех непрерывных отображений правильного  $n$ -мерного симплекса  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  в  $Y$ , а неубывающему отображению  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  — правое умножение  $f \mapsto f \circ \varphi^*$  на аффинное отображение

$\varphi^* : \Delta^m \rightarrow \Delta^n$ , действие которого на вершины симплекса совпадает с  $\varphi$ . Возникающий таким образом функтор  $S : \mathcal{T}op \rightarrow pSh(\Delta)$  сопряжён справа функтору геометрической реализации  $pSh(\Delta) \rightarrow \mathcal{T}op$ ,  $X \mapsto |X|$ , из [прим. 1.7](#) на стр. 8, т. е. имеется естественный по симплициальному множеству  $X : \Delta^{opp} \rightarrow \mathcal{S}et$  и топологическому пространству  $Y$  изоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y) \simeq \text{Hom}_{pSh} (X, S(Y)), \quad (2-7)$$

который является категорным аналогом изоморфизма из форм. (2-5) на стр. 21. В самом деле, функтор геометрической реализации вкладывает категорию  $\Delta$  в категорию  $\mathcal{T}op$  в виде дизъюнктного набора  $D = \bigsqcup_{n \geq 0} \Delta^n$  правильных симплексов всех размерностей. На пространстве  $D$  имеется левое действие стрелок  $\varphi$  категории  $\Delta$  аффинными отображениями  $\varphi_*$ . Оно задаёт правое действие стрелок из  $\Delta$  на множестве  $S(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)$  сингулярных симплексов топологического пространства  $Y$ . С другой стороны, каждое симплициальное множество  $X : \Delta^{opp} \rightarrow \mathcal{S}et$  по определению снабжено правым действием стрелок категории  $\Delta$  на множества  $X_n = X([n])$ , и геометрическая реализация  $|X|$ , представляющая собою фактор дизъюнктного объединения  $\bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n$  по соотношениям  $(x\varphi, s) = (x, \varphi s)$ , является прямым аналогом «тензорного произведения  $X \otimes_{\Delta} D$ ». Таким образом, изоморфизм (2-7) имеет вид

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}op} (X \otimes_{\Delta} D, Y) \simeq \text{Hom}_{\text{Mod-}\Delta} (X, \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)), \quad (2-8)$$

ничем не отличающийся от изоморфизма (2-5) со стр. 21.

**УПРАЖНЕНИЕ 2.8.** Явно постройте взаимно обратные изоморфизмы между левой и правой частями формулы (2-8) и опишите естественные преобразования<sup>1</sup>

$$t_Y : |S(Y)| \rightarrow Y \quad \text{и} \quad s_X : X \rightarrow S(|X|).$$

**2.3. Пределы диаграмм.** Любую малую категорию  $\mathcal{N}$  можно воспринимать как диаграмму, вершинами которой служат объекты, а стрелками — морфизмы категории  $\mathcal{N}$ . Функторы  $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  реализуют эту диаграмму в категории  $\mathcal{C}$  в том смысле, что указывают объекты  $X_\nu = X(\nu)$ , занумерованные множеством  $\text{Ob } \mathcal{N}$ , а также стрелки  $X(\nu \rightarrow \mu) : X_\nu \rightarrow X_\mu$ , занумерованные множеством  $\text{Mor } \mathcal{N}$ . Поэтому такие функторы часто называют *диаграммами* вида  $\mathcal{N}$  в категории  $\mathcal{C}$ . Диаграммы образуют категорию  $\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$  с естественными преобразованиями функторов в качестве морфизмов. Каждый объект  $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  задаёт *постоянную диаграмму*  $\bar{Y}$ , в которой все объекты  $\bar{Y}_\nu = Y$ , а все стрелки  $\bar{Y}(\nu \rightarrow \mu) = \text{Id}_Y$ . Со всякой диаграммой  $X \in \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$  связан предпучок множеств  $\mathcal{C}^{opp} \rightarrow \mathcal{S}et$ ,  $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(\bar{Y}, X)$ . Если он представим, т. е. существует такой объект  $L \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , что имеется естественный по  $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  изоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, L) = \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(\bar{Y}, X), \quad (2-9)$$

<sup>1</sup>Первое является непрерывным отображением топологических пространств, второе — естественным преобразованием функторов  $\Delta^{opp} \rightarrow \mathcal{S}et$ , переводящих комбинаторный симплекс  $[n]$  в множества  $X_n$  и  $\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, |X|)$  соответственно.

то представляющий объект  $L$  называют *пределом*<sup>1</sup> диаграммы  $X$  и пишут  $L = \lim X$ . Двойственным образом, объект  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , копредставляющий ассоциированный с диаграммой  $X$  ковариантный функтор  $\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ ,  $Y \mapsto \text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(X, \bar{Y})$ , называется *копределом*<sup>2</sup> диаграммы  $X: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  и обозначается  $C = \text{colim } X$ . С копределом  $C$  связана функториальная по  $Y \in \mathcal{C}$  биекция

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) = \text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(X, \bar{Y}). \quad (2-10)$$

Как и все (ко)представляющие объекты, (ко)пределы однозначно характеризуются своими «универсальными свойствами». Полагая  $Y = L$  в формуле (2-9), мы получаем естественное преобразование  $\pi: \bar{L} \rightarrow X$ , соответствующее тождественному эндоморфизму  $\text{Id}_L$  и представляющее собою набор стрелок  $\pi_\nu: L \rightarrow X_\nu$ , которые коммутируют со всеми стрелками диаграммы  $X$  и универсальны в том смысле, что для любого коммутирующего со всеми стрелками диаграммы  $X$  набора стрелок  $\psi_\nu: Y \rightarrow X_\nu$ , выпущенных из произвольного объекта  $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , существует единственный морфизм  $\alpha: Y \rightarrow \lim X$ , такой что  $\psi_\nu = \pi_\nu \circ \alpha$  для всех  $\nu$ .

Двойственным образом, в копредел  $C = \text{colim } X$  диаграммы  $X: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  ведёт канонический набор таких коммутирующих со всеми стрелками диаграммы  $X$  морфизмов  $\iota_\nu: X_\nu \rightarrow C$ , что для любых перестановочных со всеми стрелками диаграммы  $X$  морфизмов  $\psi_\nu: X_\nu \rightarrow Y$  в произвольный объект  $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  существует единственный морфизм  $\beta: \text{colim } X_\nu \rightarrow Y$ , такой что  $\psi_\nu = \beta \circ \iota_\nu$  для всех  $\nu$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 2.9.** Проверьте, что универсальные свойства задают предел и копредел однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми каноническими стрелками  $\pi_\nu$  и  $\iota_\nu$  соответственно.

**ПРИМЕР 2.4** (начальный, конечный и нулевой объекты)

Простейшая диаграмма — пустая. Её предел  $\text{Fin}$  называется *конечным*, а копредел  $\text{Og}$  — *начальным* объектами категории. Эти объекты однозначно с точностью до единственного изоморфизма определяются тем, что для любого  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  есть единственная стрелка  $X \rightarrow \text{Fin}$  и единственная стрелка  $\text{Og} \rightarrow X$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 2.10.** Укажите начальный и конечный объекты в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом.

Если в категории имеется объект  $0$ , являющийся одновременно и начальным, и конечным, то этот объект называется *нулевым*. Морфизм  $X \rightarrow Y$  в категории с нулевым объектом называется *нулевым*, если он разлагается<sup>3</sup> в композицию  $X \rightarrow 0 \rightarrow Y$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 2.11.** Какие категории из [упр. 2.10](#) обладают нулевым объектом?

**ПРИМЕР 2.5** (прямые (ко)произведения)

Малая категория  $\mathcal{N}$  называется *дискретной*, если все её морфизмы исчерпываются тождественными морфизмами  $\text{Id}_\nu$  с  $\nu \in \text{Ob } \mathcal{N}$ . Соответствующие *дискретные диаграммы*  $X: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  — это семейства объектов  $X_\nu$  без стрелок между ними. Пределы

<sup>1</sup>Или *проективным* пределом.

<sup>2</sup>Или *инъективным* пределом.

<sup>3</sup>Обратите внимание, что если такое разложение существует, то оно единственно.

и копределы таких диаграмм называются *прямыми произведениями* и *копроизведениями* и обозначаются, соответственно, через  $\prod_{\nu} X_{\nu}$  и  $\coprod_{\nu} X_{\nu}$ . Когда индексов всего два, мы получаем прямые (ко) произведения двух объектов из [прим. 1.13](#) и [прим. 1.14](#) на [стр. 16](#). Очевидная индукция показывает, что для существования всех конечных прямых (ко) произведений достаточно существования прямых (ко) произведений любых двух объектов.

**ПРИМЕР 2.6 ((ко) УРАВНИТЕЛИ)**

(Ко)предел диаграммы вида  $X \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} Y$  называется *(ко)уравнителем*<sup>1</sup> стрелок  $\varphi$  и  $\psi$ . В

категории множеств уравнитель представляет собою множество решений уравнения  $\varphi(x) = \psi(x)$  на  $x \in X$  или, более научно, прообраз диагонали  $\Delta_Y \subset Y \times Y$  при каноническом отображении  $\varphi \times \psi : X \rightarrow Y \times Y$ . Коуравнитель является фактором множества  $Y$  по наименьшему отношению эквивалентности<sup>2</sup>  $R \subset Y \times Y$ , содержащему образ отображения  $\varphi \times \psi$ , т. е. все отождествления  $\varphi(x) = \psi(x)$  с  $x \in X$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 2.12.** Проверьте это и постройте (ко) уравнители любой пары стрелок в категориях топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным коммутативным кольцом.

Например, (ко) ядро гомоморфизма  $f : A \rightarrow B$  в категории  $\mathcal{A}b$  абелевых групп это (ко) уравнитель  $f$  и нулевого морфизма. Интуитивно, уравнители позволяют задавать «подобъекты» при помощи «уравнений», а коуравнители — «фактор объекты» при помощи «соотношений».

**ПРИМЕР 2.7 (ПОСЛОЙНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ)**

Предел диаграммы вида

$$X \xrightarrow{\xi} B \xleftarrow{\eta} Y$$

называется *послойным*<sup>3</sup> *произведением* и обозначается  $X \times_B Y$ . Он включается в коммутативный декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X \times_B Y & \xrightarrow{\psi} & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow{\xi} & B \end{array} \quad (2-11)$$

<sup>1</sup>По-английски *(co)equalizer*.

<sup>2</sup>Напомним, что *отношение эквивалентности* на  $Y$  это подмножество  $R \subset Y \times Y$ , которое *рефлексивно* (содержит диагональ  $\Delta_Y$ ), *симметрично* (переходит в себя при транспозиции сомножителей) и *транзитивно* (т. е.  $(y_1, y_2), (y_2, y_3) \in R \Rightarrow (y_1, y_3) \in R$ ). Пересечение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности. Поэтому любое подмножество  $S \subset Y \times Y$  содержится в единственном минимальном по включению отношении эквивалентности  $R_S$ , которое называется *порождённым* подмножеством  $S$ . Всякое отображение  $\xi : Y \rightarrow Z$  определяет отношение эквивалентности  $R_{\xi} = \{(y_1, y_2) \mid \xi(y_1) = \xi(y_2)\}$  на  $Y$ , причём  $\xi' : Y \rightarrow Z'$  тогда и только тогда представляется в виде композиции  $\xi' = \eta \circ \xi$  с некоторой стрелкой  $\eta : Z \rightarrow Z'$ , когда  $R_{\xi} \subset R_{\xi'}$ , т. е. когда эквивалентность, отвечающая  $\xi$ , *влечёт* эквивалентность, отвечающую  $\xi'$  (в этом случае говорят, что первая эквивалентность *тоньше* или *сильнее* последней).

<sup>3</sup>Или *расслоенным*.



универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\psi'} & Y \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow{\xi} & B \end{array}$$

имеется единственный такой морфизм  $\varphi' \times \psi' : Z \rightarrow X \times_B Y$ , что  $\varphi' = \varphi \circ (\varphi' \times \psi')$  и  $\psi' = \psi \circ (\varphi' \times \psi')$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.13. Убедитесь, что левый верхний угол диаграммы (2-11) задаётся этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с  $\varphi$  и  $\psi$ .

В категории множеств отображение  $X \times_B Y \rightarrow B$  имеет в качестве слоя над произвольной точкой  $b \in B$  прямое произведение слоёв  $\varphi^{-1}(b) \times \psi^{-1}(b)$ , отсюда и название.

УПРАЖНЕНИЕ 2.14. Убедитесь, что  $U \times_X V = U \cap V$  в категории  $\mathcal{U}(X)$  открытых подмножеств топологического пространства  $X$ .

Пример 2.8 (послойные копроизведения)

Оборачивая все стрелки в предыдущем примере, назовём *послойным копроизведением*  $X \otimes_B Y$  копредел диаграммы  $X \xleftarrow{\xi} B \xrightarrow{\eta} Y$ . Он вписывается в коммутативный кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\eta} & Y \\ \xi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{\varphi} & X \otimes_B Y \end{array} \quad (2-12)$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\eta} & Y \\ \xi \downarrow & & \downarrow \psi' \\ X & \xrightarrow{\varphi'} & Z \end{array}$$

существует единственный такой морфизм  $\varphi' \otimes \psi' : X \otimes_B Y \rightarrow Z$ , что  $\varphi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \varphi$  и  $\psi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \psi$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.15. Явно опишите послойные (ко) произведения в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп<sup>1</sup>, коммутативных колец с единицей и модулей над коммутативным кольцом.

<sup>1</sup>В теории групп копроизведения традиционно называются *амальгами*.

**2.3.1. (Ко) замкнутость.** Категория  $\mathcal{C}$  называется (ко) замкнутой, если для любой малой категории  $\mathcal{N}$  каждая диаграмма  $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  имеет (ко) предел в  $\mathcal{C}$ .

**Предложение 2.4**

Для замкнутости категории  $\mathcal{C}$  достаточно существования в  $\mathcal{C}$  конечного объекта, прямых произведений любых множеств объектов и уравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом, а для козамкнутости — существования в  $\mathcal{C}$  начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

**Доказательство.** Мы построим предел произвольной диаграммы  $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ , копредел строится аналогично путём обращения стрелок. Надо предъявить универсальный набор морфизмов  $\varphi_\nu : L \rightarrow X_\nu$ , решающий уравнения  $\varphi_\mu = X(\nu \rightarrow \mu) \circ \varphi_\nu$ , где  $\nu \rightarrow \mu$  пробегает  $\text{Mor } \mathcal{N}$ . Для каждой стрелки  $\nu \rightarrow \mu$  обозначим через  $T_{\nu \rightarrow \mu} = X_\mu$  тот объект диаграммы  $X$ , в который ведёт эта стрелка, и образуем два произведения  $A = \prod_\mu X_\mu$  и  $B = \prod_{\nu \rightarrow \mu} T_{\nu \rightarrow \mu}$ . В первое из них каждый объект диаграммы  $X$  входит ровно один раз, а во второе — столько раз, сколько стрелок в нём заканчивается. Для каждой стрелки  $\mu \rightarrow \nu$  имеются два отображения  $A \rightarrow T_{\nu \rightarrow \mu}$ : проекция  $\pi_\mu : A \rightarrow X_\mu$  произведения  $A$  на  $\mu$ -тый сомножитель и композиция  $\varkappa_{\nu \rightarrow \mu} = X(\nu \rightarrow \mu) \circ \pi_\nu$  проекции  $\pi_\nu : A \rightarrow X_\nu$  произведения  $A$  на  $\nu$ -тый сомножитель со стрелкой  $X(\nu \rightarrow \mu) : X_\nu \rightarrow X_\mu$  диаграммы  $X$ . По универсальному свойству произведения  $B$  эти пары отображений задают два морфизма  $\pi, \varkappa : A \rightarrow B$ . Их уравнитель  $L$  приходит вместе с морфизмом  $\varphi : L \rightarrow A$ , который представляет собою набор стрелок  $\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi$ , удовлетворяющих равенствам

$$\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi = \varkappa_{\nu \rightarrow \mu} \circ \varphi = X(\nu \rightarrow \mu) \circ \varphi_\nu$$

и обладающих требуемым универсальным свойством (убедитесь в этом!).  $\square$

**Пример 2.9**

В категории множеств  $\lim X$  изоморфен подмножеству прямого произведения  $\prod X_\nu$ , образованному такими семействами  $(x_\nu)$ ,  $\nu \in \text{Ob } \mathcal{N}$ ,  $x_\nu \in X_\nu$ , где  $x_\mu = X(\nu \rightarrow \mu)x_\nu$  для всех стрелок  $\nu \rightarrow \mu$  из  $\text{Mor } \mathcal{N}$ .

**Упражнение 2.16.** Проверьте, что  $\text{colim } X$  изоморфен коуравнителю диаграммы

$$\prod_{\nu \rightarrow \mu} S_{\nu \rightarrow \mu} \xrightarrow[\varkappa]{\iota} \prod_\nu X_\nu,$$

в которой объекты  $S_{\nu \rightarrow \mu} = X_\nu$  суть начала стрелок  $X(\nu \rightarrow \mu)$  диаграммы  $X$ , а морфизмы задаются семействами стрелок

$$\iota_\nu : S_{\nu \rightarrow \mu} \rightarrow \prod_\nu X_\nu \quad \text{и} \quad \varkappa_{\nu \rightarrow \mu} = \iota_\mu \circ X(\nu \rightarrow \mu) : S_{\nu \rightarrow \mu} \rightarrow \prod_\nu X_\nu.$$

В частности, убедитесь, что в категории множеств  $\text{colim } X$  является фактором дизъюнктного объединения  $\bigsqcup_\nu X_\nu$  по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему отождествления  $x \sim X(\nu \rightarrow \mu)x$  для всех  $x \in X_\nu$  и всех стрелок  $\nu \rightarrow \mu$  из  $\text{Mor } \mathcal{N}$ .

Замечание 2.1. Для того, чтобы в категории  $\mathcal{C}$  существовали (ко) пределы всех конечных диаграмм, в условиях предл. 2.4 достаточно требовать существования в  $\mathcal{C}$  конечных (ко) произведений.

Следствие 2.1

Категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом замкнуты и козамкнуты.

Доказательство. Сделайте упр. 2.12. □

Пример 2.10 (уточнённое определение пучка)

Объединение  $U = \bigcup_i U_i$  произвольного семейства  $\{U_i\}_{i \in I}$  открытых множеств топологического пространства  $X$  является коуравнителем отображений

$$\prod_{ij} U_i \cap U_j \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi_1} \\ \xrightarrow{\psi_2} \end{array} \prod_i U_i,$$

являющихся копроизведениями вложений  $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i$  и  $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_j$ . Всякий предпучок  $F : \mathcal{U}(X)^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{C}$  объектов любой категории  $\mathcal{C}$  переводит диаграмму коуравнителя

$$\prod_{ij} U_i \cap U_j \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi_1} \\ \xrightarrow{\psi_2} \end{array} \prod_i U_i \xrightarrow{\varphi} U, \quad (2-13)$$

в следующую диаграмму в категории  $\mathcal{C}$  :

$$F(U) \xrightarrow{\varphi^*} \prod_i F(U_i) \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi_1^*} \\ \xrightarrow{\psi_2^*} \end{array} \prod_{ij} F(U_i \cap U_j). \quad (2-14)$$

Стрелка  $\varphi^*$  этой диаграммы является произведением ограничений  $F(U) \rightarrow F(U_i)$ , а стрелки  $\psi_1^*$  и  $\psi_2^*$  — ограничений  $F(U_i) \rightarrow F(U_i \cap U_j)$  и  $F(U_j) \rightarrow F(U_i \cap U_j)$  соответственно. По определению, предпучок  $F$  является пучком, если стрелка  $\varphi$  является уравнителем стрелок  $\psi_1^*$  и  $\psi_2^*$ . В частности, когда множество индексов  $I = \emptyset$ , мы получаем в левом члене диаграммы (2-14) объект  $F(\emptyset) \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , а в среднем и правом членах — произведения пустых множеств объектов, т. е. пределы пустых диаграмм, канонически изоморфные конечному объекту<sup>1</sup>  $\text{Fin}_{\mathcal{C}}$  категории  $\mathcal{C}$ . Стрелки  $\psi_1^*$  и  $\psi_2^*$  являются в этом случае тождественными эндоморфизмами конечного объекта, и их уравнитель равен  $\text{Id}_{\text{Fin}_{\mathcal{C}}}$ . Таким образом, для любого пучка объектов произвольной категории  $\mathcal{C}$  на топологическом пространстве  $X$  должно выполняться равенство  $F(\emptyset) = \text{Fin}_{\mathcal{C}}$ . Например, для любого пучка множеств  $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Set}$  множество  $F(\emptyset)$  состоит из одной точки, а для пучка абелевых групп  $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Ab}$  группа  $F(\emptyset) = 0$ .

<sup>1</sup>Тем самым, для того чтобы предпучок  $F$  был пучком, необходимо, чтобы в категории  $\mathcal{C}$  был конечный объект (см. прим. 2.4 на стр. 24).

**2.3.2. Фильтрующиеся диаграммы.** Малая категория  $\mathcal{F}$  называется *фильтрующейся*, если из любых двух её объектов выходят стрелки с общим концом и для любых двух стрелок  $\varphi, \psi$  с общими началом и концом из их конца ведёт такая стрелка  $\zeta$ , что  $\zeta\varphi = \zeta\psi$ . Например, любой чум, в котором у каждого двух элементов есть общая верхняя грань, является фильтрующейся категорией<sup>1</sup>. Диаграммы вида  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$  и  $\mathcal{F}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{C}$  с фильтрующейся категорией  $\mathcal{F}$  принято называть, соответственно, *индуктивными* (или *прямыми*) и *проективными* (или *обратными*) системами стрелок категории  $\mathcal{C}$ , а их (ко)пределы обозначать через  $\varinjlim, \varinjlim$  для прямых систем и  $\varprojlim, \varprojlim$  для обратных. Копредел индуктивной системы множеств  $X: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}et$  изоморфен фактору дизъюнктивного объединения  $\coprod_{v \in \text{Ob } \mathcal{F}} X_v$  по отношению эквивалентности, отождествляющему  $x_v \in X_v$  и  $x_\mu \in X_\mu$ , если существует такая пара стрелок  $v \rightarrow \eta \leftarrow \mu$ , что  $X(v \rightarrow \eta)x_v = X(\mu \rightarrow \eta)x_\mu$  в множестве  $X_\eta$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.17. Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности и убедитесь, что множество классов эквивалентности изоморфно  $\varinjlim X$ .

ПРИМЕР 2.11 (РАЗБИЕНИЯ ОТРЕЗКА)

Конечные наборы точек  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_\infty = 1$ , разбивающие отрезок  $[0, 1]$  на непересекающиеся интервалы (как в определении интеграла Римана), образуют прямую систему в категории  $\mathcal{V}_{\text{big}}$  относительно морфизмов включения, отвечающих измельчениям разбиения. Копределом этой системы в категории всех (не обязательно конечных) упорядоченных множеств с отмеченными максимальным и минимальным элементами является  $[0, 1]$ . В категории  $\mathcal{V}_{\text{big}}$  копредела не существует.

ПРИМЕР 2.12 (ОТКРЫТЫЕ ОКРЕСТНОСТИ И СЛОЙ ПРЕДУПЧКА)

Множество открытых окрестностей любого подмножества  $Z \subset X$  топологического пространства  $X$  является проективной системой в категории  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$  открытых подмножеств в  $X$ , т. к. для любых окрестностей  $U, W \supset Z$  окрестность  $U \cap W = U \times_X W \supset Z$  вкладывается и в окрестность  $U$ , и в окрестность  $W$ . Пределом этой системы в категории  $\mathcal{S}et$  является пересечение всех открытых окрестностей  $Z$ . В категории  $\mathcal{U}$  предела может и не быть. Для любого предпучка  $F: \mathcal{U}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$  множества сечений  $F(U)$  над открытыми окрестностями  $U$  произвольно заданного подмножества  $Z \subset X$  образуют индуктивную систему в  $\mathcal{S}et$ . Её копредел называется *слоем* предпучка  $F$  над  $Z$  и обозначается  $F_Z$ . В силу козамкнутости категории  $\mathcal{S}et$  этот копредел всегда существует. Согласно [упр. 2.17](#), каждый элемент слоя  $F_Z$  представляет собою класс  $s|_Z$  некоторого сечения  $s \in F(U)$  над каким-либо открытым множеством  $U \supset Z$  по модулю эквивалентности, отождествляющей сечения  $s \in F(U)$  и  $t \in F(W)$ , когда  $s|_V = t|_V$  над некоторым открытым  $V$ , таким что  $Z \subset V \subset U \cap W$ . Определённые таким образом классы  $s|_Z$  называются *ростками сечений* предпучка  $F$  над  $Z$ .

В частности, когда  $Z = \{x\}$  это одна точка, слой  $F_x$  называется *слоем  $F$  в точке  $x$* . Мы будем обозначать класс сечения  $s$  в слое  $F_x$  через  $s|_x$ . В ситуации, когда  $F$  — пучок функций на  $X$  со значениями в каком-либо поле  $\mathbb{k}$ , класс  $f|_x \in F_x$  локальной функции  $f \in F(U)$  в слое  $F$  над точкой  $x \in U$  не следует путать со значением  $f(x) \in \mathbb{k}$  этой функции в точке  $x$ , поскольку, во первых, они лежат в разных множествах, во вторых,

<sup>1</sup>Ср. с [прим. 1.2](#) на стр. 3.

равенство  $f|_x = g|_x$  означает равенство  $f \equiv g$  в некоторой открытой окрестности точки  $x$ , что обычно гораздо сильнее, чем равенство значений  $f(x) = g(x)$ .

ПРИМЕР 2.13 (ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОЛЬЦА)

Пусть подмножество  $S$  ассоциативного (но не обязательно коммутативного) кольца  $R$  с единицей таково, что  $1 \in S$  и  $st \in S$  для всех  $s, t \in S$ . Пусть, кроме того, выполняются следующие условия Ore<sup>1</sup>:

$$\forall \varrho \in R, \forall s \in S \quad \exists \lambda \in R, \exists t \in S : \lambda s = t\varrho \quad (\text{O}_1)$$

$$\forall \varphi, \psi \in R \quad \text{из} \quad \exists s \in S : \varphi s = \psi s \quad \text{следует, что} \quad \exists t \in S : t\varphi = t\psi. \quad (\text{O}_2)$$

Превратим множество  $S$  в категорию, полагая  $\text{Hom}_S(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in R \mid \lambda s = t\}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.18. Выделите из условий Ore, что категория  $S$  фильтрующаяся.

Рассмотрим в категории правых  $R$ -модулей фильтрующуюся диаграмму  $S \rightarrow \text{Mod-}R$ , образованную свободными модулями  $s^{-1}R$  ранга один, где символом  $s^{-1}$  обозначен базисный вектор того модуля, который отвечает объекту  $s \in S$ , и  $R$ -линейными отображениями  $\lambda_* : s_1^{-1}R \rightarrow s_2^{-1}R$ , которые отвечают стрелкам  $\lambda \in \text{Hom}_S(s_1, s_2)$  и действуют на базисный вектор по правилу  $s_1^{-1} \mapsto s_2^{-1}\lambda$ . Копредел этой диаграммы в категории  $\text{Mod-}R$  состоит из классов  $s^{-1}\varrho$ , где  $s \in S$ ,  $\varrho \in R$ , по модулю равенств  $s_1^{-1}\varrho_1 = s_2^{-1}\varrho_2$ , означающих существование таких  $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ , что  $\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$  и  $\lambda_1 \varrho_1 = \lambda_2 \varrho_2$  в  $R$ . Классы  $s^{-1}\varrho$  называются *левыми дробями* со знаменателями в  $S$ . Они образуют правый  $R$ -модуль, обозначаемый  $S^{-1}R$  и именуемый *левой локализацией* кольца  $R$  относительно мультипликативной системы Ore  $S$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.19. Чему равна сумма  $s_1^{-1}\varrho_1 + s_2^{-1}\varrho_2$  в модуле  $S^{-1}R$ ?

Определим *произведение* левых дробей  $s_1^{-1}\varrho_1$  и  $s_2^{-1}\varrho_2$  следующим образом. Пользуясь условием (O<sub>1</sub>) подберём такие  $\lambda_1 \in R$  и  $t_2 \in S$ , что<sup>2</sup>  $t_2\varrho_1 = \lambda_1 s_2$ , и положим

$$s_1^{-1}\varrho_1 \cdot s_2^{-1}\varrho_2 \stackrel{\text{def}}{=} (t_2 s_1)^{-1}(\lambda_1 \varrho_2).$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.20. Проверьте, что это определение корректно<sup>3</sup> и задаёт на модуле  $S^{-1}R$  структуру ассоциативного кольца с единицей. Убедитесь, что для коммутативного кольца  $R$  кольцо дробей  $S^{-1}R$  изоморфно известному из курса алгебры<sup>4</sup> кольцу частных  $a/s$ , где  $a \in R$ ,  $s \in S$ , и  $a_1/s_1 = a_2/s_2$ , если и только если  $\exists s \in S : s \cdot (a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$  в  $R$ .

**2.4. Функториальность (ко) пределов.** Естественное преобразование  $f$  диаграммы  $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  в диаграмму  $Y : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  — это набор стрелок  $f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu$ , по одной для каждого  $\nu \in \text{Ob } \mathcal{N}$ , перестановочных со стрелками из диаграмм. Если диаграммы  $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  и  $Y : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$  имеют в категории  $\mathcal{C}$  пределы  $L_X = \lim X_\nu$  и  $L_Y = \lim Y_\mu$ , то для любого функтора  $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  и любого естественного преобразования  $f : X \circ \tau \rightarrow Y$

<sup>1</sup>В коммутативном кольце  $R$  оба условия Ore выполнены автоматически.

<sup>2</sup>Это «политкорректная» запись интуитивно желаемого равенства  $\varrho_1 s_2^{-1} = t_2^{-1} \lambda_1$ .

<sup>3</sup>Т. е. результат умножения не зависит от выбора таких  $\lambda_1 \in R$  и  $t_2 \in S$ , что  $t_2\varrho_1 = \lambda_1 s_2$ .

<sup>4</sup>См. <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-04.pdf>.

существует единственный морфизм  $\lim f : L_X \rightarrow L_Y$ , такой что при всех  $\mu \in \text{Ob } \mathcal{M}$  коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} L_X & \xrightarrow{\pi_{\tau(\mu)}} & X_{\tau(\mu)} \\ \lim f \downarrow & & \downarrow f_\mu \\ L_Y & \xrightarrow{\pi_\mu} & Y_\mu, \end{array} \quad (2-15)$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из предела в элементы диаграммы. В самом деле, композиции  $f_\mu \circ \pi_{\tau(\mu)} : L_X \rightarrow Y_\mu$  задают систему стрелок из  $L_X$  в элементы диаграммы  $Y$ , перестановочные со всеми её стрелками, что даёт единственный морфизм  $L_X \rightarrow \lim Y = L_Y$ , делающий все диаграммы (2-15) коммутативными. Двойственным образом, если существуют копределы  $C_X = \text{colim } X_\nu$  и  $C_Y = \text{colim } Y_\mu$ , то для любого функтора  $\tau : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  и любого естественного преобразования  $f : X \rightarrow Y \circ \tau$  существует единственный морфизм  $\text{colim } f : C_X \rightarrow C_Y$ , такой что коммутативны все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X_\nu & \xrightarrow{l_\nu} & C_X \\ f_\nu \downarrow & & \downarrow \text{colim } f \\ Y_{\tau(\nu)} & \xrightarrow{l_{\tau(\nu)}} & C_Y, \end{array}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из вершин диаграммы в копредел. При  $\mathcal{M} = \mathcal{N}$  и  $\tau = \text{Id}$  из предл. 2.1 на стр. 19 и равенств (2-9) и (2-10) на стр. 24 получаем

#### Предложение 2.5

Для заданных малой категории  $\mathcal{N}$  и (ко)замкнутой категории  $\mathcal{C}$  копредел и предел являются, соответственно, левым и правым сопряжёнными к функтору  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ , переводящему  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  в постоянную диаграмму  $\bar{C}$ .  $\square$

Замечание 2.2. Если не предполагать (ко)замкнутости, то (ко)предел будет функториален на всех диаграммах, где определён.

#### Следствие 2.2

Категория  $pSh(\mathcal{U})$  предпучков множеств на малой категории  $\mathcal{U}$  замкнута и козамкнута. Для любой диаграммы предпучков  $F : \mathcal{N} \rightarrow pSh(\mathcal{U})$  множества сечений предпучков  $L = \lim F$  и  $C = \text{colim } F$  над любым объектом  $U \in \mathcal{U}$  суть  $L(U) = \lim F(U)$  и  $C(U) = \text{colim } F(U)$ , где диаграмма  $F(U) : \mathcal{N} \rightarrow Set$  образована множествами сечений предпучков диаграммы  $F$  над объектом  $U$  с отображениями, задающими действие стрелок диаграммы  $F$  над этим объектом.

Доказательство. В силу функториальности (ко)пределов, множества  $L(U) = \lim F(U)$  и  $C(U) = \text{colim } F(U)$  составляют предпучки множеств на  $\mathcal{U}$ , и для любого предпучка  $F_\nu : \mathcal{U}^{\text{opp}} \rightarrow Set$  диаграммы  $F$  имеются перестановочные со всеми морфизмами из диаграммы канонические морфизмы предпучков  $L \rightarrow F_\nu$  и  $F_\nu \rightarrow C$ , действие которых над каждым объектом  $U \in \text{Ob } \mathcal{U}$  задаётся стрелками

$$\lim F(U) \rightarrow F_\nu(U) \quad \text{и} \quad F_\nu(U) \rightarrow \text{colim } F(U)$$

в категории  $\mathcal{S}et$ . Универсальность этих морфизмов также проверяется отдельно над каждым объектом  $U \in \text{Ob } \mathcal{U}$ .  $\square$

**2.4.1. Перестановочность функторов с (ко)пределами.** Скажем, что функтор  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  перестановочен с (ко)пределами, если для любого  $L \in \text{Ob } \mathcal{C}$  и любой диаграммы  $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  из того, что  $L$  является (ко)пределом  $X$  в  $\mathcal{C}$ , вытекает, что  $F(L)$  является (ко)пределом диаграммы  $F \circ X$  в  $\mathcal{D}$ .

**Предложение 2.6**

Если функтор  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  сопряжён слева к функтору  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , то  $F$  перестановочен с копределами, а  $G$  — с пределами.

**Доказательство.** В силу сопряжённости  $F$  и  $G$  имеем функториально по  $D \in \text{Ob } \mathcal{D}$ :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\text{colim } X), D) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim } X, G(D)) \simeq \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(X, \overline{G(D)}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{D})}(F \circ X, \overline{D}). \end{aligned}$$

Тем самым,  $F(\text{colim } X) \simeq \text{colim}(F \circ X)$ . Рассуждение про пределы аналогично.  $\square$

**Следствие 2.3**

Тензорное умножение на (левый) модуль  $N$  над произвольным кольцом  $S$  с единицей перестановочно с копределами диаграмм (правых)  $S$ -модулей. В частности, тензорное умножение на  $N$  переводит коядра в коядра, т. е. для любого  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Mod-}S}(K, L)$  имеется канонический изоморфизм абелевых групп

$$\text{coker} \left( \varphi \otimes_{\mathcal{S}} \text{Id}_N : K \otimes_{\mathcal{S}} N \rightarrow L \otimes_{\mathcal{S}} N \right) \simeq \text{coker}(\varphi) \otimes_{\mathcal{S}} N.$$

**Доказательство.** По [предл. 2.3](#) на стр. 21, применённому к кольцам  $S$  и  $R = \mathbb{Z}$ , функтор  $\text{Mod-}S \rightarrow \mathcal{A}b$ ,  $X \mapsto X \otimes_{\mathcal{S}} N$ , сопряжён слева функтору  $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(N, Y)$ .  $\square$

**Следствие 2.4**

Пределы коммутируют с пределами, а копределы — с копределами всякий раз, когда они существуют: если задана такая диаграмма  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$  естественных преобразований  $F(\mu_1 \rightarrow \mu_2)$  диаграмм  $\{F_{\mu} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}\}$ , что для всех  $\mu \in \mathcal{M}$  и  $\nu \in \mathcal{N}$   $\mu$ -тая диаграмма  $F_{\mu} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  и диаграмма  $F(\nu)$ , задающая действие стрелок  $F(\mu_1 \rightarrow \mu_2)_{\nu}$  между элементами  $F_{\mu}(\nu)$  с фиксированным номером  $\nu$ , обе имеют (ко)предел в  $\mathcal{C}$ , то

$$\lim_{\mu} \lim_{\nu} F_{\mu} \simeq \lim_{\nu} \lim_{\mu} F(\nu) \quad \text{и} \quad \text{colim}_{\mu} \text{colim}_{\nu} F_{\mu} \simeq \text{colim}_{\nu} \text{colim}_{\mu} F(\nu).$$

**Следствие 2.5**

Если стрелки  $f_{\nu} : X_{\nu} \rightarrow Y_{\nu}$  задают естественное преобразование между диаграммами абелевых групп  $X, Y : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A}b$ , то копредел коядер этих стрелок равен коядру индуцированной стрелки между копределами, а предел ядер — ядру стрелки между пределами:

$$\begin{aligned} \text{colim coker } f_{\nu} &\simeq \text{coker} \left( \text{colim } X_{\nu} \xrightarrow{\text{colim } f_{\nu}} \text{colim } Y_{\nu} \right) \\ \lim \ker f_{\nu} &\simeq \ker \left( \lim X_{\nu} \xrightarrow{\lim f_{\nu}} \lim Y_{\nu} \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Будучи (ко)уравнителем  $f_\nu$  и нулевого морфизма (ко)ядро является (ко)пределом.  $\square$

#### Предложение 2.7

Копределы прямых систем абелевых групп перестановочны также и с ядрами, т. е. если в сл. 2.5 категория  $\mathcal{N}$  индексов диаграмм  $X, Y : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{Ab}$  фильтрующаяся, то

$$\operatorname{colim} \ker (f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu) \simeq \ker \left( \operatorname{colim} X_\nu \xrightarrow{\operatorname{colim} f_\nu} \operatorname{colim} Y_\nu \right). \quad (2-16)$$

Доказательство. Согласно упр. 2.17 на стр. 29 копредел фильтрующейся диаграммы  $Z$  является фактором дизъюнктного объединения  $\coprod Z_\nu$  по эквивалентности, отождествляющей элементы  $z_\nu \in Z_\nu$  и  $z_\mu \in Z_\mu$ , когда есть пара стрелок  $\nu \rightarrow \eta \leftarrow \mu$ , переводящих эти элементы в один и тот же элемент из  $Z_\eta$ . Пусть  $\varphi = \operatorname{colim} f_\nu$ . Эта предельная стрелка переводит класс  $[x_\nu]$  элемента  $x_\nu \in X_\nu$  в класс элемента  $f_\nu(x_\nu) \in Y_\nu$ .

Упражнение 2.21. Убедитесь, что класс результата не зависит от выбора представителя в классе  $[x_\nu]$ .

Сопоставляя классу  $[x_\nu] \in \operatorname{colim} \ker (f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu)$  из левой части (2-16) класс этого же элемента  $x_\nu \in \ker f_\nu \subset X_\nu$ , но уже в копределе  $\operatorname{colim} X_\nu$ , мы получим класс, лежащий в  $\ker \varphi$ . Это задаёт гомоморфизм из левой части (2-16) в правую. Чтобы построить обратный гомоморфизм, рассмотрим класс  $[x_\nu] \in \ker \varphi$ . Раз  $[f_\nu(x_\nu)] = [0]$  в  $\operatorname{colim} Y_\nu$ , найдутся такие стрелки  $\nu \rightarrow \eta \leftarrow \mu$ , что  $f_\nu(X(\nu \rightarrow \eta)x_\nu) = Y(\nu \rightarrow \eta)f_\nu(x_\nu) = Y(\mu \rightarrow \eta)0 = 0$  в  $Y_\eta$ . Тем самым, элемент  $x_\eta = X(\nu \rightarrow \eta)x_\nu \in \ker f_\nu$ . Сопоставление классу  $[x_\nu] \in \ker \varphi$  класса  $[x_\eta] \in \operatorname{colim} \ker (f_\nu)$  задаёт гомоморфизм из правой части (2-16) в левую. Остаётся убедиться, что он определён корректно и обратен предыдущему.  $\square$

Упражнение 2.22. Сделайте это, а также докажите, что в категории  $\mathcal{S}et$  стрелка

$$\varphi : \operatorname{colim} X_\nu \rightarrow \operatorname{colim} Y_\nu,$$

являющаяся копределом такого естественного преобразования  $f : X \rightarrow Y$  фильтрованных диаграмм  $X, Y : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{S}et$ , в котором все стрелки  $f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu$  инъективны (соотв. сюръективны, биективны), тоже инъективна (соотв. сюръективна, биективна).



## Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 2.3. Отображения  $\text{Hom}_{\text{Mod-}B}(B, Y) \rightarrow Y$ ,  $\varphi \mapsto \varphi(1)$ , и  $Y \rightarrow \text{Hom}_{\text{Mod-}B}(B, Y) \rightarrow Y$ ,  $y \mapsto (\varphi : b \mapsto yb)$ , являются взаимно обратными  $A$ -линейными справа изоморфизмами.

Упр. 2.5. Отображения  $x \otimes b \mapsto xb$  и  $x \mapsto x \otimes \otimes_B 1$  являются взаимно обратными  $A$ -линейными справа изоморфизмами между  $X \otimes B$  и  $X$ .

Упр. 2.8. Непрерывному отображению  $f : |X| \rightarrow Y$  из  $\text{Hom}_{\text{Top}}(|X|, Y)$  биективно соответствует естественное по  $[n] \in \text{Ob } \Delta$  преобразование  $f_n : X_n \rightarrow \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta^n, Y)$  из  $\text{Hom}_{p\mathcal{S}h}(X, S(Y))$ , сопоставляющее точке  $x \in X_n$  композицию

$$f \circ \iota|_{x \times \Delta^n} : \Delta^n \rightarrow |X| \rightarrow Y,$$

где  $\iota|_{x \times \Delta^n} : \Delta^n \rightarrow |X|$  это ограничение отображения факторизации<sup>1</sup>

$$\iota : \bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n \rightarrow |X|$$

на правильный симплекс  $\{x\} \times \Delta^n \subset X_n \times \Delta^n$  (убедитесь, что  $f_n$  функториально зависит от комбинаторного симплекса  $[n]$ ). Обратная биекция сопоставляет естественному по  $[n] \in \text{Ob } \Delta$  набору отображений  $f_n : X_n \rightarrow \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta^n, Y)$  отображение  $|X| \rightarrow Y$ , переводящее класс точки  $(x, s) \in X_n \times \Delta^n$  по модулю соотношений  $(X(\varphi)x, s) = (x, \varphi s)$  в значение непрерывного отображения  $f_n(x) : \Delta^n \rightarrow Y$  в точке  $s \in \Delta^n$  (убедитесь, что это значение не зависит от выбора представителя  $(x, s)$  в его классе эквивалентности). Естественное преобразование  $t_Y : |S(Y)| \rightarrow Y$  переводит класс пары

$$(g : \Delta^n \rightarrow Y, t \in \Delta^n) \in S_n(Y) \times \Delta^n = \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta^n, Y) \times \Delta^n,$$

представляющей точку из фактор пространства  $|S(Y)|$ , геометрической реализации симплицеального множества  $S(Y)$ , в точку  $g(t) \in Y$  (убедитесь, что отображение  $t_Y$  корректно определено, непрерывно и функториально по топологическому пространству  $Y$ ). Действие естественного преобразования  $s_X : X \rightarrow S(|X|)$  над комбинаторным симплексом  $[n] \in \text{Ob } \Delta$  переводит точку  $x \in X_n$  в сингулярный симплекс

$$\iota|_{x \times \Delta^n} : \Delta^n \rightarrow |X|$$

топологического пространства  $|X|$  (убедитесь, что он функториален по  $[n] \in \text{Ob } \Delta$  и предпушку  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}un(\Delta^{\text{opp}}, \mathcal{S}et)$ ).

Упр. 2.10. Начальное множество и начальное топологическое пространство пусты, конечное множество и конечное топологическое пространство это одна точка. Начальный и конечный объекты категории групп это единичная группа<sup>2</sup>. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей начальный и конечный объект это нуль.

Упр. 2.11. В категории групп нулевым объектом является единичная группа. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей нулевой объект это нулевая абелева группа.

<sup>1</sup>Непрерывного в силу определения фактор топологии.

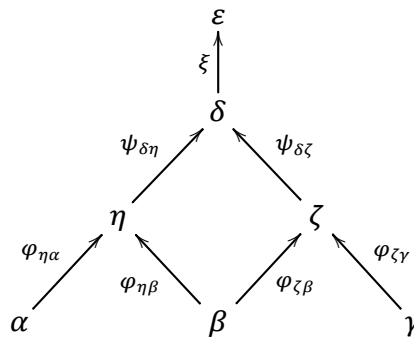
<sup>2</sup>Т. е. группа, состоящая только из единичного элемента.

Упр. 2.15. Гомоморфизмы коммутативных колец  $A \leftarrow K \rightarrow A$  наделяют  $A$  и  $B$  структурами  $K$ -алгебр, и копроизведение  $A \otimes_K B$  это тензорное произведение  $K$ -алгебр, т. е. фактор свободного  $K$ -модуля с базисом  $A \times B$  (произведение в категории множеств) по подмодулю, порождённому всевозможными разностями

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \kappa_1 b_1 + \kappa_2 b_2) - \sum_{i,j=1}^2 \lambda_i \kappa_j (a_i, b_j)$$

с  $\lambda_i, \kappa_i \in K, a_i \in A, \beta_j \in B$  (ср. с н° 2.2). Произведение на классах эквивалентности задаётся покомпонентно:  $(a_1 \otimes_K b_1) \cdot (a_2 \otimes_K b_2) = (a_1 a_2) \otimes_K (b_1 b_2)$ .

Упр. 2.17. По упр. 2.16 копредел  $\text{colim} X$  является фактором дизъюнктного объединения  $\coprod_{v \in \text{Ob } \mathcal{F}} X_v$  по наименьшему отношению эквивалентности, обеспечивающему равенства  $x = X(v \rightarrow \mu)x$  для всех стрелок  $v \rightarrow \mu$  из  $\text{Mor } \mathcal{F}$  и всех  $x \in X_v$ . При этом элементы  $x_v \in X_v$  и  $x_\mu \in X_\mu$  заведомо отождествляются, если  $X(v \rightarrow \eta)x_v = X(\mu \rightarrow \eta)x_\mu$  для некоторой пары стрелок  $v \rightarrow \eta \leftarrow \mu$ . Достаточно убедиться, что последнее свойство является отношением эквивалентности. Его рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность. Если  $x_\alpha$  эквивалентен  $x_\beta$ , а  $x_\beta$  эквивалентен  $x_\gamma$ , то в категории  $\mathcal{F}$  имеется (не обязательно коммутативная) диаграмма из таких стрелок



что  $X(\varphi_{\eta\alpha})x_\alpha = X(\varphi_{\eta\alpha})x_\beta$  и  $X(\varphi_{z\beta})x_\beta = X(\varphi_{z\gamma})x_\gamma$  в категории  $Set$ , а  $\xi\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\beta} = \xi\psi_{\delta z}\varphi_{z\beta}$  в  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\beta, \varepsilon)$ . Обозначая стрелку из последнего равенства через  $\kappa$ , имеем

$$X(\varepsilon\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\alpha})x_\alpha = X(\kappa)x_\beta = X(\varepsilon\psi_{\delta z}\varphi_{z\gamma})x_\gamma.$$

Упр. 2.18. Применяя первое условие Оре<sup>1</sup> к произвольным элементам  $s = s_1$  и  $q = s_2$  из  $S$  получаем ведущие из  $s_1$  и  $s_2$  стрелки  $\lambda$  и  $t$  с общим концом  $\lambda s_1 = t s_2 \in S$ . Применяя второе условие Оре<sup>2</sup> к паре стрелок  $\varphi, \psi \in \text{Hom}_S(s, s')$ , где  $s' = \varphi s = \psi s$ , получаем такую стрелку  $t \in \text{Hom}_S(s', t s')$ , что  $t\varphi = t\psi$ .

Упр. 2.19. Так как по предыдущему упр. 2.18 категория  $S$  фильтрующаяся, у дробей  $s_1^{-1}q_1$  и  $s_2^{-1}q_2$  есть общий знаменатель, равный  $t = \lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$  для подходящих  $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ . Тогда  $s_1^{-1}q_1 + s_2^{-1}q_2 = t^{-1}(\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2)$ .

<sup>1</sup>См. формулу (O<sub>1</sub>) на стр. 30.

<sup>2</sup>См. формулу (O<sub>2</sub>) на стр. 30.