§3. Абелевы категории и пучки

3.1. Линейные категории. Пусть R — произвольное кольцо с единицей. Категория $\mathcal{L}$ называется R-линейной слева, если бифунктор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(*,*)$ принимает значения в категории R-$\mathcal{M}od$ левых R-модулей и все композиции

$$\mathrm{Hom}(Y,Z)\times\mathrm{Hom}(X,Y)\to\mathrm{Hom}(X,Z)$$

билинейны над R. Например, сама категория R-$\mathcal{M}od$ R-линейна, категория векторных пространств над полем $\Bbbk$ линейна над $\Bbbk$, а категория абелевых групп $\mathbb{Z}$-линейна. Всякая R-линейная категория автоматически $\mathbb{Z}$-линейна: каждое множество стрелок $\mathrm{Hom}(X,Y)$ в R-линейной категории является аддитивной абелевой группой, и сложение морфизмов дистрибутивно композиции:

$$(\varphi_1+\varphi_2)\circ(\psi_1+\psi_2)=\varphi_1\circ\psi_1+\varphi_1\circ\psi_2+\varphi_2\circ\psi_1+\varphi_2\circ\psi_2\,.$$

Функтор между R-линейными категориями называется *R-линейным*, если он действует на стрелки R-линейными гомоморфизмами. Все функторы между R-линейными категориями далее будут по умолчанию предполагаться R-линейными.

Предостережение 3.1. Сложение морфизмов в (малой) R-линейной категории $\mathcal{L}$ не следует путать с формальным сложением в алгебре $K[\mathcal{L}]$ из прим. 1.3 на стр. 4 : между множествами $\mathrm{Mor}\,\mathcal{L}$ и $K[\mathcal{L}]$ может не случиться даже биекции.

3.1.1. Прямые суммы. Из равенства $\varphi\circ 0=\varphi\circ(0+0)=\varphi\circ 0+\varphi\circ 0$ вытекает, что в R-линейной категории $\varphi\circ 0=0$ для нулевого морфизма $0\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ и любой стрелки φ с началом в Y. По той же причине $0\circ\psi=0$ для стрелок ψ с концом в X.

Упражнение 3.1. Докажите равносильность друг другу следующих трёх условий на эндоморфизм $\varepsilon\in\mathrm{Hom}(X,X)$ в R-линейной категории: а) $\varepsilon=\mathrm{Id}_X$ б) $\varphi\circ\varepsilon=\varphi$ для всех стрелок φ с началом в X в) $\varepsilon\circ\varphi=\varphi$ для всех стрелок φ с концом в X и проверьте, что мономорфность[1] (соотв. эпиморфность) произвольного морфизма означает, что он не является левым (соотв. правым) делителем нуля[2].

Лемма 3.1
В R-линейной категории каждое произведение $X\times Y$ является одновременно и копроизведением, а каждое копроизведение $X\otimes Y$ — произведением, причём между каноническими морфизмами π_X,π_Y произведения в множители и каноническими морфизмами ι_X,ι_Y множителей в копроизведение выполняются соотношения:

$$\iota_X\pi_X+\iota_Y\pi_Y=\mathrm{Id}\,,\quad \pi_X\iota_X=\mathrm{Id}_X\,,\quad \pi_Y\iota_Y=\mathrm{Id}_Y\,,\quad \pi_X\iota_Y=0\,,\quad \pi_Y\iota_X=0\,,\qquad(3\text{-}1)$$

Наоборот, всякий объект $X\oplus Y$, включающийся в коммутативную диаграмму

$$X \underset{\pi_X}{\overset{\iota_X}{\rightleftarrows}} X\oplus Y \underset{\pi_Y}{\overset{\iota_Y}{\leftrightarrows}} Y$$

стрелки которой удовлетворяют соотношениям (3-1), является одновременно произведением и копроизведением объектов X и Y.

[1]См. n° 1.1.1 на стр. 4.
[2]Т. е. $\varphi\psi=0\Rightarrow\psi=0$ (соотв. $\psi\varphi=0\Rightarrow\psi=0$).

Доказательство. Пусть есть произведение $X \times Y$. Морфизмы $\iota_X \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id}_X \times 0 \,:\, X \to X \times Y$ и $\iota_Y \overset{\text{def}}{=} 0 \times \mathrm{Id}_Y \,:\, Y \to X \times Y$ включаются в коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \\ X & X \arrow[l, "\mathrm{Id}_X"] \arrow[u, "0"'] \arrow[ul, "\iota_X"'] \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \\ X & Y \arrow[l, "0"] \arrow[u, "\mathrm{Id}_Y"'] \arrow[ul, "\iota_Y"'] \end{tikzcd}$$

и удовлетворяют последним четырём соотношениям (3-1). Из них вытекает, что

$$\pi_X(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \pi_X \quad \text{и} \quad \pi_Y(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \pi_Y\,.$$

Но по универсальному свойству произведения стрелка $\varphi :\, X \times Y \to X \times Y$, для которой $\pi_X\varphi = \pi_X$ и $\pi_Y\varphi = \pi_Y$ ровно одна — это $\varphi = \mathrm{Id}_{X\times Y}$, что доказывает первое соотношение из (3-1).

Упражнение 3.2. Докажите соотношения (3-1) в случае, когда существует копроизведение $X \otimes Y$.

Из соотношений (3-1) следует, что для любой пары стрелок $\alpha \,:\, X \to Z$ и $\beta \,:\, Y \to Z$ стрелка $\gamma \,:\, X \oplus Y \to Z$ со свойствами $\gamma\iota_X = \alpha$ и $\gamma\iota_Y = \beta$ единственна и равна $\gamma = \gamma \circ \mathrm{Id}_{X\oplus Y} = \gamma(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \alpha\pi_X + \beta\pi_Y$, а для любой пары стрелок $\alpha' \,:\, W \to X$ и $\beta' \,:\, W \to Y$ стрелка $\gamma' \,:\, W \to X \oplus Y$ со свойствами $\pi_X\gamma' = \alpha'$ и $\pi_Y\gamma' = \beta'$ также единственна и равна $\gamma' = \mathrm{Id}_{X\oplus Y} \circ \gamma' = (\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y)\gamma' = \iota_X\alpha' + \iota_Y\beta'$. □

Определение 3.1 (прямые суммы)
Объект $X \oplus Y$, удовлетворяющий условиям лем. 3.1, называется *прямой суммой* объектов X и Y. Аналогично по индукции определяется прямая сумма $\mathcal{X} = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ любого конечного набора объектов и канонические морфизмы

$$\iota_\nu \,:\, X_\nu \to \mathcal{X}\,, \quad \pi_\nu \,:\, \mathcal{X} \to X_\nu\,, \quad \varepsilon_\nu \overset{\text{def}}{=} \iota_\nu\pi_\nu \,:\, \mathcal{X} \to \mathcal{X}\,,$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{gathered} \pi_\nu\iota_\mu = 0 \text{ при } \nu \neq \mu\,, \quad \pi_\nu\iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}\,, \\ \varepsilon_\nu\varepsilon_\mu = 0 \text{ при } \nu \neq \mu\,, \quad \varepsilon_\nu^2 = \varepsilon_\nu\,, \quad \sum_\nu \varepsilon_\nu = \mathrm{Id}_{\mathcal{X}}\,, \end{gathered} \tag{3-2}$$

эквивалентным тому, что $\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = X_1 \otimes X_2 \otimes \cdots \otimes X_n$.

Замечание 3.1. (бесконечные (ко)произведения) Прямой суммой $\bigoplus\limits_\nu X_\nu$ бесконечного семейства объектов X_ν называется их копроизведение (если существует). Бесконечная прямая сумма не совпадает с произведением $\prod\limits_\nu X_\nu$: например, в категории $\mathcal{Ab}$ произведение состоит из всевозможных семейств векторов $\{v_\nu\}$, $v_\nu \in X_\nu$, с покомпонентным сложением, а прямая сумма образована такими семействами $\{v_\nu\}$, в которых лишь конечное число элементов $v_\nu \neq 0$. В силу универсальных свойств (ко)произведений имеются функториальные по X и Y изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_\nu X_\nu, Y) \simeq \prod_\nu \mathrm{Hom}(X_\nu, Y) \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}(Y, \prod_\nu X_\nu) = \prod_\nu \mathrm{Hom}(Y, X_\nu)\,. \tag{3-3}$$

Для каждого i набор стрелок $\pi_{\nu i} : X_i \to X_\nu$, нулевых при $\nu \neq i$ и тождественной для $\nu = i$, по-прежнему задаёт морфизмы $\pi_i : \bigoplus_\nu X_\nu \to X_i$, такие что $\pi_\nu \iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}$ при всех ν, и $\pi_\nu \iota_\mu = 0$ при $\mu \neq \nu$. Произведение стрелок π_ν задаёт морфизм

$$\sigma : \bigoplus_\nu X_\nu \to \prod_\nu X_\nu . \tag{3-4}$$

Упражнение 3.3. Убедитесь, что все ι_ν и σ инъективны, а π_ν сюрьективны.

Если все объекты X_ν являются одинаковыми копиями одного объекта X, занумерованными множеством N, мы обозначаем их прямую сумму через $N \otimes X \stackrel{\text{def}}{=} \coprod_\nu X_\nu$, а произведение — через $X^N \stackrel{\text{def}}{=} \prod_\nu X_\nu$.

Пример 3.1 (матричный формализм)
Прямым вычислением с использованием соотношений (3-2) проверяется, что для конечных прямых сумм $\mathcal{X} = \bigoplus_\nu X_\nu$ и $\mathcal{Y} = \bigoplus_\mu Y_\mu$ в R-линейной категории имеется канонический изоморфизм R-модулей $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \simeq \bigoplus_{\mu,\nu} \mathrm{Hom}(X_\nu, Y_\mu)$, сопоставляющий морфизму $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ матрицу $\Phi = (\varphi_{\mu\nu})$ из морфизмов $\varphi_{\mu\nu} = \pi_\mu \circ \varphi \circ \iota_\nu : X_\nu \to Y_\mu$. Из матрицы Φ морфизм $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ восстанавливается по формуле $\varphi = \sum_{\mu\nu} \iota_\mu \circ \varphi_{\mu\nu} \circ \pi_\nu$. При этом матрица композиции $\varphi \circ \psi$ равна произведению матриц $\Phi \cdot \Psi$.

Пример 3.2 (прямая сумма морфизмов)
Во всякой категории с (ко)произведениями любой набор морфизмов $\gamma_\nu : X_\nu \to Y_\nu$ канонически задаёт морфизм произведений $\prod X_\alpha \to \prod Y_\alpha$ и морфизм копроизведений $\coprod X_\alpha \to \coprod Y_\alpha$, которые отвечают, соответственно, наборам стрелок

$$\gamma_\nu \circ \pi_\nu : \prod X_\alpha \to Y_\nu \quad \text{и} \quad \iota_\nu \circ \gamma_\nu : X_\nu \to \coprod Y_\nu ,$$

где $\pi_\nu : \prod X_\alpha \to X_\nu$ и $\iota_\nu : Y_\nu \to \coprod Y_\alpha$ — канонические морфизмы произведения в сомножители и сомножителей в копроизведение. Для конечных прямых сумм в R-линейных категориях эти два морфизма совпадают и называются *прямой суммой* морфизмов γ_ν. Прямая сумма морфизмов обозначается $\oplus\gamma_\nu$. В терминах прим. 3.1 она изображается диагональной матрицей со стрелками γ_ν по диагонали и нулями в остальных местах.

Замечание 3.2. (каноничность сложения морфизмов) Если в R-линейной категории $\mathcal{L}$ есть прямые суммы $X \oplus X$ и $Y \oplus Y$, то сложение в группе $\mathrm{Hom}(X, Y)$ канонически определяется композициями в категории $\mathcal{L}$, поскольку для любых стрелок $\varphi, \psi : X \to Y$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi+\psi"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & Y \\ X \oplus X \arrow[r, "\varphi\times\psi"'] & Y \oplus Y \arrow[u, "\nabla_Y"'] \end{tikzcd} \tag{3-5}$$

в которой диагональный морфизм $\Delta_X \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Id}{\times}\mathrm{Id} : X \to X{\times}X$, кодиагональный морфизм $\nabla_Y \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} : Y \otimes Y \to Y$ и морфизм $\varphi \times \psi : X \times X \to Y \times Y$ не связаны с аддитивной структурой и имеются в в любой категории $\mathcal{L}$, где есть прозведения $X{\times}X$ и $Y{\times}Y = Y{\otimes}Y$.

Определение 3.2 (нулевой объект и нулевые морфизмы)
Объект $0 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ категории $\mathcal{C}$ называется *нулевым*, если он одновременно начальный и конечный. Такой объект единствен с точностью до единственного изоморфизма (если существует). Морфизм $\varphi : X \to Y$ в категории с нулевым объектом называется *нулевым*, если он распадается в композицию $X \to 0 \to Y$.

Упражнение 3.4. Убедитесь, что в R-линейной категории нулевой морфизм является нулевым элементом аддитивной группы $\mathrm{Hom}(X, Y)$.

3.1.2. Ядра и коядра. В категории $\mathcal{C}$ с нулевым объектом уравнитель стрелки $\varphi : X \to Y$ и нулевого морфизма называется *ядром* φ и обозначается $\ker\varphi$. Если он существует, то вместе с такой универсальной стрелкой $\varkappa\,\ker\varphi \to X$, что $\varphi\varkappa = 0$ и

$$\forall \psi \quad \varphi\psi = 0 \;\Rightarrow\; \exists!\,\psi' : \psi = \varkappa\psi',$$

которую мы тоже будем называть *ядром*, и единствен с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с $\varkappa$. В $\mathbb{Z}$-линейной категории ядро представляет предпучок $Z \mapsto \ker\varphi_*^Z$, сопоставляющий объекту Z ядро гомоморфизма абелевых групп $\varphi_*^Z : \mathrm{Hom}(Z, X) \to \mathrm{Hom}(Z, Y)$, задающего действие над этим объектом естественного преобразования $\varphi_* : h_X \to h_Y$ левого умножения на φ.

Коуравнитель φ с нулевым морфизмом называется *коядром*, обозначается $\mathrm{coker}\,\varphi$. Если он существует, то с такой стрелкой $\varsigma : Y \to \mathrm{coker}\,\varphi$, что $\varsigma\varphi = 0$ и

$$\forall \psi \quad \psi\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \exists!\,\psi' : \psi = \psi'\varsigma,$$

которая также называется *коядром*, и единствен с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с ς. В $\mathbb{Z}$-линейной категории коядро копредставляет функтор $Z \mapsto \ker\varphi_Z^*$, где гомоморфизм $\varphi_Z^* : \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$ задаёт действие над Z естественного преобразования $\varphi^* : h^Y \to h^X$ правого умножения на φ.

Упражнение 3.5. Убедитесь, что в любой $\mathbb{Z}$-линейной категории:
а) $\varphi = 0 \iff \varkappa = \mathrm{Id}_X \iff \varsigma = \mathrm{Id}_Y$
б) стрелка $\varkappa : \ker\varphi \to X$ мономорфна, а стрелка $\varsigma : Y \to \mathrm{coker}\,\varphi$ — эпиморфна
в) φ мономорфен $\iff \ker\varphi = 0$; φ эпиморфен $\iff \mathrm{coker}\,\varphi = 0$.

Ядро канонической стрелки $\varsigma : Y \to \mathrm{coker}\,\varphi$ называется *образом* морфизма φ и обозначается $\mathrm{im}\,\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \ker\varsigma$. Коядро канонической стрелки $\varkappa : \ker\varphi \to X$ называется *кообразом*[1] морфизма φ и обозначается $\mathrm{coim}\,\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{coker}\,\varkappa$. Если морфизм $\varphi : X \to Y$ имеет ядро, коядро, образ и кообраз, то в силу универсальных свойств двух последних

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{coim}\,\varphi, \mathrm{im}\,\varphi) \simeq \{\alpha : \mathrm{coim}\,\varphi \to Y \mid \varsigma\alpha = 0\} \simeq \{\beta : X \to Y \mid \varsigma\beta = 0 \text{ и } \beta\varkappa = 0\}.$$

[1]В категории модулей кообраз $\varphi : X \to Y$ это фактор по ядру: $\mathrm{coim}\,\varphi = X/\ker\varphi$.

Стрелка $\overline{\varphi}$: $\operatorname{coim}\varphi \to \operatorname{im}\varphi$, переводимая этими изоморфизмами в исходную стрелку $\varphi : X \to Y$, это единственный морфизм, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} \operatorname{coker}\varphi & Y \arrow[l, "\varsigma"'] & \operatorname{im}\varphi \arrow[l, "\varkappa'"'] \\ \ker\varphi \arrow[r, "\varkappa"] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varsigma'"] & \operatorname{coim}\varphi \arrow[u, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd} \tag{3-6}$$

в которой $\varkappa$, $\varkappa'$ — канонические морфизмы из ядер, а ς, ς' — в коядра.

Определение 3.3
Диаграмма (3-6) называется *каноническим разложением* морфизма φ.

Пример 3.3 (фильтрованные абелевы группы)
Рассмотрим категорию $F\mathcal{Ab}$, объектами которой являются абелевы группы

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\,,$$

профильтрованные возрастающими подгруппами $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, а морфизмами — такие гомоморфизмы абелевых групп $\varphi : A \to B$, что $\varphi(A_n) \subset B_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Эта категория аддитивна, и у каждого морфизма $\varphi : A \to B$ есть ядро и коядро, как группы совпадающие с ядром и коядром в $\mathcal{Ab}$, и имеющие фильтрации, индуцированные с A и B: $\ker\varphi = \bigcup A'_n$, где $A'_n = A_n \cap \ker\varphi$, и $\operatorname{coker}\varphi = \bigcup B'_n$, где B'_n — образ подгруппы $B_n \subset B$ в факторе $B\,/\,\varphi(A)$. Обозначим через $A[1]$ фильтрованную группу с компонентами $A[1]_p = A_{p+1}$. Отображение $s : A \to A[1]$, тождественно действующее на элементы группы, является морфизмом фильтрованных групп и имеет нулевые ядро и коядро, т. е. одновеменно инъективно и сюрьективно, но не обратимо, если $A \neq 0$. В каноническом разложении (3-6) морфизма s стрелка $\overline{s} = s$ тоже не изоморфизм:

$$\begin{tikzcd} 0 & A[1] \arrow[l] & A[1] \arrow[l, "\mathrm{Id}_{A[1]}"'] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "s"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_A"] & A\,. \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

3.2. Абелевы категории. Категория $\mathcal{A}$ называется *аддитивной*, если она $\mathbb{Z}$-линейна, и в ней имеются нулевой объект и прямые суммы любых двух[1] объектов. Аддитивная категория $\mathcal{A}$ называется *абелевой*, если любая стрелка φ в ней имеет ядро и коядро, причём канонический морфизм $\overline{\varphi}$ в её разложении (3-6) является изоморфизмом, т. е. образ любого морфизма канонически изоморфен его кообразу[2]. Отождествляя кообраз с образом при помощи этого изоморфизма, мы получаем для каждой стрелки $\varphi : X \to Y$ *пятичленное разложение*

$$\begin{tikzcd} \ker\varphi \arrow[r, hook, "\varkappa"] & X \arrow[r, two heads, "\varsigma'"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & \operatorname{im}\varphi \arrow[r, hook, "\varkappa'"] & Y \arrow[r, two heads, "\varsigma"] & \operatorname{coker}\varphi\,, \end{tikzcd} \tag{3-7}$$

[1] А значит — и любого конечного множества.
[2] В начальном курсе алгебры этот факт обычно называют «теоремой о строении гомоморфизма» и доказывают для гомоморфизмов групп, колец и модулей над кольцами.

где $\varkappa'$ мономорфен, ς' эпиморфен, $\varsigma'\varkappa = \varphi$ и $\operatorname{im}\varphi = \ker\varsigma = \operatorname{coker}\varkappa$.

Упражнение 3.6. Покажите, что во всякой абелевой категории $\mathcal{A}$:

а) ядро, коядро и образ являются функторами из категории $\mathcal{Ar}(\mathcal{A})$ диаграмм вида[1] $\bullet \to \bullet$ в категорию $\mathcal{A}$

б) пятичленное разложение (3-7) является функтором из $\mathcal{Ar}(\mathcal{A})$ в категорию диаграмм вида $\bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet$

в) φ обратим $\iff \ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$

г) каждый мономорфизм является ядром своего коядра, а каждый эпиморфизм — коядром своего ядра.

Поскольку (ко)ядро разности $\alpha - \beta$ является (ко)уравнителем стрелок α и β, в абелевой категории существуют (ко)пределы всех конечных диаграмм[2], в том числе послойные (ко)произведения[3].

Упражнение 3.7. Убедитесь, что $\lim\big(A \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} B\big) = \ker\big(A \oplus B \xrightarrow{\alpha\pi_A - \beta\pi_B} D\big)$, а $\operatorname{colim}\big(X \xleftarrow{\xi} C \xrightarrow{\eta} Y\big) = \operatorname{coker}\big(C \xrightarrow{\iota_X\xi - \iota_Y\eta} X \oplus Y\big)$, и покажите, что в декартовом и кодекартовом квадратах

$$\begin{tikzcd} A \underset{D}{\times} B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\beta'"] \\ B \arrow[r, "\alpha'"] & D . \end{tikzcd} \qquad \text{и} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\eta"'] & X \arrow[d, "\eta'"] \\ Y \arrow[r, "\xi'"] & X \underset{C}{\otimes} Y . \end{tikzcd} \tag{3-8}$$

β изоморфно отображает $\ker\alpha$ на $\ker\alpha'$ и эпиморфность β' влечёт эпиморфность β , а ξ' изоморфно отображает $\operatorname{coker}\eta$ на $\operatorname{coker}\eta'$ и мономорфность ξ влечёт мономорфность ξ' .

Пример 3.4

Для любого кольца R категория R-$\mathcal{Mod}$ левых R-модулей, категория R-$\mathcal{FMod}$ свободных левых R-модулей и категория R-$\mathcal{mod}$ конечно представимых[4] левых R-модулей абелевы: ядра, коядра и образы в них суть обычные ядра, коядра и образы R-линейных отображений, а совпадение образа и кообраза проверяется в теореме о строении R-линейного гомоморфизма, утверждающей, что образ канонически изоморфен фактору по ядру. В частности, абелевы категория всех абелевых групп и категория конечно порождённых абелевых групп. Категория фильтрованных абелевых групп из прим. 3.3 аддитивна и имеет (ко)ядра всех стрелок, однако не является абелевой, т. к. в ней есть стрелки φ с $\operatorname{im}\varphi \not\simeq \operatorname{coim}\varphi$.

Упражнение 3.8. Убедитесь, что в категории топологических абелевых групп и их не прерывных гомоморфизмов тоже есть ядра, коядра и прямые суммы, но она не является абелевой.

---

[1]Т. е. категории функторов $\mathcal{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{A})$, где категория $\mathcal{N} = \{\bullet \to \bullet\}$ имеет 2 объекта и одну нетождественную стрелку.

[2]См. зам. 2.1. на стр. 28.

[3]Т. е. декартовы и кодекартовы квадраты, см. диаграммы (2-11) и (2-12) на стр. 25 – 26.

[4]Модуль называется *конечно представимым*, если он изоморфен фактору свободного модуля конечного ранга по конечно порождённому подмодулю.

Категории множеств, топологических пространств, групп и коммутативных колец не являются даже $\mathbb{Z}$-линейными, т. к. в них $X \times Y \neq X \otimes Y$.

Замечание 3.3. (короткий список аксиом абелевой категории) Данное выше определение абелевой категории не является логически минимальным и выбрано нами постольку, поскольку все абелевы категории, с которыми мы будем иметь дело в этом курсе, изначально линейны, и в них выполняется теорема о строении гомоморфизма. Общепринятое в логике и теории категорий «минималистское» определение таково: (произвольная) категория $\mathcal{C}$ называется *абелевой*, если в ней

(A0) есть нулевой объект[1] 0

(A1) у каждой пары объектов есть произведение и копроизведение

(A2) у каждого морфизма есть ядро и коядро

(A3) каждый мономорфизм[2] является ядром некоторой стрелки, а каждый эпиморфизм — коядром некоторой стрелки

Аксиомы самодвойственны: их выполнение в категории $\mathcal{C}$ равносильно их выполнению в $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$. Вывод нашего определения из этих аксиом намечен в следующем ниже упражнении и подробно изложен во второй главе книги: *P. Freyd*. «Abelian Categories».

Упражнение 3.9* (не трудное, но довольно трудоёмкое). Пользуясь только предыдущими аксиомами (A0) – (A3), покажите, что в категории $\mathcal{C}$

а) сопоставления стрелке её ядра и коядра корректно задают взаимно обратные биекции между множествами под- и фактор объектов[3] каждого объекта

б) любая одновременно мономорфная и эпиморфная стрелка обратима

в) у каждых двух подобъектов любого объекта есть максимальная нижняя грань в смысле порядка из упр. 1.1 на стр. 5 (она называется *пересечением* этих двух подобъектов)

г) любые две стрелки имеют уравнитель и коуравнитель (в частности в $\mathcal{C}$ есть все послойные (ко)произведения)

д) образ и кообраз любого морфизма канонически изоморфны

е) для каждой пары объектов X, Y канонический морфизм $X \otimes Y \to X \times Y$, задаваемый стрелками $\mathrm{Id}_X \times 0 : X \to X \times Y$ и $0 \times \mathrm{Id}_Y : Y \to X \times Y$, обратим, и обратный морфизм задаёт посредством диаграммы из форм. (3-5) на стр. 36 структуру абелевой группы на $\mathrm{Hom}(X, Y)$, что в свою очередь вводит $\mathbb{Z}$-линейную структуру на категории $\mathcal{C}$

ж) образ любого морфизма канонически изоморфен кообразу.

[1] См. опр. 3.2 на стр. 37.
[2] См. n° 1.1.1 на стр. 4.
[3] См. опр. 1.1 на стр. 5.

3.2.1. Точные последовательности. Пара стрелок $\cdots \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{\psi} \cdots$ называется *точной*, если $\ker \psi = \operatorname{im} \varphi$. Более длинная цепочка стрелок называется *точной*, если каждая пара её последовательных стрелок точна. Например, точность последовательности $0 \to X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ означает, что $\varphi = \ker \psi$, а точность последовательности $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \to 0$ означает, что $\psi = \operatorname{coker} \varphi$. Точные последовательности вида

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0 \tag{3-9}$$

называются *точными тройками*. Точность тройки (3-9) равносильна равенствам $\alpha = \ker \beta$ и $\beta = \operatorname{coker} \alpha$. В этой ситуации C называется *фактором* A по B и обозначается A/B. Точные тройки, изоморфные в категории диаграмм вида $0 \to * \to * \to * \to 0$ диаграмме прямой суммы $0 \to A \xrightarrow{\iota_A} A \oplus B \xrightarrow{\pi_B} B \to 0$ называются *расщепимыми*.

Упражнение 3.10. Покажите, что для расщепимости точной тройки (3-9) необходимо и достаточно существования такого морфизма $\beta' : B \to A$, что $\beta'\alpha = \mathrm{Id}_A$ или такого морфизма $\alpha' : C \to B$, что $\beta\alpha' = \mathrm{Id}_C$, и приведите пример нерасщепляющейся точной тройки в категории конечных абелевых групп.

3.2.2. Точные функторы. Функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (соотв. $F : \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{B}$) между абелевыми категориями называется *точным слева*, если он переводит ядра (соотв. коядра) в ядра или, что то же самое, — точные последовательности вида $0 \to A \to B \to C$ (соотв. $A \to B \to C \to 0$) в точные последовательности $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ (соотв. в $0 \to F(C) \to F(B) \to F(A)$). Двойственным образом, F называется *точным справа*, если он переводит коядра (соотв. ядра) в коядра, или — точные последовательности вида $A \to B \to C \to 0$ (соотв. $0 \to A \to B \to C$) в точные последовательности $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ (соотв. в $F(C) \to F(B) \to F(A) \to 0$). Функтор называется *точным*, если он точен и справа и слева.

Упражнение 3.11. Убедитесь, что для точности функтора необходимо и достаточно, чтобы он переводил точные тройки в точные тройки, и в этом случае он сохраняет точность любых последовательностей.

Пример 3.5 (представимые функторы)
Из определения ядра тавтологически следует, что всякий копредставимый функтор $h^A : X \mapsto \mathrm{Hom}(A, X)$ (соотв. представимый функтор $h_A : X \mapsto \mathrm{Hom}(X, A)$) переводит ядра (соотв. коядра) в ядра. Тем самым, все (ко)представимые функторы точны слева.

Пример 3.6 (сопряжённые функторы)
Так как (ко)ядро является (ко)пределом диаграммы, по предл. 2.6 на стр. 32 правые сопряжённые функторы точны слева, а левые — справа. В частности, пределы точны слева, а копределы — справа, так что сл. 2.5 на стр. 32 справедливо для диаграмм в любой абелевой категории[1].

Пример 3.7 (тензорное умножение)
По сл. 2.3 для любых колец R и S с единицами функтор $\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{M}od\text{-}S$, $X \mapsto X \underset{R}{\otimes} N$, тензорного умножения на любой R-S-бимодуль N точен справа.

[1] Причём для конечных диаграмм существования (ко)пределов можно не требовать — они существуют автоматически.

Упражнение 3.12. В категории абелевых групп приведите примеры, показывающие, что (ко)представимый функтор может быть не точен справа, а тензорное умножение на фиксированную абелеву группу N может быть не точно слева.

3.3. Проективные и инъективные объекты. Объект Q абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *проективным* (соотв. *инъективным*), если функтор $h^Q : X \mapsto \operatorname{Hom}(Q, X)$ (соотв. функтор $h_Q : X \mapsto \operatorname{Hom}(X, Q)$) точен справа.

Упражнение 3.13. Покажите, что прямая сумма (даже бесконечная, коли существует) проективных объектов проективна, а прямое произведение (даже бесконечное) инъективных объектов инъективно.

Лемма 3.2

Проективность объекта P абелевой категории $\mathcal{A}$ равносильна каждому из свойств:

(P1) любая стрелка $\varphi : P \to X$ поднимается вдоль любого эпиморфизма[1] $\pi : Y \twoheadrightarrow X$

(P2) любой эпиморфизм $\pi : Z \twoheadrightarrow P$ расщепляется: существует такой изоморфизм $\gamma : Z \xrightarrow{\sim} \ker \pi \oplus P$, что $\pi = \pi_P \gamma$.

Инъективность объекта I абелевой категории $\mathcal{A}$ равносильна каждому из свойств:

(I1) любая стрелка $\varphi : X \to I$ продолжается на любое расширение[2] $\iota : X \hookrightarrow Y$

(I2) любое вложение $\iota : I \hookrightarrow Z$ расщепляется: $\iota = \gamma \iota_I$ для некоторого изоморфизма $\gamma : I \oplus \operatorname{coker} \iota \xrightarrow{\sim} Z$.

Доказательство. Условие (P1) означает эпиморфность морфизмов

$$h^P(\pi) = \pi_* : h^P(Y) \to h^P(X)$$

для всех сюрьекций $\pi : Y \twoheadrightarrow X$, в чём и заключается точность справа функтора h^P. Из (P1) следует, что тождественный морфизм Id_P можно поднять вдоль любого эпиморфизма $\pi : Z \twoheadrightarrow P$ до такой стрелки $\iota : P \to Z$, что $\pi\iota = \mathrm{Id}_P$, а это по упр. 3.10 и означает расщепимость точной тройки $0 \to \ker \pi \hookrightarrow Z \twoheadrightarrow P \to 0$. Наоборот, если любой эпиморфизм на P расщепляется, то достроив пару стрелок $Y \twoheadrightarrow X \leftarrow P$ до декартова квадрата

$$\begin{tikzcd} Y \underset{X}{\times} P \arrow[r, two heads, "\pi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & P \arrow[l, dotted, bend left, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, two heads, "\pi"'] & X \end{tikzcd}$$

в котором морфизм π' сюрьективен, коль скоро сюрьективен[3] π, мы можем поднять стрелку φ стрелкой $\psi = \varphi'\iota$, где $\iota : P \hookrightarrow Y \underset{X}{\times} P$ расщепляет π'. Эквивалентность условий (I1), (I2) инъективности объекта I доказывается обращением стрелок. □

Упражнение 3.14. Проведите эти рассуждения.

[1] Т. е. $\exists\, \psi : P \to Y : \varphi = \pi\psi$.

[2] Т. е. $\exists\, \psi : Y \to I : \psi\iota = \varphi$.

[3] См. упр. 3.7 на стр. 39.

3.3.1. Проективные и инъективные модули. В категории $\mathcal{M}od$-R правых модулей над произвольным кольцом R с единицей свободный модуль R ранга 1 проективен, поскольку имеется естественный изоморфизм функторов $h^R \simeq \mathrm{Id}$, который действует над модулем M преобразованием $\mathrm{Hom}(R, M) \simeq M$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$. По упр. 3.13 все свободные модули $E \otimes R$ тоже проективны, а по лем. 3.2 любой проективный модуль P изоморфен прямому слагаемому свободного модуля: каждый модуль M является образом эпиморфизма $S(M) \otimes R \twoheadrightarrow M$, где $S(M)$ — множество векторов модуля M, и для проективного M этот эпиморфизм расщепляется.

Упражнение 3.15. Убедитесь в обратном: если модуль $P \oplus Q = E \otimes R$ свободен, то и P и Q проективны.

Инъективность модуля I означает возможность в нём деления на любые необратимые элементы кольца:

Лемма 3.3
Правый R-модуль I инъективен, если и только если для любого правого идеала $\mathfrak{q} \subset R$ и любого R-линейного справа гомоморфизма $q : \mathfrak{q} \to I$ имеется такой вектор $e_q \in I$, что $q(x) = e_q \cdot x$ для всех $x \in \mathfrak{q}$, т. е. в I имеется частное $q(x)/x = e_q$.

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ вытекает из лем. 3.2: продолжим q до R-линейного справа гомоморфизма $q' : R \to I$ и возьмём $e_q = q'(1)$. Для доказательства обратной импликации рассмотрим произвольное расширение модулей $N \subset M$ и продолжим любой R-линейный гомоморфизм $\varphi : N \to M$ на M при помощи леммы Цорна: подмодули $N \subseteq N' \subseteq M$, на которые φ продолжается, образуют чум по включению, в котором каждая линейно упорядоченная цепочка мажорируется своим объединением. Поэтому существует максимальный по включению подмодуль $L \supseteq N$ с таким гомоморфизмом $\psi : L \to I$, что $\psi|_N = \varphi$. Если имеется вектор $m \in M \smallsetminus L$, то подмодуль L', порождённый L и m, строго больше L, и для завершения доказательства достаточно продолжить ψ на $L' \simeq L \oplus R / \ker \pi_m$, где $\pi_m : L \oplus R \twoheadrightarrow L'$, $(\ell, x) \mapsto \ell + mx$. Ядро

$$\ker \pi_m = \{(\ell, x) \mid mx = -\ell \in L\}$$

изоморфно правому идеалу $\mathfrak{k} = \{x \in R \mid mx \in L\}$ и R-линейно отображается в I по правилу $x \mapsto \psi(mx)$. Берём вектор $e = \psi(mx)/x \in I$, такой что $\psi(mx) = e \cdot x$ для всех $x \in \mathfrak{k}$, и задаём продолжение $\psi' : L' \to I$ правилом $\psi'(\ell + mx) = \psi(\ell) + e \cdot x$. □

Упражнение 3.16. Убедитесь в корректности последнего правила и проверьте, что $\mathbb{Z}$-модули $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективны, причём второй замечателен тем, что для любого $\mathbb{Z}$-модуля A и любого элемента $a \in A$ есть гомоморфизм $\varphi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\varphi(a) \neq 0$.

3.4. (Ко)порождающие объекты. Объект G абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *генератором*[1] (соотв. *когенератором*) категории $\mathcal{A}$, если функтор $h^G : X \mapsto \mathrm{Hom}(G, X)$ (соотв. функтор $h_G : X \mapsto \mathrm{Hom}(X, G)$) строг, т. е. переводит разные стрелки в разные[2].

[1] (Ко)генераторы также называют *(ко)порождающими объектами* категории $\mathcal{A}$.
[2] Или, эквивалентно, ненулевые — в ненулевые.

Например, свободный модуль R ранга 1 порождает категорию $\mathcal{M}od$-R, ибо функтор $h^R \simeq \mathrm{Id}$ не только строг, но и вполне строг.

Упражнение 3.17. Покажите, что абелева категория с генератором умеренно мощна[1].

Для произвольных объектов G, X рассмотрим прямую сумму

$$\mathrm{Hom}(G,X)\otimes G \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\varphi\,:\,G\to X} \varphi\otimes G$$

одинаковых копий G, занумерованных стрелками $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,X)$, и отобразим слагаемое $\varphi\otimes G$ в X при помощи стрелки $\varphi : G \to X$. Получим морфизм

$$c\,:\,\mathrm{Hom}(G,X)\otimes G \to X\,, \tag{3-10}$$

который называется *канонической свёрткой*. Двойственным образом, рассмотрим для объектов Y, C прямое произведение

$$C^{\mathrm{Hom}(Y,C)} \overset{\text{def}}{=} \prod_{\varphi\,:\,Y\to C} C^{\varphi}$$

одинаковых копий C, занумерованных стрелками $\varphi : Y \to C$, и отобразим Y в сомножитель C^{φ} при помощи стрелки $\varphi : Y \to C$. Получим морфизм

$$c'\,:\,Y \to C^{\mathrm{Hom}(Y,C)} \tag{3-11}$$

который называется *канонической косвёрткой*.

Лемма 3.4

Кополная абелева категория $\mathcal{A}$ тогда и только тогда порождается объектом G, когда для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ каноническая свёртка (3-10) эпиморфна. Полная абелева категория тогда и только тогда копорождается объектом C, когда для любого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ каноническая косвёртка (3-11) мономорфна.

Доказательство. Докажем второе. Применим к морфизму (3-11) сохраняющий ядра функтор h^X с произвольным $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Получим точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(X,\ker c') \to \mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{c'_*} \mathrm{Hom}(X,C)^{\mathrm{Hom}(Y,C)}$$

морфизм c'_* которой переводит стрелку $\varphi : X \to Y$ в график отображения

$$\varphi^* :\ \mathrm{Hom}(Y,C) \to \mathrm{Hom}(X,C)\,, \quad \psi \mapsto \psi\varphi\,.$$

Тем самым, инъективность c'_* равносильна инъективности действия функтора

$$h_C\,:\,\mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}\left(h_C(Y), h_C(X)\right)\,.$$

Если $\ker c' = 0$, отображение c'_* инъективно для всех X, Y, т. е. функтор h_C строг. Наоборот, если h_C строг, то $\mathrm{Hom}(X,\ker c') = 0$ для всех X, и беря $X = \ker c'$, заключаем, что $\ker c' = 0$. □

Упражнение 3.18. Докажите первую часть лем. 3.4 и покажите, что любой модуль является коядром гомоморфизма свободных модулей.

[1] См. опр. 1.1 на стр. 5.

Следствие 3.1
Инъективная абелева группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ копорождает категорию абелевых групп.

Доказательство. Косвёртка $c' : A \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$ инъективна по упр. 3.16. □

Упражнение 3.19. Убедитесь, что абелева группа $I_R = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ со структурой правого R-модуля, задаваемой левым действием R на себе (соотв. со структурой левого R-модуля, задаваемой правым действием R на себе), является инъективным когенератором категории $\mathcal{M}od$-R (соотв. категории R-$\mathcal{M}od$).

3.4.1. Компактные объекты. Объект K козамкнутой абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *компактным*, если функтор $h^K : Z \mapsto \mathrm{Hom}(K, Z)$ коммутирует с бесконечными копределами. Поскольку любой копредел является коуравнителем пары стрелок между прямыми суммами[1], компактность равносильна тому, что h^K переводит прямые суммы в прямые суммы или, эквивалентно, что образ вложения (3-4)

$$\sigma_* : \mathrm{Hom}(K, \bigoplus_\nu X_\nu) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(K, \prod_\nu X_\nu) \simeq \prod_\nu \mathrm{Hom}(K, X_\nu)$$

лежит в $\bigoplus\limits_\nu \mathrm{Hom}(K, X_\nu) \subset \prod\limits_\nu \mathrm{Hom}(K, X_\nu)$. Например, проективный генератор R категории R-модулей компактен.

Упражнение 3.20. Покажите, что компактность проективного модуля равносильна его конечной порождённости.

3.5. Категории модулей. Выше мы уже видели, что абелева категория $\mathcal{M}od$-R правых модулей[2] над произвольным кольцом R с единицей полна и кополна, обладает инъективным когенератором и компактным проективным генератором. Последнее свойство выделяет категории модулей среди прочих абелевых категорий.

Теорема 3.1
Козамкнутая абелева категория $\mathcal{A}$ с компактным проективным генератором P точно эквивалентна[3] категории $\mathcal{M}od$-R правых R-модулей над кольцом $R = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P)$.

Доказательство. Функтор $h^P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$ принимает значение в $\mathcal{M}od$-R: правое действие $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, P)$ на абелевой группе $h^P(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, X)$ задаётся правым умножением стрелок на f. В силу проективности P функтор h^P точен. Проверим, что он по-существу сюрьективен и вполне строг[4]. Из лем. 3.4 вытекает, что любой объект $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ представляется в виде коядра морфизма между прямыми суммами подходящих множеств I, J одинаковых копий генератора P:

$$I \otimes P \xrightarrow{\varphi} J \otimes P \twoheadrightarrow X \to 0\,. \tag{3-12}$$

Морфизм φ задаётся некоторой матрицей Φ формата $I \times J$ с элементами

$$\varphi_{ij} \in \mathrm{Hom}(j \otimes P, i \otimes P) \simeq \mathrm{Hom}(P, P) = R\,,$$

[1] См. доказательство предл. 2.4 на стр. 27.
[2] Равно как и категория R-$\mathcal{M}od$ левых R-модулей.
[3] Т. е. имеется эквивалентность категорий, переводящая точные тройки в точные тройки.
[4] См. лем. 1.1 на стр. 13.

имеющей при каждом j лишь конечное число ненулевых φ_{ij}. Применяя к (3-12) функтор h^P и пользуясь компактностью P получаем для $h^P(X)$ представление в виде коядра морфизма свободных R-модулей

$$I \otimes R \xrightarrow{\varphi_*} J \otimes R \twoheadrightarrow h^P(X) \to 0\,, \tag{3-13}$$

который задаётся правым умножением строки $(x_i) \in I \otimes R$ на матрицу Φ. Так как каждый R-модуль является коядром гомоморфизма свободных R-модулей, функтор h^P по-существу сюрьективен. Для любого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ группа $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ является ядром стрелки $h_Y(\varphi)$, получающейся применением $h_Y : Z \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}(Z, Y)$ к диаграмме (3-12), а группа $\mathrm{Hom}_R\left(h^P(X), h^P(Y)\right)$ является коядром стрелки $h_{h^P(Y)}(\varphi_*)$, получающейся применением $h_{h^P(Y)} : M \mapsto \mathrm{Hom}_R(Z, h^P(Y))$ к диаграмме (3-12). Эти стрелки совпадают друг с другом, представляя собою гомоморфизм $h^P(Y)^J \to h^P(Y)^I$ прямых произведений одинаковых копий группы $h^P(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Y)$, задаваемый транспонированной матрицей Φ^t. Тем самым, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_R\left(h^P(X), h^P(Y)\right)$. □

Теорема 3.2 (эквивалентность Мориты)
Следующие три свойства колец R и S с единицами эквивалентны друг другу:

(1) категории $\mathcal{M}od$-R и $\mathcal{M}od$-S точно эквивалентны

(2) $R \simeq \mathrm{Hom}_S(P, P)$ для некоторого конечно порождённого проективного S-модуля P, являющегося генератором категории $\mathcal{M}od$-S

(3) существует такой R-S бимодуль T, что тензорное умножение $\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{M}od\text{-}S$, $M \mapsto M \underset{R}{\otimes} T$, является точной эквивалентностью категорий.

Доказательство. Если выполнено (1), то по теор. 3.1, применённой к $\mathcal{A} = \mathcal{M}od$-$S$, в $\mathcal{M}od$-S имеется компактный проективный генератор P с $\mathrm{Hom}_S(P, P) = R$, что даёт (2), поскольку компактный проективный модуль конечно порождён[1]. Если выполнено (2), положим[2] $T \overset{\text{def}}{=} P$ и покажем, что функторы

$$\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{M}od\text{-}S,\ M \mapsto M \underset{R}{\otimes} P, \quad \text{и} \quad \mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{M}od\text{-}R\,,\ N \mapsto \mathrm{Hom}(P, N)\,,$$

квазиобратны друг другу. Так как эти функторы сопряжены[3]:

$$\mathrm{Hom}_S\bigl(M \underset{R}{\otimes} P, N\bigr) \simeq \mathrm{Hom}_R\bigl(N, \mathrm{Hom}_S(P, N)\bigr)\,,$$

имеется естественное преобразование[4] $\mathrm{Hom}_S(P, N) \underset{R}{\otimes} P \xrightarrow{\sim} N$, $\varphi \underset{R}{\otimes} p \mapsto \varphi(p)$, и естественное преобразование $M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(P, M \underset{R}{\otimes} P)$, переводящее $m \in M$ в семейство

[1] См. упр. 3.20 на стр. 45.
[2] Отметим, что на правом S-модуле P имеется каноническая структура левого модуля над кольцом $R = \mathrm{End}_S(P)$.
[3] См. предл. 2.3 на стр. 21.
[4] См. формулу (2-2) на стр. 18.

гомоморфизмов $\varphi_m : P \to M \underset{R}{\otimes} P$, $p \mapsto m \underset{R}{\otimes} p$. Если P является проективным генератором, то оба эти преобразования — изоморфизмы. □

Упражнение 3.21. Убедитесь в этом.

Определение 3.4 (эквивалентность Мориты)
Кольца R и S, удовлетворяющие условиям теор. 3.2, называются *Морита-эквивалентными*, а функторы $M \mapsto M \underset{R}{\otimes} P$ и $N \mapsto \mathrm{Hom}(P, N)$ называются *эквивалентностями Мориты*.

Упражнение 3.22. Покажите, что категория R-модулей точно эквивалентна категории модулей над кольцом матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ любого конечного размера.

Теорема 3.3 (простая теорема Митчела о вложении)
Если абелева категория $\mathcal{B}$ полна и имеет проективный генератор[1], то любая её малая полная точная[2] абелева подкатегория $\mathcal{A}$ допускает точное вполне строгое вложение в категорию правых модулей над некоторым кольцом с единицей.

Доказательство. Обозначим через P проективный генератор категории $\mathcal{B}$, а через J — произведение множеств $\mathrm{Hom}(P, X)$ по всем $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Тогда $Q = J \otimes P$ тоже является генератором $\mathcal{B}$, и для каждого $X \in \mathcal{A}$ существует сюрьективный морфизм $\psi_X : Q \twoheadrightarrow X$. Положим $R = \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(Q)$ и как в доказательстве теор. 3.1 проверим, что точный строгий[3] функтор $h^Q : \mathcal{A} \to \mathcal{M}od\text{-}R$, $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Q, X)$, вполне строг. Для этого представим произвольный $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ как коядро гомоморфизма $\varphi = \psi_{\ker \psi_X}$:

$$Q \xrightarrow{\varphi} Q \xrightarrow{\psi_X} X \to 0\,.$$

Применение точного функтора h^Q задаёт $h^Q(X)$ как коядро левого умножения

$$R \xrightarrow{\varphi_*} R \to h^Q(X) \to 0$$

на элемент $\varphi \in R$. Применяя к этой диаграмме $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\left(*, h^Q(Y)\right)$, а к предыдущей — $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(*, Y)$, получаем для $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\left(h^Q(X), h^Q(Y)\right)$ одинаковое представление в виде ядра правого умножения на φ в модуле $h^Q(Y)$. □

[1] Не обязательно компактный!
[2] Т. е. такая, что точные тройки из $\mathcal{A}$ точны и в $\mathcal{B}$.
[3] Ибо Q — проективный генератор.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 3.1. Всё вытекает из дистрибутивности: $\varphi\alpha = \varphi\beta \iff \varphi(\alpha - \beta) = 0$.

Упр. 3.3. Инъективность ι_ν и сюрьективность π_ν вытекает из равенства $\pi_\nu \iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}$. Инъективность σ редуцируется к инъективности морфизма $X \oplus Y \to X \oplus Y$ суммы *двух* объектов при помощи леммы Цорна: рассмотрите чум таких подмножеств $S \subset N$, что отображение $\bigoplus\limits_{\nu \in S} X_\nu \to \prod\limits_{\nu \in S} X_\nu$ инъективно.

Упр. 3.6. В (а) по предл. 2.1 ядро задаёт правый сопряжённый функтор к функтору $\mathcal{A} \to \mathcal{A}r$, $X \mapsto \{X \to 0\}$, а коядро — левый сопряжённый функтор к функтору $\mathcal{A} \to \mathcal{A}r$, $X \mapsto \{X \to 0\}$ В (в) если φ обратим, то он не делит нуль, откуда $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$. Если $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$, то по упр. 3.5 диаграмма (3-6) приобретает вид

$$\begin{tikzcd}
0 & Y \arrow[l] & Y \arrow[l, "\mathrm{Id}_Y"'] \\
0 \arrow[r] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_X"] & X \arrow[u, "\overline{\varphi}"'],
\end{tikzcd}$$

и обратимость $\overline{\varphi}$ влечёт обратимость φ. Если φ мономорфен или эпиморфен, его каноническое разложение (3-6) имеет, соответственно, вид

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{coker}\varphi & Y \arrow[l, "\varsigma"'] & \ker\varsigma \arrow[l, "\varkappa'"'] \\
0 \arrow[r] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_X"] & X \arrow[u, "\overline{\varphi}"']
\end{tikzcd}
\quad \text{или} \quad
\begin{tikzcd}
0 & Y \arrow[l] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_Y"] & Y \\
\ker\varphi \arrow[r, "\varkappa"] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varsigma'"] & \operatorname{coker}\varkappa \arrow[u, "\overline{\varphi}"'],
\end{tikzcd}$$

и $\overline{\varphi}$ задаёт канонические изоморфизмы $X \xrightarrow{\sim} \ker\varsigma$ и $\operatorname{coker}\varkappa \xrightarrow{\sim} Y$.

Упр. 3.8. Коядро является фактором по *замыканию* образа. Вложение дискретной группы $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ со стандартной топологией и плотные обмотки торов мономорфны и эпиморфны, но не обратимы.

Упр. 3.10. Если существует β', то $\iota_A\beta' + \iota_B\beta : B \to A \oplus C$ является изоморфизмом. Если существует α', то изоморфизмом является $\alpha\pi_A + \alpha'\pi_B : A \oplus B \to B$.

Упр. 3.11. Если функтор F сохраняет точность троек, то он переводит каноническое разложение (3-7) любого морфизма φ в каноническое разложение морфизма $F(\varphi)$, в частности — переводит $\operatorname{im}\varphi$ в $\operatorname{im}\big(F(\varphi)\big)$.

Упр. 3.16. $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}//\mathbb{Z}$ очевидно удовлетворяют условиям лем. 3.3 на стр. 43. Гомоморфизм $\varphi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\varphi(a) \neq 0$ сначала строится на порождённом элементом a подмодуле $\mathbb{Z} \cdot a$ (изоморфном либо $\mathbb{Z}$ либо $\mathbb{Z}/(n)$), а потом по инъективности продолжается на весь модуль A.

Упр. 3.17. Подобъекты любого объекта X инъективно вкладываются в множество подгрупп группы $h^P(X) = \mathrm{Hom}(P, X)$.

Упр. 3.18. Для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ функтор $h_Y : Z \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, Y)$ переведёт точную последовательность $\mathrm{Hom}(G, X) \otimes G \xrightarrow{c} X \to \operatorname{coker} c \to 0$ в точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(\operatorname{coker} c, Y) to \,\mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{c^*} \mathrm{Hom}(G, Y)^{\mathrm{Hom}(G,X)},$$

в которой c^* сопоставляет стрелке $\varphi : X \to Y$ график функции

$$h^G(\varphi) = \varphi^* : \operatorname{Hom}(G, X) \to \operatorname{Hom}(G, Y), \quad \psi \mapsto \varphi\psi .$$

Инъективность c^* равносильна инъективности $h^G : \operatorname{Hom}(X, Y) \to \operatorname{Hom}(h^G(X), h^G(Y)$. Если $\operatorname{coker} c = 0$, отображение c^* инъективно и h^G строг. Наоборот, если h^G строг, то $\operatorname{Hom}(\operatorname{coker} c, Y) = 0$ для всех Y, и беря $Y = \operatorname{coker} c$, заключаем, что $Y = 0$.

Упр. 3.19. Воспользуйтесь функториальным по X изоморфизмом $\operatorname{Hom}_R\big(X, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(X \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big)$.