

§4. Комплексы и когомологии

4.1. Исчисление градуированных объектов. Диаграмма $V : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}$, где \mathbb{Z} рассматривается как дискретная категория, называется *градуированным объектом* абелевой категории \mathcal{A} . Такой объект представляет собою набор занумерованных целыми числами объектов $V^k \in \text{Об } \mathcal{A}$, которые называются *однородными компонентами* степени k в V . Если компоненты $V^k = 0$ при всех $k \ll 0$ (соотв. при всех $k \gg 0$) градуированный объект V называется *ограниченным слева* (соотв. *справа*).

Через $V[m]$ обозначается градуированный объект с компонентами

$$V[m]^k \stackrel{\text{def}}{=} V^{k+m}.$$

Для градуированного объекта $V : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}$ мы по определению полагаем

$$V_k \stackrel{\text{def}}{=} V^{-k}. \quad (4-1)$$

Сопоставление $k \mapsto V_k$ является композицией функтора V с оборачивающей стандартный линейный порядок на \mathbb{Z} инволюцией $k \mapsto -k$. При этом

$$V[m]_k = V[m]^{-k} = V^{m-k} = V_{k-m}.$$

Спуск и подъём индексов позволяет избегать отрицательных чисел. Верхняя индексация обычно называется *когомологической*, а нижняя — *гомологической*. В категориях модулей про элементы $v \in V_k$ говорят, что они имеют *нижнюю* (или *гомологическую*) степень k или *верхнюю* (или *когомологическую*) степень $-k$. Вычет $k \pmod{2}$ называется *чётностью* элемента $v \in V^k$ и обозначается $|v| \in \mathbb{Z}/(2)$. Чётность не зависит от того, верхние или нижние индексы используются.

Естественное преобразование $f : U \rightarrow W[k]$ диаграммы $U : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}$ в диаграмму $W[k] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}$ называется *однородным морфизмом* степени k между градуированными объектами U и W . Такой морфизм представляет собою набор морфизмов $f_\nu : U^\nu \rightarrow W^{\nu+k}$ в категории \mathcal{A} . Например, *сдвиг градуировки* $s : V \rightarrow V[1]$, тождественно отображающий V^ν в $V^\nu = V[1]^{\nu-1}$, однороден степени -1 .

При использовании нижних индексов однородные морфизмы степени k

$$f : (D_\nu) \rightarrow (B_\mu), \quad g : (D_\nu) \rightarrow (U^\mu) \quad \text{и} \quad g : (U^\mu) \rightarrow (B_\nu)$$

представляют собою наборы стрелок

$$f_\nu : D_\nu \rightarrow B_{\nu-k}, \quad g_\nu : D_\nu \rightarrow U^{k-\nu} \quad \text{и} \quad h_\nu : U^\nu \rightarrow B_{-\nu-k},$$

соответственно, уменьшающих нижний индекс на k и сохраняющих сумму верхнего и нижнего индексов, которая будет равна k , если морфизм «поднимает» индексы, и равна $-k$, если он их «опускает».

Однородные морфизмы степени k из V в W образуют абелеву группу, обозначаемую $\text{GrHom}^k(V, W)$. При композиции однородных гомоморфизмов их степени складываются: $\text{GrHom}^i \circ \text{GrHom}^j \subset \text{GrHom}^{i+j}$. Прямая сумма

$$\text{GrHom}(V, W) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_k \text{GrHom}^k(V, W) \quad (4-2)$$

называется *градуированной группой морфизмов* из V в W . Градуированная группа эндоморфизмов $\text{GrHom}(V, V)$ всякого градуированного объекта V является ассоциативным градуированным кольцом с единицей.

4.1.1. Кошулево правило знаков. При работе с градуированными объектами мы всегда придерживаемся так называемых *s-версий*¹ стандартных операций над отображениями и векторами, которые отличаются от обычных использованием *кошулева правила знаков*: если результат применения операции к аргументам a_i в неградуированной теории является однородной линейной комбинацией (некоммутативных) мономов от этих аргументов и каких-либо вспомогательных операторов f_j , где все мономы отличаются друг от друга только перестановками участвующих в них символов, то в *s-версии* этой операции каждая транспозиция любых двух символов x, y должна дополнительно сопровождаться умножением соответствующего монома на $(-1)^{|x||y|}$. Например, *s-коммутатор* однородных эндоморфизмов определяется как

$$[f, g] \stackrel{\text{def}}{=} f \circ g - (-1)^{|f||g|} g \circ f,$$

а *s-правило Лейбница* для однородного оператора D на градуированной алгебре и однородных элементов a, b этой алгебры имеет вид

$$D(ab) = (Da)b + (-1)^{|D||a|} a(Db).$$

Результат применения тензорного произведения $f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_n$ однородных гомоморфизмов градуированных модулей $f_i: V_i \rightarrow V_i$ к тензорному моному

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \in V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$$

из однородных векторов v_i будет всегда вычисляться как

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_m (v_1 \otimes \dots \otimes v_m) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^\varepsilon f_1(v_1) \otimes \dots \otimes f_m(v_m), \quad (4-3)$$

где $\varepsilon = |f_m|(|v_1| + \dots + |v_{m-1}|) + |f_{m-1}|(|v_1| + \dots + |v_{m-2}|) + \dots + |f_2||v_1|$. Композиция тензорных произведений однородных гомоморфизмов тоже вычисляется как

$$(f_1 \otimes \dots \otimes f_m) \circ (g_1 \otimes \dots \otimes g_m) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^\varepsilon (f_1 \circ g_1) \otimes \dots \otimes (f_m \circ g_m) \quad (4-4)$$

где $\varepsilon = |f_m|(|g_1| + \dots + |g_{m-1}|) + |f_{m-1}|(|g_1| + \dots + |g_{m-2}|) + \dots + |f_2||g_1|$.

4.1.2. Комплексы и (ко)гомологии. Градуированный объект V , оснащённый однородным эндоморфизмом $d: V \rightarrow V$ степени 1 с $d^2 = 0$ называется *комплексом с дифференциалом* d . Действие дифференциала удобно изображать диаграммой

$$\dots \xrightarrow{d} V^{v-1} \xrightarrow{d} V^v \xrightarrow{d} V^{v+1} \xrightarrow{d} \dots, \quad (4-5)$$

Равенство $d^2 = 0$ означает, что $\text{im } d$ является подобъектом² в $\ker d$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.1. Покажите, что в абелевой категории для любой пары компонентных стрелок α, β с $\beta\alpha = 0$ имеются канонические инъекция $\iota: \text{im } \alpha \hookrightarrow \ker \beta$, сюръекция $\pi: \text{coker } \alpha \twoheadrightarrow \text{im } \beta$ и изоморфизм $\text{coker } \iota \simeq \ker \pi$.

¹Префикс *s-* можно воспринимать как указание на присутствие дополнительных знаков (*signs*) или как сокращение для *super-* или *skew-*.

²Или, что то же самое, — фактором объекта $\text{coker } d$.

Градуированный объект $H(V) \stackrel{\text{def}}{=} \ker d / \text{im } d$ с однородными компонентами

$$H^v(V) = \frac{\ker(d : V^v \rightarrow V^{v+1})}{\text{im}(d : V^{v-1} \rightarrow V^v)}.$$

называется *когомологиями* комплекса V . Если $H(V) = 0$, т. е. $\ker d = \text{im } d$, комплекс V называется *точным* или *ациклическим*. В категориях модулей элементы из $\ker d$ называются *коциклами*, а элементы из $\text{im } d$ — *кограницами*.

При использовании нижней индексации (4-1) дифференциал принято обозначать кириллической буквой ∂ . Диаграмма (4-5) приобретает при этом вид

$$\cdots \xrightarrow{\partial} V_{v+1} \xrightarrow{\partial} V_v \xrightarrow{\partial} V_{v-1} \xrightarrow{\partial} \cdots. \quad (4-6)$$

В таком контексте факторы $H_v(V) \stackrel{\text{def}}{=} \ker(\partial : V_v \rightarrow V_{v-1}) / \text{im}(\partial : V_{v+1} \rightarrow V_v)$ называют *гомологиями*, элементы из $\ker \partial$ — *циклами*, а элементы из $\text{im } \partial$ — *границами*¹.

Пример 4.1 (цепной комплекс симплициального множества)

Пусть $X : \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \text{Set}$ — симплициальное множество, а K — коммутативное кольцо. Обозначим через $C_n = C_n(X, K)$ свободный K -модуль с базисом $X_n = X([n])$. Его элементы называются n -мерными *симплициальными цепями* в X с коэффициентами из K . Напомню², что мы обозначили через $\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n]$ — возрастающее вложение, образ которого не содержит i . Контравариантный функтор X переводит его в отображение i -той грани, которое мы обозначим просто через $\partial_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ и которое сопоставляет n -мерному симплексу $x \in X_n$ тот $(n-1)$ -мерный симплекс $\partial_i x \in X_{n-1}$, что подклеивается к x в качестве гиперграни, натянутой на все вершины кроме i -той, где $i = 0, 1, \dots$ K -линейный оператор $\partial : C_n \rightarrow C_{n-1}$, действующий на базисный вектор $x \in X_n \subset C_n$ по формуле

$$\partial x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i x, \quad (4-7)$$

называется *граничным оператором*. Он сопоставляет каждому симплексу его ориентированную границу. Например, ориентированной границей треугольника 012 будет цепь $12 - 02 + 01$, которую можно интерпретировать как контур треугольника, обходимый в направлении ориентированного ребра 01, если договориться, что смена знака перед симплексом означает смену ориентации у этого симплекса, т. е. $-02 = 20$.

Упражнение 4.2. Убедитесь, что $\partial^2 = 0$.

Комплекс (C, ∂) называется *цепным комплексом*, а его гомологии — *гомологиями* симплициального множества X с коэффициентами в K .

В случае, когда $X = S(T)$ является множеством сингулярных симплексов³ топологического пространства T , эти гомологии называются *сингулярными гомологиями* пространства T с коэффициентами в K и обозначаются $H(T, K)$.

¹Однако комплексы так и остаются комплексами ☺

²См. прим. 1.4 на стр. 5.

³См. прим. 2.6 на стр. 25.

Всё вышесказанное в равной степени применимо и к полусимплициальным множествам $X : \Delta_s^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$. Получающиеся при этом гомологии называют *симплициальными гомологиями* триангулированного топологического пространства $T = |X|$ — геометрической реализации полусимплициального множества X , и тоже обозначают¹ $H(T, K)$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.3. Вычислите гомологии $H(T, \mathbb{Z})$ стандартной триангуляции двумерного тора T с рис. 1♦1 на стр. 8.

4.1.3. Бикомплексы. Биградуированный объект $V = \bigoplus_{p,q} V^{p,q}$ с парой таких дифференциалов $d_1, d_2 : V \rightarrow V$, что $d_1^2 = 0$, $d_2^2 = 0$, $d_1 d_2 = -d_2 d_1$ и при всех p, q

$$d_1(V^{p,q}) \subset V^{p+1,q} \quad \text{и} \quad d_2(V^{p,q}) = V^{p,q+1},$$

называется *бикомплексом*. С каждым бикомплексом связан обычный комплекс

$$\text{Tot } V = \bigoplus_{\nu} \text{Tot}^{\nu} V, \quad \text{где} \quad \text{Tot}^{\nu} V \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{p+q=\nu} V^{p,q} \quad \text{и} \quad d_{\text{Tot}} \stackrel{\text{def}}{=} d_1 + d_2.$$

Он называется *свёрткой* или *тотальным комплексом* бикомплекса V .

ПРИМЕР 4.2 (ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСОВ МОДУЛЕЙ)

Тензорные произведения $U^p \otimes W^q$ однородных компонент комплексов модулей (U, d_U) и (W, d_W) образуют бикомплекс с дифференциалами $d_1 = d_U \otimes 1_W$ и $d_2 = 1_U \otimes d_W$, поскольку согласно кошулеву правилу знаков для $|d_U| = |d_W| = 1$ имеем:

$$(d_U \otimes 1) \circ (1 \otimes d_W) = d_U \otimes d_W = -(1 \otimes d_W) \circ (d_U \otimes 1).$$

Тотальный комплекс этого бикомплекса обозначается $U \otimes W$ и называется *тензорным произведением* комплексов U и V . Он имеет однородные компоненты

$$(U \otimes W)^k = \bigoplus_{\mu+\nu=k} U^{\mu} \otimes W^{\nu},$$

а его дифференциал продолжает дифференциалы комплексов U, V правилу Лейбница

$$d_{U \otimes V} \stackrel{\text{def}}{=} d_U \otimes 1 + 1 \otimes d_V \tag{4-8}$$

и действует на однородный тензор $u \otimes v$ по формуле

$$d_{U \otimes V}(u \otimes v) = (d_U \otimes 1)(u \otimes v) + (1 \otimes d_V)(u \otimes v) = (d_U u) \otimes v + (-1)^{|v|} v \otimes (d_V v).$$

Тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_m$ произвольного набора комплексов определяется аналогично: это градуированный объект с компонентами

$$(V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n)^{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\sum v_i = \nu} V_1^{v_1} \otimes V_2^{v_2} \otimes \dots \otimes V_n^{v_n} \tag{4-9}$$

¹В начальных курсах алгебраической топологии доказывается, что симплициальные гомологии триангулируемого топологического пространства совпадают с сингулярными и, в частности, не зависят от выбора триангуляции. См. А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, «Курс гомотопической топологии», М., Наука, 1989 или В. В. Прасолов, «Элементы теории гомологий», МЦНМО, 2006.

и дифференциалом, продолжающим дифференциалы $d_i: V_i \rightarrow V_i$ по правилу Лейбница:

$$d_{\otimes V_i} = \sum_{i=1}^m 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes d_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1, \quad (4-10)$$

причём отдельные слагаемые этой суммы перемножаются друг с другом и применяются к однородным тензорам согласно кошулеву правилу знаков.

ПРИМЕР 4.3 (комплекс однородных гомоморфизмов)

Для любых двух комплексов (U, ∂_U) , (W, d^W) в произвольной абелевой категории \mathcal{A} , абелевы группы $\text{Hom}(U_p, W^q)$ образуют бикомплекс с дифференциалами

$$d_1 = \partial_U^*: \varphi \mapsto (-1)^{|\varphi|+1} \varphi \circ \partial_U \quad \text{и} \quad d_2 = d_*^W: \varphi \mapsto d_W \circ \varphi. \quad (4-11)$$

Тотальный комплекс этого бикомплекса обозначается $\text{Hom}_{\text{DG}}(U, W)$ и называется *комплексом морфизмов* между комплексами U и W . Как градуированная абелева группа он совпадает с $\text{GrHom}(U, W)$ из форм. (4-2) на стр. 64 и имеет

$$\text{Hom}_{\text{DG}}^k(U, W) = \text{GrHom}^k(U, W) = \bigoplus_{\mu+\nu=k} \text{Hom}(U_\mu, W^\nu).$$

Мы пишем Hom_{DG} , а не GrHom , чтобы подчеркнуть что первая градуированная группа, в отличие от второй, рассматривается вместе с дифференциалом¹ d , переводящим однородный морфизм $\varphi: V \rightarrow W$ в его s -коммутатор с дифференциалами из V и W :

$$\begin{aligned} d: \text{Hom}_{\text{DG}}^k(U, W) &\rightarrow \text{Hom}_{\text{DG}}^{k+1}(U, W) \\ \varphi &\mapsto [d, \varphi] \stackrel{\text{def}}{=} d_W \circ \varphi - (-1)^{|\varphi|} \varphi \circ \partial_W. \end{aligned} \quad (4-12)$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.4. Убедитесь, что дифференциалы (4-11) антикоммутируют и дифференциал (4-12) имеет $d^2 = 0$.

Замечание 4.1. (мультикомплексы) Кроме бикомплексов можно рассматривать и более общие m -комплексы, т. е. \mathbb{Z}^m -градуированные K -модули $V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}^m} V^\mu$, оснащённые m дифференциалами d_i так, что мультистепень каждого d_i равна стандартному базисному вектору² $e_i \in \mathbb{Z}^m$ и при всех i, j выполняются соотношения $d_i^2 = 0$ и $d_i d_j + d_j d_i = 0$. Иными словами, дифференциалы d_i задают на V действие грасмановой алгебры с m образующими, согласованное с \mathbb{Z}^m -градуировками на V и на грасмановой алгебре. Каждому m -комплексу V тоже можно сопоставить полную свёртку $\text{Tot } V$ с $\text{Tot}^V V \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\sum \mu_i = \nu} V^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m}$ и $d_{\text{Tot}} = \sum d_i$. Тензорное произведение m комплексов V_1, V_2, \dots, V_m можно воспринимать как свёртку m -комплекса с компонентами $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_m$ и m дифференциалами из правой части (4-10).

¹Обозначение DG является аббревиатурой для «differential graded», т. е. *дифференциальная градуированная группа*.

²Т. е. $d_i(V^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m}) \subset V^{\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_i+1, \mu_{i+1}, \dots, \mu_m}$

4.2. Категории комплексов. С заданной абелевой категорией \mathcal{A} связаны три различных категории комплексов: *DG-категория* $Com_{DG}(\mathcal{A})$, «обычная» категория комплексов $Com(\mathcal{A})$ и *гомотопическая категория* $Ho(\mathcal{A})$. Все они имеют один и тот же класс объектов — комплексы, состоящие из объектов категории \mathcal{A} , однако различаются множествами морфизмов между комплексами V, W .

DG-категория комплексов $Com_{DG}(\mathcal{A})$ имеет в качестве морфизмов из V в W комплекс морфизмов $Hom_{DG}(V, W)$ из предыдущего [прим. 4.3](#).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1

Аддитивная категория \mathcal{C} , в которой каждое из множеств $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ является комплексом абелевых групп, причём дифференциал композиции удовлетворяет s -правилу Лейбница

$$d(\varphi \circ \psi) = (d\varphi) \circ \psi + (-1)^{|\varphi|} \varphi \circ (d\psi), \quad (4-13)$$

называется *дифференциальной градуированной* (или *DG-*) категорией.

УПРАЖНЕНИЕ 4.5. Убедитесь, что категория $Com_{DG}(\mathcal{A})$ действительно является DG-категорией.

4.2.1. Категория комплексов $Com(\mathcal{A})$ имеет в качестве морфизмов из V в W подгруппу в $Hom_{DG}(V, W)$, состоящую из перестановочных с дифференциалами однородных морфизмов степени нуль

$$Hom_{Com}(V, W) \stackrel{\text{def}}{=} Hom_{DG}^0(V, W) \cap \ker d = \{ \varphi : V \rightarrow W \mid \forall v \varphi(V^v) \subset W^v \ \& \ d_W \varphi = \varphi d_V \}.$$

Каждый такой морфизм корректно задаёт морфизм когомологий $\varphi_* : H(V) \rightarrow H(W)$, переводящий класс коцикла¹ ξ по модулю кограниц в класс коцикла $\varphi(\xi)$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.6. Убедитесь в этом.

Для любой абелевой категории \mathcal{A} категория $Com(\mathcal{A})$ тоже абелева: ядро морфизма комплексов $\varphi : V \rightarrow W$ это подкомплекс в V , образованный ядрами $\ker f_v$ морфизмов $\varphi_v : V^v \rightarrow W^v$, а коядро образовано коядрами $\text{coker } \varphi_v = W^v / \text{im } \varphi_v$ этих морфизмов.

УПРАЖНЕНИЕ 4.7. Убедитесь, что ядра $\ker \varphi_v$ действительно образуют подкомплекс в V , т. е. d_V переводит $\ker \varphi_v$ в $\ker \varphi_{v+1}$, и что коядра $\text{coker } \varphi_v$ образуют фактор комплекс комплекса W , т. е. d_W корректно задаёт отображение фактор объектов $W^v / \text{im } \varphi_v \rightarrow W^{v+1} / \text{im } \varphi_{v+1}$.

Существование прямых сумм, наличие нулевого объекта и совпадение образа с кообразом имеют место постольку, поскольку они имеют место в категории диаграмм² $\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}$ и их естественных преобразований, которая, как легко видеть, абелева.

УПРАЖНЕНИЕ 4.8. Убедитесь в этом.

¹Всюду далее мы будем рассуждать в терминах элементов объектов, как будто подлежащая абелева категория \mathcal{A} является категорией модулей над ассоциативным кольцом. Справедливость получаемых таким образом результатов для произвольной абелевой категории \mathcal{A} может быть установлена при помощи сильной теоремы о вложении: минимальная по включению полная абелева подкатегория, содержащая заданное множество объектов из \mathcal{A} , является малой и по сильной теореме о вложении может быть точно и вполне строго вложена в категорию модулей над ассоциативным кольцом.

²Где \mathbb{Z} рассматривается как дискретная категория.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1

С точной тройкой комплексов $0 \rightarrow U \xrightarrow{\iota} W \xrightarrow{\pi} W/U \rightarrow 0$ функториально¹ связана длинная точная последовательность когомологий

$$\dots \xrightarrow{\iota_*} H^i(W) \xrightarrow{\pi_*} H^i(W/U) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\iota_*} H^{i+1}(W) \xrightarrow{\pi_*} \dots, \quad (4-14)$$

в которой связывающий гомоморфизм $\delta : H^i(W/U) \rightarrow H^{i+1}(U)$ переводит когомологический класс коцикла $\pi(w) \in \ker d_{W/U}$ в когомологический класс коцикла $d_W(w)$.

Доказательство. Проверим, что δ является корректно определённым отображением из $H(W/U)$ в $H(U)$. Поскольку $\pi d_W(w) = d_{W/U}\pi(w) = 0$, элемент $d_W(w) \in \ker \pi = U$. Он является коциклом, так как $d_U d_W(w) = d_W^2(w) = 0$. Его когомологический класс в $H(U)$ не зависит от выбора элемента $w \in W$, представляющего класс когомологий $[\pi(w)] \in H(W/U)$, поскольку $d_W(U + dW) = d_U(U) = 0$ в $H(U)$. По построению, каждый из морфизмов φ_* , ψ_* и δ функториально зависит от исходной точной тройки комплексов, и композиция любой пары последовательных стрелок в (4-14) нулевая. Проверку точного совпадения ядер с образами мы оставляем читателю. \square

УПРАЖНЕНИЕ 4.9. Сделайте эту проверку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2 (СДВИГ ГРАДУИРОВКИ)

Функтор сдвига $S : \text{Com} \rightarrow \text{Com}$, $V \mapsto SV = V[1]$, действует на комплекс по правилу $SV^v = V^{v+1}$, $d_{SV} = -d_V$, так что естественное преобразование сдвига $s : V \rightarrow V[1]$, тождественно действующее на элементы и лежащее в $\text{Hom}_{\text{DG}}^{-1}(V, V[1])$, s -коммутирует с дифференциалом: $[d, s] = d_{SV}s + sd_V = 0$. Действие функтора S на морфизмы тождественно. Функтор S обратим в сильном смысле: тождественно действующий на морфизмы функтор $T : V \mapsto V[-1]$, где $V[-1]^v = V^{v-1}$ и $d_{TV} = -d_V$, таков что $TS = ST = \text{Id}$ (точное равенство, а не эквивалентность функторов). Итерации функтора сдвига обозначаются $S^k V = T^{-k} V = V[k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

ПРИМЕР 4.4 (КОНУС МОРФИЗМА)

Со всяким морфизмом комплексов $\varphi : U \rightarrow W$ функториально связан сосредоточенный в двух столбцах с номерами -1 и 0 бикомплекс

$$\begin{array}{ccc} & & \uparrow d_W \\ -d_U \uparrow & & \uparrow d_W \\ U^{i+1} & \xrightarrow{\varphi} & W^{i+1} \\ -d_U \uparrow & & \uparrow d_W \\ U^i & \xrightarrow{\varphi} & W^i \\ -d_U \uparrow & & \uparrow d_W \\ U^{i-1} & \xrightarrow{\varphi} & W^{i-1} \\ -d_U \uparrow & & \uparrow d_W \end{array} \quad (4-15)$$

¹В том смысле, что сопоставление точной тройке её длинной последовательности когомологий является функтором из категории точных диаграмм вида $0 \rightarrow * \rightarrow * \rightarrow * \rightarrow 0$ в $\text{Com}(\mathcal{A})$ в категорию бесконечных точных диаграмм $\dots \rightarrow * \rightarrow * \rightarrow \dots$ в \mathcal{A} .

свёртка которого называется *конусом* морфизма φ и обозначается $\text{Con}(\varphi)$. Как градуированный модуль, $\text{Con}(\varphi) \simeq U[1] \oplus W$ имеет $\text{Con}^i(\varphi) = U^{i+1} \oplus W^i$, но дифференциал

$$d_{\text{Con}(\varphi)} : U[1] \oplus W \rightarrow U[1] \oplus W, \quad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -d_U & 0 \\ \varphi & d_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \quad (4-16)$$

не равен прямой сумме дифференциалов. Комплекс $W \subset \text{Con}(\varphi)$ является подкомплексом в $\text{Con}(\varphi)$ с фактором $\text{Con}(\varphi)/W \simeq U[1]$, причём точная тройка комплексов

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{\iota_\varphi} \text{Con}(\varphi) \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1] \longrightarrow 0, \quad (4-17)$$

вообще говоря, не расщепляется в категории $\mathcal{C}om$. Длинная точная последовательность когомологий тройки (4-17) имеет вид

$$\dots \longrightarrow H^i(\text{Con} \varphi) \xrightarrow{\pi_{\varphi_*}} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(W) \xrightarrow{\iota_{\varphi_*}} H^{i+1}(\text{Con} \varphi) \longrightarrow \dots, \quad (4-18)$$

и её связывающий гомоморфизм $\delta : H^i(U[1]) = H^{i+1}(U) \rightarrow H^{i+1}(W)$ совпадает с φ_* .

4.2.2. Гомотопическая категория комплексов $\mathcal{H}o$ и имеет в качестве морфизмов нулевые когомологии комплексов Hom_{DG} :

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}o}(V, W) \stackrel{\text{def}}{=} H^0(\text{Hom}_{\text{DG}}(V, W)) = \frac{\text{Hom}_{\mathcal{C}om}(V, W)}{\text{im}(d : \text{Hom}_{\text{DG}}^{-1}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\text{DG}}^0(V, W))}.$$

Иначе говоря, морфизмы в $\mathcal{H}o$ суть классы морфизмов $\varphi : V \rightarrow W$ в $\mathcal{C}om$ по модулю сложения с морфизмами вида $[d, \gamma] = d_W \gamma + \gamma d_V$, где $\gamma \in \text{Hom}_{\text{DG}}^{-1}(V, W)$. Морфизмы вида $[d, \gamma]$ называются *гомотопными нулю*. Морфизмы комплексов φ и ψ называются *гомотопными*, если их разность гомотопна нулю. При этом любое однородное степени -1 отображение $\gamma : V \rightarrow W$, такое что $\varphi - \psi = [d, \gamma]$, называется *гомотопией* между φ и ψ , что записывается как $\varphi \underset{\gamma}{\sim} \psi$. Итак, морфизмы в категории $\mathcal{H}o$ суть морфизмы комплексов, рассматриваемые с точностью до гомотопии.

УПРАЖНЕНИЕ 4.10. Убедитесь, что если $\varphi \underset{\gamma}{\sim} 0$, то $\varphi \underset{\gamma\psi}{\sim} 0$ и $\eta \varphi \underset{\eta\gamma}{\sim} 0$ всякий раз, когда композиции $\varphi\psi$ и $\eta\varphi$ определены.

Таким образом, гомотопные нулю морфизмы образуют в $\text{Mor}(\mathcal{C}om)$ двусторонний идеал, и значит, композиция морфизмов в $\mathcal{C}om$ корректно спускается на классы гомотопных морфизмов, так что $\mathcal{H}o$ действительно является категорией.

Всякий гомотопный нулю морфизм комплексов $\varphi = d_W \gamma + \gamma d_V : V \rightarrow W$ задаёт нулевой морфизм когомологий $\varphi_* : H(V) \rightarrow H(W)$, так как для любого коцикла $\xi \in \ker d_V$ коцикл $\varphi(\xi) = d_W(\gamma\xi) + \varphi\gamma(d_V\xi) = d_W(\gamma\xi)$ является кограницей. Поэтому гомотопные морфизмы комплексов одинаково действуют на когомологиях. В частности, при вычислении когомологий произвольного комплекса $V \in \mathcal{C}om$ можно заменить этот комплекс любым другим комплексом W , изоморфным V в категории $\mathcal{H}o$ — когомологии у W будут те же, что и у V , хотя изоморфизма между V и W в категории $\mathcal{C}om$ при этом может и не быть.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3

Комплекс V называется *стягиваемым*, если $\text{Id}_V \underset{\gamma}{\sim} 0$. Гомотопия γ между нулевым и тождественным эндоморфизмами называется *стягивающей гомотопией*.

УПРАЖНЕНИЕ 4.11. Убедитесь, что в категории $\mathcal{H}o$ все стягиваемые комплексы изоморфны нулевому комплексу (в частности, ациклически).

ПРИМЕР 4.5 (КОНУС ТОЖДЕСТВЕННОГО МОРФИЗМА)

Конус¹ Con Id_V тождественного морфизма $\text{Id}_V : V \rightarrow V$, как градуированный модуль равный $V[1] \oplus V$, изоморфен нулю в категории $\mathcal{H}o$. Стягивающая гомотопия между тождественным и нулевым эндоморфизмами задаётся формулой

$$\gamma : V[1] \oplus V \rightarrow V \oplus V[-1], \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.12. Убедитесь в этом и покажите, что вложение ι_{Id} и проекция π_{Id} из точной в категории $\mathcal{C}om$ тройки² $0 \longrightarrow V \xrightarrow{\iota_{\text{Id}}} \text{Con Id}_V \xrightarrow{\pi_{\text{Id}}} V[1] \longrightarrow 0$ тоже гомотопны нулю.

4.3. Комплексы Кошуля. Для произвольного элемента $f \in K$ обозначим через K_f сосредоточенный в степенях -1 и 0 двучленный комплекс

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{f} K \rightarrow 0, \quad (4-19)$$

с дифференциалом $f : x \mapsto fx$ и когомологиями

$$H^0(K_f) = K/(f) \quad \text{и} \quad H^{-1}(K_f) = \text{Ann } f = \{a \in K \mid af = 0\}.$$

ЛЕММА 4.1

Всякий комплекс K -модулей C вписывается в категории $\mathcal{C}om$ в точную тройку

$$0 \rightarrow C \hookrightarrow K_f \otimes C \rightarrow C[1] \rightarrow 0, \quad (4-20)$$

которая производит длинную точную последовательность когомологий

$$\dots \rightarrow H^i(C) \xrightarrow{f} H^i(C) \rightarrow H^i(K_f \otimes C) \rightarrow H^{i+1}(C) \xrightarrow{f} H^{i+1}(C) \rightarrow \dots$$

со связывающим гомоморфизмом $f : [x] \mapsto [fx]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Комплекс $K_f \otimes C$ имеет компонентой степени k прямую сумму

$$\left(K_f^{-1} \otimes C^{k+1} \right) \oplus \left(K_f^0 \otimes C^k \right) = C^{k+1} \oplus C^k.$$

Согласно Кошулеву правилу знаков, дифференциал $f \otimes 1 + 1 \otimes d_C$ действует на эти слагаемые как $1 \otimes C^{k+1} \mapsto f \otimes C^{k+1} - 1 \otimes d_C C^{k+1}$, $1 \otimes C^k \mapsto 1 \otimes d_C C^k$. Таким образом, комплекс $K_f \otimes C$ совпадает с конусом морфизма $f : C \rightarrow C$, $c \mapsto fc$, и все утверждения вытекают из прим. 4.4 на стр. 70. \square

¹См. прим. 4.4 на стр. 70.

²См. формулу (4-17) из прим. 4.4 на стр. 70.

Следствие 4.1

Если $f \in K$ обратим, то комплекс $K_f \otimes C$ ацикличен для любого комплекса C . \square

Следствие 4.2

Если f не делит нуль в K -модуле $H(C)$, то $H^i(K_f \otimes C) \simeq H^i(C) / fH^i(C)$ при всех i . \square

4.3.1. Комплекс Кошуля последовательности элементов. Для конечной упорядоченной последовательности элементов $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ тензорное произведение

$$K_{f_1 f_2 \dots f_m} \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{\alpha=1}^m K_{f_\alpha}$$

двучленных комплексов (4-19) называется *комплексом Кошуля* последовательности f_1, f_2, \dots, f_m . Комплекс $K_{f_1 f_2 \dots f_m}$ сосредоточен в степенях от $-m$ до 0, и его компонента степени $-k$ является прямой суммой $\binom{m}{k}$ свободных модулей ранга один

$$K^{\otimes m} = K \otimes K \otimes \dots \otimes K \simeq K,$$

занумерованных последовательностями $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ возрастающих индексов

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m,$$

равных номерам тех k из m тензорных сомножителей, что имеют степень -1 . Сопоставим базисному вектору $1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$ того произведения, в котором степень -1 имеют в точности k сомножителей, стоящих на местах с номерами i_1, i_2, \dots, i_k , грасманов моном $\xi_I = \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} \in \Lambda^k(K^m)$ из внешней алгебры $\Lambda(K^m)$ свободного K -модуля ранга m с базисом $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$. Таким образом мы изоморфно отображаем компоненту степени $-k$ комплекса $K_{f_1 f_2 \dots f_m}$ на $\Lambda^k(K^m)$. Этот изоморфизм превращает дифференциал комплекса $K_{f_1 f_2 \dots f_m}$ в грасманов дифференциальный оператор¹

$$\partial = \sum_{\alpha=1}^m f_\alpha \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} : \Lambda^k(K^m) \rightarrow \Lambda^{k-1}(K^m), \quad \omega \mapsto \sum_{\alpha=1}^m f_\alpha \cdot \partial \omega / \partial \xi_\alpha, \quad (4-21)$$

так что комплекс Кошуля переписывается в виде

$$0 \rightarrow \Lambda^m(K^m) \rightarrow \Lambda^{m-1}(K^m) \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^2(K^m) \rightarrow \Lambda^1(K^m) \rightarrow K \rightarrow 0, \quad (4-22)$$

где самый правый ненулевой дифференциал ∂ переводит базисный вектор $\xi_i \in \Lambda^1(K^m)$ в элемент $f_i \in K$, так что $\text{im}(\partial : \Lambda^1(K^m) \rightarrow K) = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ это идеал, порождённый элементами f_i в K .

Определение 4.4

Последовательность $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ называется *регулярной*, если при каждом i класс элемента f_i не делит нуль в факторе² $K / (f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$.

¹Напомним, что грасмановы частные производные антикоммутируют и подчиняются s -правилу Лейбница, см. раздел 2.5 лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-02.pdf>.

²Для $i = 1$ это означает, что f_1 не делит нуль в K .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2

Если элементы $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ образуют регулярную последовательность, то комплекс Кошуля (4-22) имеет $H^0(K_{f_1 f_2 \dots f_m}) \simeq K / (f_1, f_2, \dots, f_m)$ и ацикличен во всех отрицательных степенях.

Доказательство. Индукция по m с использованием сл. 4.2. \square

СЛЕДСТВИЕ 4.3

Если хоть один из элементов f_i обратим в K , то комплекс Кошуля $K_{f_1 f_2 \dots f_m}$ ацикличен всюду.

Доказательство. Это вытекает из сл. 4.1. \square

ПРИМЕР 4.6 (комплексы Кошуля и Де Рама кольца многочленов)

Возьмём в качестве $K = SV^* \simeq \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ симметрическую алгебру векторного пространства V^* с базисом x_1, x_2, \dots, x_n над полем \mathbb{k} и положим $f_i = x_i$. В силу изоморфизма $\Lambda^k(K^n) \simeq \Lambda^k V^* \otimes_{\mathbb{k}} SV^*$ комплекс (4-22), дополненный справа фактором $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] / (x_1, x_2, \dots, x_n) \simeq \mathbb{k}$, можно переписать как сосредоточенный в степенях от $-m$ до $+1$ комплекс свободных SV^* -модулей

$$0 \rightarrow \Lambda^m V^* \otimes_{\mathbb{k}} SV^* \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^2 V^* \otimes_{\mathbb{k}} SV^* \rightarrow V^* \otimes_{\mathbb{k}} SV^* \rightarrow SV^* \rightarrow \mathbb{k} \rightarrow 0 \quad (4-23)$$

с дифференциалом

$$\begin{aligned} \partial &= \sum \frac{\partial}{\partial \xi_i} \otimes x_i : \Lambda^k V^* \otimes S^m V^* \rightarrow \Lambda^{k-1} V^* \otimes S^{k+1} V^* \\ \omega \otimes f &\mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial \xi_i} \otimes x_i \cdot f, \end{aligned} \quad (4-24)$$

где x_i и ξ_i суть базисные векторы пространства V^* , рассматриваемые как образующие симметрической и внешней алгебр пространства V соответственно. Будучи комплексом Кошуля регулярной последовательности x_1, x_2, \dots, x_n , комплекс (4-23) ацикличен. Если $\text{char } \mathbb{k} = 0$, это можно увидеть без предл. 4.2 при помощи следующего гомотопического соображения.

На пространстве $\Lambda V^* \otimes_{\mathbb{k}} SV^*$ помимо дифференциала Кошуля, который является гомоморфизмом SV^* -модулей и имеет бистепень $(-1, 1)$ по грасмановым и коммутирующим переменным, имеется хорошо известный из курса анализа дифференциал Де Рама d , который является гомоморфизмом ΛV^* -модулей, имеет бистепень $(1, -1)$ и задаётся формулой

$$\begin{aligned} d &= \sum \xi_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} : \Lambda^k V^* \otimes S^m V^* \rightarrow \Lambda^{k+1} V^* \otimes S^{k-1} V^* \\ \omega \otimes f &\mapsto \sum_{i=1}^n \xi_i \wedge \omega \otimes \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{aligned}$$

¹Известном у физиков как алгебра полиномиальных суперфункций на V .

и может восприниматься как \mathbb{k} -линейный эндоморфизм степени -1 комплекса векторных пространств (4-23).

УПРАЖНЕНИЕ 4.13. Убедитесь, что $d^2 = 0$ и что s -коммутатор $[\partial, d] = \partial d + d\partial$ действует на компоненте $L^k V^* \otimes S^m V^*$ гомотетией с коэффициентом¹ $(k + m)$.

Из этого упражнения вытекает, что дифференциал Де Рама задаёт гомотопию между нулевым эндоморфизмом комплекса (4-23) и эндоморфизмом $\text{deg} = \partial d + d\partial$, действующим на каждую однородную компоненту $L^k V^* \otimes S^m V^*$ как $(k + m) \cdot \text{Id}$. Поэтому эндоморфизм deg_* пространства когомологий комплекса (4-23), умножающий все лежащие в $L^k V^* \otimes S^m V^*$ циклы на $k + m$, является нулевым. Таким образом, если $\text{char } \mathbb{k} = 0$, то нетривиальные циклы в комплексе (4-23) могут быть только в компоненте нулевой степени самого правого дифференциала $L^0 V^* \otimes S^0 V^* \rightarrow \mathbb{k}$, равной $\text{Id}_{\mathbb{k}}$ и тоже не имеющей когомологий. Тем самым, комплекс (4-23) ацикличен. Это рассуждение заодно устанавливает и ацикличность над полем характеристики нуль комплекса ДеРама

$$\dots \xrightarrow{d} S^3 V^* \otimes_{\mathbb{k}} L V^* \xrightarrow{d} S^2 V^* \otimes_{\mathbb{k}} L V^* \xrightarrow{d} V^* \otimes_{\mathbb{k}} L V^* \xrightarrow{d} \mathbb{k} \rightarrow 0$$

который с алгебраической точки зрения представляет собою бесконечный влево комплекс свободных модулей над алгеброй $L V^*$, а в геометрии интерпретируется² как комплекс дифференциальных форм с полиномиальными коэффициентами на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$.

4.3.2. Комплекс Кошуля квадратичной алгебры. Предыдущий пример допускает следующее некоммутативное обобщение. Обозначим через $T(V) = \bigoplus_{k \geq 0} V^{\otimes k}$ свободную ассоциативную алгебру конечномерного векторного пространства V над полем \mathbb{k} . Градуированная алгебра $A = T(V)/(I)$, являющаяся фактором алгебры $T(V)$ по однородному двустороннему идеалу $(I) \subset T(V)$, порождённому каким-нибудь векторным подпространством $I \subset V \otimes V$, называется *квадратичной алгеброй*. Симметрическая алгебра $S V$ и грасманова алгебра $L V$ являются примерами квадратичных алгебр: их идеалы соотношений порождаются линейными оболочками квадратичных тензоров вида $v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$ и $v \otimes v$ соответственно. Квадратичная алгебра $A^! \stackrel{\text{def}}{=} T(V^*)/(I^\perp)$, где $I^\perp = \text{Ann } I \subset V^* \otimes V^*$, называется *двойственной* к квадратичной алгебре $A = T(V)/(I)$. Обратите внимание, что $A^{!!} \simeq A$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.14. Убедитесь, что квадратичные алгебры $S V$ и $L V^*$ двойственны друг другу.

Из пары двойственных квадратичных алгебр A и $B = A^!$ можно изготовить ассоциативную алгебру $B \otimes A$, которая как векторное пространство представляет собою тензорное произведение векторных пространств $B \otimes A$ над полем \mathbb{k} , а умножение однородных разложимых тензоров производится с учётом кошулева правила знаков по

¹Этот факт известен как *теорема Эйлера об однородных суперфункциях*.

²При этом буквы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ заменяются традиционными для анализа символами dx_1, dx_2, \dots, dx_n .

формуле $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{|a_2||b_1|} (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$ и распространяется на все остальные тензоры по линейности.

УПРАЖНЕНИЕ 4.15. Убедитесь, что так определённое умножение корректно определено и ассоциативно.

Тензор $\text{Id}_V \in \text{End } V \simeq V^* \otimes V \subset B \otimes A$ называется *элементом Казимира* алгебры $B \otimes A$ и обозначается κ . В двойственных базисах x_i и e_i пространств V^* и V он записывается как $\kappa = \sum x_i \otimes e_i$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.16. Покажите, что $\kappa^2 = 0$ в алгебре $B \otimes A$.

Тензорное произведение векторных пространств $\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} B \otimes A^*$ является правым $B \otimes A$ -модулем, на котором элемент $b \otimes a$ действует оператором $\varrho_b \otimes \lambda_a^*$, где $\varrho_b : B \rightarrow B$, $\beta \mapsto \beta b$, это оператор правого умножения на b в алгебре B , а $\lambda_a^* : A^* \rightarrow A^*$, это оператор, двойственный к оператору $\lambda_a : A \rightarrow A$, $\alpha \mapsto a\alpha$, левого умножения на a в алгебре A . В силу [упр. 4.16](#) правое действие оператора Казимира κ задаёт на \mathcal{K} структуру комплекса векторных пространств¹. Он называется *комплексом Кошуля* квадратично двойственных алгебр A и B . В терминах двойственных базисов $x_i \in V^*$ и $e_i \in V$ действие дифференциала задаётся формулой

$$\partial : b \otimes \alpha \mapsto \sum_i (b \cdot x_i) \otimes (e_i \lrcorner \alpha),$$

где $\alpha \in T(V^*)$ рассматривается как полилинейная форма на пространстве V , и $e_i \lrcorner \alpha$ означает подстановку вектора e_i в её первый аргумент.

УПРАЖНЕНИЕ 4.17. Убедитесь, что для двойственных квадратичных алгебр $A = S(V)$ и $B = \Lambda(V^*)$ оператор Казимира κ переводит $\Lambda^k V^* \otimes S^m V^*$ в $\Lambda^{k-1} V^* \otimes S^{k+1} V^*$, и его действие на этой однородной компоненте связано с кошулевым дифференциалом ∂ из форм. (4-24) на стр. 74 соотношением $\kappa = m^{-1} \partial$.

Квадратичная алгебра A называется *кошулевой*, если комплекс Кошуля \mathcal{K} точен.

УПРАЖНЕНИЕ 4.18* (кошулева двойственность). Покажите, что кошулевость квадратичной алгебры A равносильна кошулевости двойственной ей квадратичной алгебры $B = A^!$.

4.4. Спектральные последовательности. Рассмотрим последовательность таблиц E_0, E_1, E_2, \dots , клетки которых занумерованы целыми числами $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ так, что p увеличивается по горизонтали, а q по вертикали. Если при каждом r

- в клетках таблицы E_r располагаются модули $E_r^{p,q}$ и задан дифференциал d_r бистепени $(r, 1-r)$ по (p, q) , действующий из клеток диагонали $p+q = n$ в клетки следующей диагонали $p+q = n+1$ со сдвигом на r единиц вправо:

$$d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q+1-r}, \quad d_r^2 = 0$$

- очередная таблица E_{r+1} состоит из когомологий предыдущей таблицы E_r :

$$E_{r+1}^{p,q} = \ker (d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q+1-r}) / d_r (E_r^{p-r, q-1+r})$$

¹И даже B - A -бимодулей.

то говорят, что эти таблицы образуют *спектральную последовательность*¹ *когомологического типа*². Скажем, что спектральная последовательность *стабилизируется*, если содержимое каждой клетки с какого-то момента перестаёт меняться, т. е.

$$\forall (p, q) \exists N = N(p, q) : \forall r \geq N \quad d_r(E_r^{p,q}) = 0 \quad \text{и} \quad d_r(E_r^{p-r, q+r-1}) = 0. \quad (4-25)$$

Например, такое заведомо происходит, когда в одной из таблиц E_r на каждой диагонали $p + q = \text{const}$ имеется лишь конечное число ненулевых модулей. Если спектральная последовательность стабилизируется, то модуль $E_r^{p,q}$ с $r \geq N(p, q)$ из условия (4-25) обозначается $E_\infty^{p,q}$ и называется *предельным*. В этой ситуации говорят, что спектралка *сходится* к градуированным модулям $E_\infty^n \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$ и пишут $E_r^{p,q} \Rightarrow E_\infty^n$. Спектральные последовательности являются основным инструментом для получения информации о когомологиях комплексов, тем или иным способом «собранных» из более элементарных комплексов.

Предложение 4.3 (спектральная последовательность фильтрованного комплекса)
Пусть комплекс C обладает такой убывающей системой подкомплексов³ $F^p C \subseteq C$,

$$C \supseteq \dots \supseteq F^{p-1} C \supseteq F^p C \supseteq F^{p+1} C \supseteq \dots \supseteq 0, \quad (4-26)$$

что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ подмодули $F^p C^n$ совпадают с C^n при всех $p \ll 0$ и зануляются при всех $p \gg 0$. Тогда существует спектральная последовательность с

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(\text{Gr}^p C), \quad \text{где} \quad \text{Gr}^p C \stackrel{\text{def}}{=} F^p C / F^{p+1} C,$$

сходящаяся к присоединённым факторам $\text{Gr}^p H^{p+q}(C) \stackrel{\text{def}}{=} F^p H^{p+q}(C) / F^{p+1} H^{p+q}(C)$ убывающей фильтрации $F^\bullet H(C)$ на модуле когомологий $H(C)$, относящей в подмодуль $F^p H(C) \subseteq H(C)$ все коциклы, лежащие в подкомплексе $F^p C$, по модулю всех попавших в этот подкомплекс кограниц.

Доказательство. Расположим в столбцах таблицы E_0 фактор комплексы $\text{Gr}^p C$ так, чтобы дифференциал комплекса C действовал в них снизу вверх, а присоединённые факторы каждого модуля C^n из комплекса C располагались на диагонали $p + q = n$, т. е. положим $E_0^{p,q} = \text{Gr}^p C^{p+q}$. Обозначим через $\pi : F^p C \rightarrow \text{Gr}^p C$ каноническую проекцию с ядром $F^{p+1} C$, и для каждого r рассмотрим в модуле $F^p C^{p+q}$, который накрывает $E_0^{p,q}$ при этой проекции, подмодуль

$$Z_r^{p,q} = \{c \in F^p C^{p+q} \mid dc \in F^{p+r} C^{p+q}\}.$$

При $r \rightarrow \infty$ он аппроксимирует «снаружи» лежащие в $F^p C^{p+q}$ коциклы дифференциала d в том смысле, что с ростом r кограницы элементов из $Z_r^{p,q}$ оказываются во всё

¹В просторечии — *спектралку*.

²Согласно договорённостям из н° 4.1.2, в спектралке *гомологического типа* таблицы нумеруются верхним индексами: E^0, E^1, E^2, \dots и заполняются модулями $E_{p,q}^r$ с дифференциалами $\partial_r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r, q+r-1}^r$ бистепени $(-r, r-1)$, бьющими из клеток диагонали $p + q = n$ в клетки предыдущей диагонали $p + q = n - 1$ со сдвигом на r единиц в влево.

³Это означает, что $d_C(F^p C) \subseteq F^p C$ при всех $p \in \mathbb{Z}$.

более глубоких стратах фильтрации и полностью зануляются при $r \gg 0$. В том же самом смысле кограницы дифференциала d , лежащие в $F^p C^{p+q}$, аппроксимируются «изнутри» подмодулями $dF^{p-r} C^{p+q} \cap F^p C^{p+q} = dZ_r^{p-r, q+r-1}$, которые содержатся в подмодуле всех кограниц $dC^{p+q-1} \cap F^p C^{p+q}$ и совпадают с ним при $r \gg 0$.

Приступим к построению спектралки. Ядро выходящего из клетки (p, q) дифференциала $d : E_0^{p, q} \rightarrow E_0^{p, q+1}$ равно $\pi Z_1^{p, q}$, а образ входящего в неё дифференциала $d : E_0^{p, q-1} \rightarrow E_1^{p, q}$ равен $\pi dZ_0^{p, q-1}$. Тем самым, таблица когомологий $E_1 = H(E_0)$ имеет в этой клетке модуль

$$\begin{aligned} E_1^{p, q} = H^{p+q}(\text{Gr}^p C) &= \frac{\pi Z_1^{p, q}}{\pi dZ_0^{p, q-1}} \simeq \frac{Z_1^{p, q} + F^{p+1} C^{p+q}}{dZ_0^{p, q-1} + F^{p+1} C^{p+q}} \simeq \\ &\simeq \frac{Z_1^{p, q}}{dZ_0^{p, q-1} + (Z_1^{p, q} \cap F^{p+1} C^{p+q})} \simeq \frac{Z_1^{p, q}}{dZ_0^{p, q-1} + Z_0^{p+1, q-1}} \end{aligned}$$

(в последних двух переходах мы воспользовались перечисленными в [упр. 4.19](#) ниже стандартными соображениями из линейной алгебры, включением $dZ_0^{p, q-1} \subset Z_1^{p, q}$ и равенством $Z_1^{p, q} \cap F^{p+1} C^{p+q} = Z_0^{p+1, q-1}$).

УПРАЖНЕНИЕ 4.19. Покажите, что во всяком модуле для любых подмодулей V и $W \supset U$ имеют место равенство $W \cap (U + V) = U + (W \cap V)$ и естественные изоморфизмы

$$\frac{W + V}{V} \simeq \frac{W}{V \cap W} \quad \text{и} \quad \frac{W + V}{U + V} \simeq \frac{W}{U + (V \cap W)}.$$

Поскольку $dZ_1^{p, q} \subset Z_1^{p+1, q}$ и $d^2 = 0$, дифференциал комплекса C корректно факторизуется до дифференциала бистепени $(1, 0)$ на таблице E_1

$$d : E_1^{p, q} = \frac{Z_1^{p, q}}{dZ_0^{p, q-1} + Z_0^{p+1, q-1}} \rightarrow \frac{Z_1^{p+1, q}}{dZ_0^{p+1, q-1} + Z_0^{p+2, q-1}} = E_1^{p+1, q}.$$

Следующие таблицы E_2, E_3, \dots строятся дословно также. Для каждого r положим

$$E_r^{p, q} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi Z_r^{p, q}}{\pi dZ_{r-1}^{p-r+1, q+r-2}} \simeq \frac{Z_r^{p, q} + F^{p+1} C^{p+q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1, q+r-2} + F^{p+1} C^{p+q}} \simeq \frac{Z_r^{p, q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1, q+r-2} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}}$$

(мы пользуемся тем, что $dZ_{r-1}^{p-r+1, q+r-2} \subset Z_r^{p, q}$ и $Z_r^{p, q} \cap F^{p+1} C^{p+q} = Z_{r-1}^{p+1, q-1}$). Поскольку $dZ_r^{p, q} \subset Z_r^{p+r, q-r+1}$ и $d^2 = 0$, дифференциал d комплекса C корректно факторизуется до дифференциала бистепени $(p, 1-p)$ на таблице E_r :

$$d_r^{p, q} : E_r^{p, q} \simeq \frac{Z_r^{p, q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1, q+r-2} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}} \rightarrow \frac{Z_r^{p+r, q-r+1}}{dZ_{r-1}^{p+1, q-1} + Z_{r-1}^{p+r+1, q-r}} \simeq E_r^{p+r, q-r+1},$$

ядро которого изоморфно фактору подмодуля $\{c \in Z_r^{p, q} \mid dc \in dZ_{r-1}^{p+1, q-1} + Z_{r-1}^{p+r+1, q-r}\}$ по его пересечению с $dZ_{r-1}^{p-r+1, q+r-2} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}$. Поскольку $Z_{r-1}^{p+1, q-1} \subset Z_r^{p, q}$, все элементы $c \in Z_r^{p, q}$ с $dc \in dZ_{r-1}^{p+1, q-1}$ попадают в нулевой класс, а так как элементы $c \in Z_r^{p, q}$ с $dc \in Z_{r-1}^{p+r+1, q-r}$ составляют подмодуль $Z_{r+1}^{p, q} \subset Z_r^{p, q}$, этот фактор изоморфен

$$\frac{Z_{r+1}^{p, q}}{Z_{r+1}^{p, q} \cap (dZ_{r-1}^{p-r+1, q+r-2} + Z_{r-1}^{p+1, q-1})}.$$

Снова пользуясь тем, что $dZ_{r-1}^{p-r+1, q+r-2} \subset Z_{r+1}^{p, q}$ и $Z_{r+1}^{p, q} \cap Z_{r-1}^{p+1, q-1} = Z_r^{p+1, q-1}$, получаем

$$\ker d_r^{p, q} \simeq \frac{Z_{r+1}^{p, q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1, q+r-2} + Z_r^{p+1, q-1}}. \quad (4-27)$$

Образ приходящего в клетку (p, q) дифференциала $d_r^{p-r, q+r-1} : E_r^{p-r, q+r-1} \rightarrow E_r^{p, q}$ имеет вид $dZ_r^{p-r, q+r-1} / dZ_{r-1}^{p-r+1, q+r-2}$. Факторизуя по нему ядро (4-27) получаем

$$H^{p, q}(E_r) \simeq \frac{Z_{r+1}^{p, q}}{dZ_r^{p-r, q+r-1} + Z_r^{p+1, q-1}} \simeq E_{r+1}^{p, q}.$$

Таким образом, таблицы E_r образуют спектральную последовательность с нужным E_1 . Модули, из которых состоят все таблицы E_r , являются подфакторами в C , и дифференциалы во всех таблицах являются корректно определёнными ограничениями дифференциала d комплекса C на эти подфакторы.

Наложенные на фильтрацию $F^\bullet C$ условия гарантируют, что на каждой диагонали таблицы E_0 имеется лишь конечное число ненулевых модулей. Поэтому спектральная последовательность E_r сходится к градуированным модулям $E_\infty^n = \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p, q}$ компонентами

$$E_\infty^{p, q} = \frac{\pi\{c \in F^p C^{p+q} \mid dc = 0\}}{\pi\{c \in C^{p+q-1} \mid dc \in F^p C^{p+q}\}} \simeq \text{Gr}^p H^{p+q}(C),$$

что и утверждалось. □

Пример 4.7 (двучленная фильтрация)

Точная тройка комплексов $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$ задаёт на среднем комплексе V двучленную фильтрацию $V = F^0 V \supset U = F^1 V \supset 0 = F^2 V$ с присоединёнными факторами $\text{Gr}^0 V = V/U = W$ и $\text{Gr}^1 V = U/0 = U$. В этом случае таблица E_1 спектральной последовательности из предл. 4.3 сосредоточена в двух столбцах $p = 0, 1$ и имеет вид

$$H^{q+1}(W) \xrightarrow{d_V} H^{q+2}(U)$$

$$H^q(W) \xrightarrow{d_V} H^{q+1}(U)$$

$$H^{q-1}(W) \xrightarrow{d_V} H^q(U)$$

$$H^{q-2}(W) \xrightarrow{d_V} H^{q-1}(U),$$

где каждая горизонтальная стрелка переводит являющийся d_W -коциклом класс элемента $v \in V$ в факторе $W = V/U$ в когомологический класс элемента $d_V v$, т. е. совпадает со связывающим гомоморфизмом¹ δ из длинной точной последовательности

¹См. предл. 4.1 на стр. 70.

когомологий точной тройки $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$. Таблица $E_2 = H(E_1)$ уже является предельной таблицей E_∞ и состоит из присоединённых факторов индуцированной двучленной фильтрации на $H(V)$, т. е. при каждом n мы имеем точную тройку

$$\operatorname{coker}(H^{n-1}(W) \xrightarrow{\delta} H^n(U)) \hookrightarrow H^n(V) \twoheadrightarrow \ker(H^n(W) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(U)),$$

что несёт ровно ту же информацию об $H(V)$, что и длинная точная последовательность когомологий $\dots \rightarrow H^{n-1}(W) \xrightarrow{\delta} H^n(U) \rightarrow H^n(V) \rightarrow H^n(W) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(U) \rightarrow \dots$.

4.4.1. Спектральные последовательности бикомплекса. Тотальный комплекс¹

$$C^n = \operatorname{Tot}^n(V) = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}$$

каждого бикомплекса $V = V^{p,q}$ обладает двумя симметричными фильтрациями, которые получаются одна из другой отражением $p \leftrightarrow q$ относительно диагонали $p = q$. Первая из этих фильтраций имеет

$$F^p \operatorname{Tot}^n(V) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{v \geq p} V^{v, n-v} \quad (4-28)$$

и индуцирует на $H^n(\operatorname{Tot}(V))$ убывающую фильтрацию, присоединённые градуированные факторы которой можно вычислять при помощи спектральной последовательности из [предл. 4.3](#). Поскольку горизонтальная компонента $d_1 : V^{p,q} \rightarrow V^{p+1,q}$ дифференциала тотального комплекса аннулирует присоединённые факторы фильтрации (4-28), дифференциал $d = d_1 + d_2$ действует на них только своей вертикальной компонентой $d_2 : V^{p,q} \rightarrow V^{p,q+1}$. Поэтому стартовая таблица E_0 спектралки, связанной фильтрацией (4-28), образована комплексами-столбцами $V^{p,*}$ бикомплекса V . Следующая таблица $E_1 = H(E_0)$ состоит из когомологий $E_1^{p,q} = H_{d_2}^q(V^{p,*})$ дифференциала d_2 , и d действует на них как d_1 .

УПРАЖНЕНИЕ 4.20. Убедитесь, что всякий антикоммутирующий с дифференциалами d_U, d_W комплексом U, W морфизм $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\text{DG}}^0(U, W)$ также, как и морфизм комплексом, корректно задаёт морфизм когомологий $\varphi_* : H(U) \rightarrow H(W)$.

Таким образом, таблица E_2 состоит из модулей когомологий $E_2^{p,q} = H_{d_1}^p(H_{d_2}^q(V))$ дифференциала d_1 , действующего на когомологиях дифференциала d_2 .

Вторая убывающая фильтрация на $\operatorname{Tot}^n(V)$ получается из первой перестановкой букв p, q и имеет

$$F^q \operatorname{Tot}^n(V) = \bigoplus_{v \geq q} V^{n-v, v}.$$

С нею связана спектралка с дифференциалами $E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p-r+1, q+r}$, которые наклоняются с ростом r влево и вверх, симметрично относительно диагонали $p = q$ тому, как вели себя дифференциалы первой спектралки, а в клетке (p, q) её второй таблицы стоят $H_{d_2}^p(H_{d_1}^q(V))$. Чтобы сделать индексацию и поведение дифференциалов стандартными, какими они были описаны в начале [н° 4.4](#) на стр. [76](#), следует ещё раз поменять местами буквы p и q . Получаем

¹См. [н° 4.1.3](#) на стр. [67](#).

Предложение 4.4

С каждым бикомплексом V связаны две спектральные последовательности с E_2 -членами

$${}^I E_2^{p,q} = H_{d_1}^p \left(H_{d_2}^q(V) \right) \quad \text{и} \quad {}^II E_2^{p,q} = H_{d_2}^p \left(H_{d_1}^q(V) \right). \quad (4-29)$$

Если на каждой диагонали $p + q = \text{const}$ бикомплекса V имеется лишь конечное число ненулевых модулей $V^{p,q}$, обе спектралки сходятся к присоединённым градуированным факторам некоторых убывающих с ростом p фильтров на $H^{p+q}(\text{Tot}(V))$. \square

4.4.2. Спектральная последовательность точной пары. Наиболее общим источником спектралок являются точные в каждом члене диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D, \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & & E \end{array} \quad (4-30)$$

называемые *точными парами*¹. Композиция $d \stackrel{\text{def}}{=} jk : E \rightarrow E$ имеет $d^2 = jkjk = 0$ и называется *дифференциалом* точной пары (4-30). Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} iD & \xrightarrow{i} & iD, \\ & \swarrow k_1 & \searrow j_1 \\ & & H(E) \end{array}$$

в которой $H(E) = \ker d / \text{im } d$, $j_1 : i(x) \mapsto j(x)$, $k_1 : [x] \mapsto k(x)$, называется *производной* от точной пары (4-30).

Упражнение 4.21. Убедитесь, что морфизмы j_1, k_1 определены корректно и производная тоже является точной парой.

Модуль $H(E)$ в производной паре является подфактором исходного модуля E :

$$H(E) = \ker(jk) / \text{im}(jk) = k^{-1}(\ker j) / j(\text{im } k) = k^{-1}(\text{im } i) / j(\ker i).$$

Повторяя эти рассуждения m раз, приходим к m -той производной паре от (4-30)

$$\begin{array}{ccc} i^m D & \xrightarrow{i} & i^m D, \\ & \swarrow k_m & \searrow j_m \\ & & E_m \end{array}$$

где $E_m = H(E_{m-1}) \simeq k^{-1}(\text{im } i^m) / j(\ker i^m)$ является подфактором модуля E из исходной пары (4-30), морфизм $k_m : [x] \mapsto k(x)$ является (корректно определённым) ограничением исходного морфизма k на этот подфактор, а $j_m = j i^{-m} : i^m(x) \mapsto j(x)$.

Если точная пара (4-30) образована биградуированными модулями

$$D = \bigoplus D^{p,q}, \quad E = \bigoplus E^{p,q}$$

а морфизмы i, j, k однородны бистепеней $|i| = (-1, 1)$, $|j| = (0, 0)$, $|k| = (1, 0)$, как на диаграмме:

¹По-английски *exact couple*.

$$\begin{array}{cccccccc}
D^{p-1,q+2} & \xrightarrow{j} & E^{p-1,q+2} & \xrightarrow{k} & D^{p,q+2} & \xrightarrow{j} & E^{p,q+2} & \xrightarrow{k} & D^{p+1,q+2} & \xrightarrow{j} & E^{p+1,q+2} & \xrightarrow{k} & D^{p+2,q+2} \\
& & \swarrow i & & \swarrow i & & \swarrow i & & \swarrow i & & \swarrow i & & \swarrow i \\
D^{p-1,q+1} & \xrightarrow{j} & E^{p-1,q+1} & \xrightarrow{k} & D^{p,q+1} & \xrightarrow{j} & E^{p,q+1} & \xrightarrow{k} & D^{p+1,q+1} & \xrightarrow{j} & E^{p+1,q+1} & \xrightarrow{k} & D^{p+2,q+1} \\
& & \swarrow i & & \swarrow i & & \swarrow i & & \swarrow i & & \swarrow i & & \swarrow i \\
D^{p-1,q} & \xrightarrow{j} & E^{p-1,q} & \xrightarrow{k} & D^{p,q} & \xrightarrow{j} & E^{p,q} & \xrightarrow{k} & D^{p+1,q} & \xrightarrow{j} & E^{p+1,q} & \xrightarrow{k} & D^{p+2,q} \\
& & \swarrow i & & \swarrow i & & \swarrow i & & \swarrow i & & \swarrow i & & \swarrow i \\
D^{p-1,q-1} & \xrightarrow{j} & E^{p-1,q-1} & \xrightarrow{k} & D^{p,q-1} & \xrightarrow{j} & E^{p,q-1} & \xrightarrow{k} & D^{p+1,q-1} & \xrightarrow{j} & E^{p+1,q-1} & \xrightarrow{k} & D^{p+2,q-1}
\end{array}$$

Рис. 4◊1. Биградуированная точная пара.

то размещая модули $E^{p,q}$ в клетки таблицы E_1 , а их последовательные производные — в следующие таблицы E_2, E_3, \dots , мы получим спектральную последовательность, имеющую $E_1 = E$ и для всех последующих $r \geq 2$

$$E_r^{p,q} \simeq k^{-1} (i^{r-1} D^{p+r-1, q-r+1}) / j (\ker(i^{r-1}|_{D^{p,q}})) \quad (4-31)$$

с дифференциалом $d_r = j_{r-1} k_{r-1} = j i^{1-r} k : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$, переводящим класс $[e] \in k^{-1} (i^{r-1} D^{p+r-1, q-r+1})$ элемента $e \in E$ с $k(e) = i^{r-1}(x)$ в класс $[j(x)]$ элемента $j(x) \in E$.

ПРИМЕР 4.8 (Фильтрованные комплексы)

Если у комплекса C имеется убывающая фильтрация подкомплексами $F^p C \subset C$, то точные тройки комплексов $0 \rightarrow F^{p+1} C \xrightarrow{l} F^p C \xrightarrow{\pi} \text{Gr}^p C \rightarrow 0$ производят длинные точные последовательности когомологий

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^n(F^{p+1} C) \xrightarrow{l_*} H^n(F^p C) \xrightarrow{\pi_*} H^n(\text{Gr}^p C) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(F^{p+1} C) \xrightarrow{l_*} \dots$$

которые собираются в точную пару биградуированных модулей

$$E^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} H^{p+q}(\text{Gr}^p C), \quad D^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} H^{p+q}(F^p C)$$

и однородных морфизмов

$$\begin{aligned}
i &\stackrel{\text{def}}{=} l_* : H^{p+q}(F^p C) \rightarrow H^{p+q}(F^{p-1} C) \\
j &\stackrel{\text{def}}{=} \pi_* : H^{p+q}(F^p C) \rightarrow H^{p+q}(\text{Gr}^p C) \\
k &\stackrel{\text{def}}{=} \delta : H^{p+q}(\text{Gr}^p C) \rightarrow H^{p+q+1}(F^{p+1} C)
\end{aligned}$$

бистепеней $|i| = (-1, 1)$, $|j| = (0, 0)$ и $|k| = (1, 0)$, как в диаграмме на предыдущей странице. Спектральная последовательность этой точной пары имеет

$$E_r^{p,q} \simeq \frac{\delta^{-1} \text{im} (i^{r-1} : H^{p+q+1}(F^{p+r} C) \rightarrow H^{p+q+1}(F^p C))}{\pi_* \ker (i^{r-1} : H^{p+q}(F^p C) \rightarrow H^{p+q}(F^{p-r+1} C))}. \quad (4-32)$$

Поскольку связывающий гомоморфизм $\delta : H^{p+q}(F^p C / F^{p+1} C) \rightarrow H^{p+q+1}(F^{p+r} C)$ задаётся дифференциалом $d : C \rightarrow C$, числитель в (4-32) состоит из классов π -образов

элементов $c \in F^p C^{p+q}$ с $dc \in F^{p+r} C^{p+q+1}$ по модулю $\pi dF^p C^{p+q-1}$, т. е. в обозначениях из доказательства [предл. 4.3](#) на стр. 77 равен $\pi Z_r^{p,q}$. Знаменатель в (4-32) состоит из π_* -образов классов когомологий тех коциклов $c \in F^{p+1} C^{p+q+1}$ которые лежат в $dF^{p-r+1} C^{p+q}$, и стало быть, изоморфен $\pi dZ_{r-1}^{p-r+1, q+r-2}$. Таким образом, при каждом $r \geq 1$ таблица E_r спектралки (4-32) состоит из тех же подфакторов в C , что и таблица E_r у спектралки из [предл. 4.3](#). Поскольку дифференциалы обеих таблиц являются ограничениями дифференциала $d : C \rightarrow C$ на эти подфакторы, спектральные последовательности совпадают друг с другом, начиная с таблицы E_1 .

Предложение 4.5

Пусть в представленной на [рис. 4-1](#) биградуированной точной паре при каждом n модули $D^{p,q}$ с $p+q=n$ зануляются при всех $p \gg 0$ и становятся равными одному и тому же модулю H^n при $p \ll 0$, причём при этих p все морфизмы $i : D^{p,q} \rightarrow D^{p-1, q+1}$ между модулями H^n тождественны. Тогда спектральная последовательность такой точной пары сходится к присоединённым градуированным факторам убывающих фильтраций на модулях H^n подмодулями $F^p H^n = i^{m(p,n)}(D^{p, n-p})$, где степень $m(p, n)$ настолько велика, чтобы $i^{m(p,n)}$ отображал $D^{p, n-p}$ в H^n .

Доказательство. Согласно форм. (4-31) на стр. 82 при фиксированных p, q и $r \gg 0$

$$\begin{aligned} E_r^{p,q} &\simeq \frac{k^{-1}(i^{r-1} D^{p+r-1, q-r+1})}{j(\ker(i^{r-1}|_{D^{p,q}}))} \simeq \frac{k^{-1}(0) \cap D^{p,q}}{j \ker(i^{m(p,n)} : D^{p,q} \rightarrow H^n)} \simeq \\ &\simeq \frac{\ker(k : E_r^{p,q} \rightarrow D^{p+1, q})}{j \ker i^{m(p,n)}} \simeq \frac{j D^{p,q}}{j \ker i^{m(p,n)}} \simeq \frac{D^{p,q}}{\ker i^{m(p,n)}} \simeq \text{im } i^{m(p,n)}. \end{aligned}$$

□

4.5. Отмеченные треугольники. Бесконечная в обе стороны 3-периодическая последовательность морфизмов¹ в гомотопической категории комплексов $\mathcal{H}o$

$$\dots \xrightarrow{\beta[-1]} C[-1] \xrightarrow{\gamma[-1]} A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1] \xrightarrow{\alpha[1]} B[1] \xrightarrow{\beta[1]} \dots$$

называется *треугольником* и обозначается $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1]$. Морфизм между треугольниками $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} B_1 \xrightarrow{\beta_1} C_1 \xrightarrow{\gamma_1} A_1[1]$ и $A_2 \xrightarrow{\alpha_2} B_2 \xrightarrow{\beta_2} C_2 \xrightarrow{\gamma_2} A_2[1]$ это такая тройка стрелок $\alpha : A_1 \rightarrow A_2, \beta : B_1 \rightarrow B_2, \gamma : C_1 \rightarrow C_2$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & C_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & A_1[1] \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \alpha[1] \downarrow \\ A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & C_2 & \xrightarrow{\gamma_2} & A_2[1] \end{array}$$

¹Напомним (см. [опр. 4.2](#) на стр. 70), что функтор сдвига $X \mapsto X[1]$ тождественно действует на морфизмах, но комплекс $X[1]$ имеет $d_{X[1]} = -d_X$ и $X[1]^v = X^{v+1}$.

коммутативна в категории $\mathcal{H}o$. Если все вертикальные стрелки являются изоморфизмами в категории $\mathcal{H}o$, то треугольники называются *изоморфными*. Треугольник называется *отмеченным* или *точным*¹, если он изоморфен треугольнику вида

$$U \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\iota_\varphi} \text{Con } \varphi \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1], \quad (4-33)$$

где $\varphi : U \rightarrow W$ — произвольный морфизм комплексов, а стрелки ι_φ и π_φ суть вложение и проекция из построенной в [прим. 4.4](#) на стр. 70 точной в категории Com тройки

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{\iota_\varphi} \text{Con } \varphi \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1] \longrightarrow 0. \quad (4-34)$$

Например, треугольник $X \xrightarrow{\text{Id}} X \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} X[1]$ точен, поскольку согласно [упр. 4.12](#) на стр. 72 диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\text{Id}} & X & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & X[1] \\ \text{Id} \parallel & & \text{Id} \parallel & & 0 \downarrow & & \text{Id} \parallel \\ X & \xrightarrow{\text{Id}} & X & \xrightarrow{\iota_{\text{Id}}} & \text{Con Id} & \xrightarrow{\pi_{\text{Id}}} & X[1] \end{array}$$

коммутативна в категории $\mathcal{H}o$ и нулевая вертикальная стрелка в ней, как мы видели в [прим. 4.5](#) на стр. 72, является в категории $\mathcal{H}o$ изоморфизмом.

Точные треугольники вида (4-33) называются *стандартными*. Каждый морфизм комплексов $\varphi : U \rightarrow W$ включается в стандартный точный треугольник, и любой коммутативный квадрат продолжается до морфизма стандартных треугольников:

$$\begin{array}{ccc} U_1 \xrightarrow{\varphi_1} W_1 & & U_1 \xrightarrow{\varphi_1} W_1 \xrightarrow{\iota_{\varphi_1}} \text{Con } \varphi_1 \xrightarrow{\pi_{\varphi_1}} U_1[1] \\ \downarrow \psi' & \Downarrow & \downarrow \psi' & \downarrow \psi'' & \downarrow \psi'' \oplus \psi'[1] & \downarrow \psi'[1] \\ U_2 \xrightarrow{\varphi_2} W_2 & \Rightarrow & U_2 \xrightarrow{\varphi_2} W_2 \xrightarrow{\iota_{\varphi_2}} \text{Con } \varphi_2 \xrightarrow{\pi_{\varphi_2}} U_2[1]. \end{array}$$

Так как всякий точный треугольник изоморфен стандартному, любой коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 \\ \downarrow \psi' & & \downarrow \psi'' \\ A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & B_2, \end{array}$$

построенный на начальных стрелках любых двух отмеченных треугольников

$$A_1 \xrightarrow{\alpha_1} B_1 \xrightarrow{\beta_1} C_1 \xrightarrow{\gamma_1} A_1[1] \quad \text{и} \quad A_2 \xrightarrow{\alpha_2} B_2 \xrightarrow{\beta_2} C_2 \xrightarrow{\gamma_2} A_2[1],$$

всегда продолжается некоторой стрелкой² $\psi : C_1 \rightarrow C_2$ до морфизма треугольников.

¹Этот термин вовсе не означает, что ядра какой-нибудь стрелки равно образу предыдущей.

²Вообще говоря, не единственной.

Предложение 4.6 (точная последовательность когомологий)

В абелевой категории \mathcal{A} точна бесконечная в обе стороны последовательность когомологий

$$\dots \xrightarrow{\gamma_*} H^i(A) \xrightarrow{\alpha_*} H^i(B) \xrightarrow{\beta_*} H^i(C) \xrightarrow{\gamma_*} H^{i+1}(A) \xrightarrow{\alpha_*} \dots \quad (4-35)$$

каждого точного в гомотопической категории комплексов $\mathcal{H}o(\mathcal{A})$ треугольника

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1].$$

Доказательство. В прим. 4.4 на стр. 70 мы видели, что для стандартного точного треугольника $U \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\iota_\varphi} \text{Con } \varphi \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1]$ последовательность (4-35) представляет собою длинную точную последовательность когомологий для точной в абелевой категории $\text{Com}(\mathcal{A})$ тройки комплексов $0 \longrightarrow W \xrightarrow{\iota_\varphi} \text{Con } \varphi \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1] \longrightarrow 0$. Функтор

$$H^0 : \mathcal{H}o(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}, \quad V \mapsto H^0(V),$$

переводит каждую бесконечную в обе стороны коммутативную в категории $\mathcal{H}o(\mathcal{A})$ диаграмму треугольников

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \xrightarrow{\gamma[-1]} & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \xrightarrow{\gamma} & A[1] & \xrightarrow{\alpha[1]} & \dots \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi' & & \downarrow \psi'' & & \downarrow \psi[1] & & \\ \dots & \xrightarrow{\pi_\varphi[-1]} & U & \xrightarrow{\varphi} & W & \xrightarrow{\iota_\varphi} & \text{Con } \varphi & \xrightarrow{\pi_\varphi} & U[1] & \xrightarrow{\varphi[1]} & \dots, \end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются изоморфизмами в категории $\mathcal{H}o(\mathcal{A})$, в бесконечную в обе стороны коммутативную диаграмму в категории \mathcal{A}

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \xrightarrow{\beta_*} & H^{i-1}(C) & \xrightarrow{\gamma_*} & H^i(A) & \xrightarrow{\alpha_*} & H^i(B) & \xrightarrow{\beta_*} & H^i(C) & \xrightarrow{\gamma_*} & H^{i+1}(A) & \xrightarrow{\alpha_*} & \dots \\ & & \downarrow \psi'' & & \downarrow \psi_* & & \downarrow \psi'_* & & \downarrow \psi''_* & & \downarrow \psi_* & & \\ \dots & \xrightarrow{\iota_{\varphi_*}} & H^{i-1}(\text{Con } \varphi) & \xrightarrow{\pi_{\varphi_*}} & H^i(U) & \xrightarrow{\varphi_*} & H^i(W) & \xrightarrow{\iota_{\varphi_*}} & H^i(\text{Con } \varphi) & \xrightarrow{\pi_{\varphi_*}} & H^{i+1}(U) & \xrightarrow{\varphi_*} & \dots, \end{array}$$

все вертикальные стрелки которой изоморфизмы, а нижняя строка точна. Поэтому и верхняя строка точна. \square

Предложение 4.7

Если треугольник $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1]$ точен, то точны также треугольники

$$B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1] \xrightarrow{-\alpha[1]} B[1] \quad \text{и} \quad C[-1] \xrightarrow{-\gamma[-1]} A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C.$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для стандартного треугольника

(4-33), т. е. построить коммутативные в категории $\mathcal{H}o$ диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} W & \xrightarrow{\iota_\varphi} & \text{Con } \varphi & \xrightarrow{\pi_\varphi} & U[1] & \xrightarrow{-\varphi[1]} & W[1] \\ \parallel & & \parallel & & \uparrow \downarrow \nu'' \nu' & & \parallel \\ W & \xrightarrow{\iota_\varphi} & \text{Con } \varphi & \xrightarrow{\iota_{\text{Con } \varphi}} & \text{Con } \iota_\varphi & \xrightarrow{\pi_{\text{Con } \varphi}} & W[1] \end{array} \quad (4-36)$$

$$\begin{array}{ccccccc} U & \xrightarrow{-\varphi} & W & \xrightarrow{\iota_\varphi} & \text{Con } \varphi[-1] & \xrightarrow{\pi_\varphi} & U[1] \\ \parallel & & \uparrow \downarrow \omega'' \omega' & & \parallel & & \parallel \\ U & \xrightarrow{\iota_{\pi_\varphi[-1]}} & \text{Con } \pi_\varphi[-1] & \xrightarrow{\pi_{\text{Con } \varphi[-1]}} & \text{Con } \varphi & \xrightarrow{\pi_\varphi} & U[1] \end{array} \quad (4-37)$$

на которых стрелки ν' , ν'' , а также стрелки ω' , ω'' являются обратными друг другу изоморфизмами в категории $\mathcal{H}o$. Как градуированные модули,

$$\begin{aligned} \text{Con } \pi_\varphi[-1] &= \text{Con } \varphi \oplus U[-1] = U[1] \oplus W \oplus U \\ \text{Con } \iota_\varphi &= W[1] \oplus \text{Con}(\varphi) = W[1] \oplus U[1] \oplus W, \end{aligned}$$

и при таком разложении их дифференциалы имеют матрицы¹

$$d_{\text{Con } \pi_\varphi[-1]} = \begin{pmatrix} -d_U & 0 & 0 \\ \varphi & d_W & 0 \\ -1_U & 0 & d_U \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad d_{\text{Con } \iota_\varphi} = \begin{pmatrix} -d_W & 0 & 0 \\ 0 & -d_U & 0 \\ 1_W & \varphi & d_W \end{pmatrix}.$$

Таким образом, W является подкомплексом в $\text{Con } \pi_\varphi[-1]$, и $\text{Con } \pi_\varphi[-1]/W \simeq \text{Con}(-\text{Id}_U)$. Симметричным образом, $U[1]$ является фактором комплекса $\text{Con } \iota_\varphi$ по подкомплексу $\text{Con } \text{Id}_W$. Возьмём в качестве искомого ω' и ν'' соответствующие вложение и проекцию из точных в категории $\mathcal{C}om$ троек комплексов

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{\omega'} \text{Con}(\pi_\varphi)[-1] \longrightarrow \text{Con}(-\text{Id}_U) \longrightarrow 0 \quad (4-38)$$

$$0 \longrightarrow \text{Con}(\text{Id}_W) \longrightarrow \text{Con}(\iota_\varphi) \xrightarrow{\nu''} U[1] \longrightarrow 0. \quad (4-39)$$

Идущие в противоположную сторону стрелки зададим так:

$$\begin{aligned} \omega'' : \text{Con } \pi_\varphi[-1] &\rightarrow W, & \begin{pmatrix} u_1 \\ w \\ u \end{pmatrix} &\mapsto w + \varphi u \\ \nu' : U[1] &\rightarrow \text{Con } \iota_\varphi, & u_1 &\mapsto \begin{pmatrix} -\varphi u_1 \\ u_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.22. Убедитесь, что ω'' и ν' являются морфизмами комплексов, причём $\omega''\omega' = \text{Id}_W$, а $\nu''\nu' = \text{Id}_{U[1]}$, и что в категории $\mathcal{C}om$ выполняются равенства

$$\pi_{\text{Con } \varphi} \nu' = -\varphi = \omega'' \iota_{\text{Con } \varphi}, \quad \nu'' \iota_{\text{Con } \varphi} = \pi_\varphi, \quad \pi_{\text{Con } \varphi} \omega' = \iota_\varphi.$$

¹См. формулу (4-16) на стр. 71.

Конусы тождественных морфизмов в точных тройках (4-38) и (4-39) стягиваются гомотопией из прим. 4.5 на стр. 72, а именно — отображениями

$$\begin{aligned} \gamma' : U[1] \oplus W \oplus U &\rightarrow U \oplus W[-1] \oplus U[-1], & \begin{pmatrix} u_1 \\ w \\ u \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma'' : W[1] \oplus U[1] \oplus W &\rightarrow W \oplus U \oplus W[-1], & \begin{pmatrix} w_1 \\ u_1 \\ w \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Первое из них задаёт гомотопическую эквивалентность $\omega' \omega'' + [d_{\text{Con } \pi_\varphi[-1]}, \gamma'] = \text{Id}$:

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} -du_1 \\ \varphi u_1 + dw \\ -u_1 + du \end{pmatrix} & \xrightarrow{\gamma'} & \begin{pmatrix} u_1 - du \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & \\ & \swarrow d_{\text{Con } \pi_\varphi[-1]} & & \searrow & \\ \begin{pmatrix} 0 \\ w + \varphi u \\ 0 \end{pmatrix} & \xleftarrow{\omega'} & w + \varphi u & \xleftarrow{\omega''} & \begin{pmatrix} u_1 \\ w \\ u \end{pmatrix} & \xrightarrow{d_{\text{Con } \pi_\varphi[-1]} \gamma' + \gamma' d_{\text{Con } \pi_\varphi[-1]}} & \begin{pmatrix} u_1 \\ -\varphi u \\ u \end{pmatrix} \\ & & \swarrow \gamma' & & \searrow & & \\ \begin{pmatrix} -u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{d_{\text{Con } \pi_\varphi[-1]}} & \begin{pmatrix} du \\ -\varphi u \\ u \end{pmatrix} & & & & \end{array}$$

второе — гомотопическую эквивалентность $\nu' \nu'' + [d_{\text{Con } \iota_\varphi}, \gamma''] = \text{Id}$:

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} w_1 + \varphi u_1 + dw \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \xleftarrow{\gamma''} & \begin{pmatrix} -dw_1 \\ -du_1 \\ w_1 + \varphi u_1 + dw \end{pmatrix} & & \\ & & \swarrow d_{\text{Con } \iota_\varphi} & & \\ \begin{pmatrix} w_1 + \varphi u_1 \\ 0 \\ w \end{pmatrix} & \xleftarrow{d_{\text{Con } \iota_\varphi} \gamma'' + \gamma'' d_{\text{Con } \iota_\varphi}} & \begin{pmatrix} w_1 \\ u_1 \\ w \end{pmatrix} & \xrightarrow{\nu''} & u_1 & \xrightarrow{\nu'} & \begin{pmatrix} -\varphi u_1 \\ u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & & \swarrow \gamma'' & & \searrow & & \\ \begin{pmatrix} -dw \\ 0 \\ w \end{pmatrix} & \xleftarrow{d_{\text{Con } \iota_\varphi}} & \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & & & \end{array}$$

Таким образом, морфизмы ω' , ω'' , как и морфизмы ν' , ν'' , взаимно обратны в категории $\mathcal{H}o$. Поэтому последняя группа равенств из упр. 4.22 означает коммутативность диаграмм (4-36), (4-37) в категории $\mathcal{H}o$. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8

Для любого комплекса V действующие из категории \mathcal{H}_0 в категорию абелевых групп функторы $h_V : X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{H}_0}(X, V)$ и $h^V : X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{H}_0}(V, X)$ переводят каждый отмеченный треугольник $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1]$ в длинные точные последовательности

$$\begin{aligned} \dots \text{Hom}^{i-1}(A, V) &\xrightarrow{\alpha^*} \text{Hom}^i(C, V) \xrightarrow{\gamma^*} \text{Hom}^i(B, V) \xrightarrow{\beta^*} \text{Hom}^i(A, V) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Hom}^{i+1}(C, V) \dots \\ \dots \text{Hom}^{i-1}(V, C) &\xrightarrow{\gamma_*} \text{Hom}^i(V, A) \xrightarrow{\alpha_*} \text{Hom}^i(V, B) \xrightarrow{\beta_*} \text{Hom}^i(V, C) \xrightarrow{\gamma_*} \text{Hom}^{i+1}(V, A) \dots \end{aligned}$$

где $\text{Hom}^i(U, W) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{H}_0}(U, W[i])$.

Доказательство. В силу [предл. 4.7](#) достаточно проверить только точность композиций $\alpha^* \beta^*$ и $\beta_* \alpha_*$. Мы разберёмся с первой из них, оставив вторую в качестве упражнения. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \xrightarrow{\gamma} & A[1] \\ | & & \downarrow \beta^* \varphi & & \downarrow \varphi & & | \\ 0 & \xrightarrow{0} & V & \xrightarrow{\text{Id}} & V & \xrightarrow{0} & 0, \end{array}$$

которая продолжает средний коммутативный квадрат до морфизма между точными треугольниками $B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1] \xrightarrow{-\alpha[1]} B[1]$ и $V \xrightarrow{\text{Id}} V \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} V[1]$, вытекает, что $\alpha^* \beta^*(\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in h_V(C)$. С другой стороны, каждая $\psi : B \rightarrow V$ из ядра α^* имеет вид $\psi = \beta^*(\varphi)$ для стрелки $\varphi : C \rightarrow V$, которая достраивает левый коммутативный квадрат на диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \xrightarrow{\gamma} & A[1] \\ | & & \downarrow \psi & & \downarrow \varphi & & | \\ 0 & \xrightarrow{0} & V & \xrightarrow{\text{Id}} & V & \xrightarrow{0} & 0, \end{array}$$

до морфизма точных треугольников $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} B[1]$ и $0 \xrightarrow{0} V \xrightarrow{\text{Id}} V \xrightarrow{0} 0$. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.9

Для любых двух точных треугольников $A \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} B \xrightarrow{\varphi} A[1]$ и $C \xrightarrow{\gamma} E \xrightarrow{\delta} D \xrightarrow{\psi} [1]$ общей вершиной E композиции морфизмов $\beta\gamma$ и $\delta\alpha$ тоже включаются в отмеченные треугольники с общей вершиной $F \simeq \text{Con}(\beta\gamma) \simeq \text{Con}(\delta\alpha)$, так что возникает следующая диаграмма, все линии на которой являются начальными частями точных тре-

угольников¹:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & & & & \\
 \delta\alpha \searrow & & & & \\
 & & D & & \\
 \alpha \searrow & & \nearrow \iota_D & & \\
 & & E & & F, \\
 \gamma \nearrow & & \searrow \beta & & \\
 & & B & & \\
 \beta\gamma \nearrow & & & & \\
 C & & & &
 \end{array} \quad (4-40)$$

а из двух заключённых между этими треугольниками квадратов

$$\begin{array}{ccc}
 A \xrightarrow{\alpha} E & & D \xrightarrow{\iota_D} F \\
 \pi_A[-1] \uparrow & & \delta \uparrow \\
 F[-1] \xrightarrow{\pi_C[-1]} C & \text{и} & E \xrightarrow{\beta} B
 \end{array} \quad (4-41)$$

первый антикоммутирует, а второй коммутативен.

Доказательство. Можно считать оба данных треугольника стандартными с $D = \text{Con } \gamma$ и $B = \text{Con } \alpha$, так что в категории Com имеются точные тройки вида (4-34)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\beta} & \text{Con } \alpha & \xrightarrow{\varphi} & A[1] \longrightarrow 0 \\
 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\delta} & \text{Con } \gamma & \xrightarrow{\psi} & C[1] \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Как градуированные модули, $\text{Con}(\delta\alpha) = A[1] \oplus C[1] \oplus E$ и $\text{Con}(\beta\gamma) = C[1] \oplus A[1] \oplus E$, а дифференциалы этих комплексов задаются матрицами

$$d_{\text{Con}(\delta\alpha)} = \begin{pmatrix} -d_A & 0 & 0 \\ 0 & -d_C & 0 \\ \alpha & \gamma & d_E \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad d_{\text{Con}(\beta\gamma)} = \begin{pmatrix} -d_C & 0 & 0 \\ 0 & -d_A & 0 \\ \gamma & \alpha & d_E \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что транспозиция σ_{12} первых двух прямых слагаемых устанавливает изоморфизм между этими комплексами. Положим в диаграмме (4-40) $F \stackrel{\text{def}}{=} \text{Con}(\delta\alpha) = \sigma_{12} \text{Con}(\beta\gamma)$, $\iota_D \stackrel{\text{def}}{=} \iota_{\delta\alpha}$, $\pi_A \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{\delta\alpha}$, $\iota_B \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{12} \iota_{\beta\gamma}$, $\pi_C \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{12} \pi_{\beta\gamma}$, где в правых частях стоят

¹Ср. с упр. 4.1 на стр. 65.

канонические морфизмы из точных в абелевой категории Com троек вида (4-34):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & D = \text{Con } \gamma & & \text{Con } \delta \alpha & & & \\
 & \parallel & & \parallel & & & \\
 0 & \longrightarrow & C[1] \oplus E & \xrightarrow{\iota_D = \iota_{\delta\alpha}} & A[1] \oplus C[1] \oplus E & \xrightarrow{\pi_A = \pi_{\delta\alpha}} & A[1] \longrightarrow 0 \\
 & & & & \parallel & & \\
 & & & & F & & \\
 & & & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & A[1] \oplus E & \xrightarrow{\iota_B} & A[1] \oplus C[1] \oplus E & \xrightarrow{\pi_C} & C[1] \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \sigma_{12} \updownarrow \sigma_{12} & & \nearrow \pi_{\beta\gamma} \\
 & & B = \text{Con } \alpha & & C[1] \oplus A[1] \oplus E = \text{Con } \beta\gamma & &
 \end{array}$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.23. Убедитесь, что второй из квадратов (4-41) коммутативен прямо в категории Com .

В первом квадрате композиции $\alpha\pi_A$ и $\gamma\pi_C$ переводят элемент

$$\begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} \in A \oplus C \oplus E[-1] = F[-1] \tag{4-42}$$

соответственно в $\alpha(a)$ и $\gamma(c)$. Отображение $h : A \oplus C \oplus E[-1] \rightarrow E$ степени -1 , переводящее тот же элемент (4-42) в e , удовлетворяет соотношению $\iota_B \beta = -\iota_D \delta + [d, h]$, поскольку $d_E h$ переводит элемент (4-42) в $d_E e$, а $h d_{F[-1]} = -h d_F$ переводит его в $-\alpha(a) - \gamma(c) - d_E(e)$ (проверьте!). Тем самым, первый квадрат антикоммутативен в категории $\mathcal{H}o$. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. (ДИАГРАММА ОКТАЭДРА) Треугольники из диаграммы (4-40) иногда изображают в виде граней октаэдра, составленного из двух четырёхугольных пирамид¹

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} C[1] & \xleftarrow{\psi} & D \\ & \swarrow -\gamma[1] & \nearrow \delta \\ & E & \\ & \swarrow \beta & \nearrow \alpha \\ B & \xrightarrow{\varphi} & A \end{array} & \text{и} & \begin{array}{ccc} C[1] & \xleftarrow{\psi} & D \\ & \swarrow \pi_C & \nearrow \iota_D \\ & F & \\ & \swarrow \iota_B & \nearrow \pi_A[-1] \\ B & \xrightarrow{\varphi} & A \end{array} \\
 \text{wavy arrows: } -\beta\gamma[1] \text{ on } C[1] \rightarrow B, \text{ and } -\beta\gamma[1] \text{ on } B \rightarrow A & & \text{wavy arrows: } -\beta\gamma[1] \text{ on } C[1] \rightarrow B, \text{ and } -\beta\gamma[1] \text{ on } B \rightarrow A
 \end{array} \tag{4-43}$$

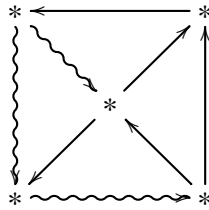
где волнистая стрелка $X \rightsquigarrow Y$ означает морфизм $X \rightarrow Y[1]$, все треугольники, имеющие ровно одну волнистую сторону отмечены, а все остальные треугольники коммутативны². Верхний точный треугольник $E \xrightarrow{\delta} D \xrightarrow{\psi} [1] \xrightarrow{-\gamma[1]} E[1]$ левой пирамиды

¹ Диаграммы (4-43) показывают вид на эти пирамиды сверху, так что E и F являются противоположными вершинами октаэдра, а лежащий в основании пирамид квадрат $ABCD$ служит для октаэдра экватором.

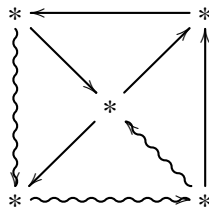
² Так что точные и коммутативные треугольники располагаются на октаэдре в шахматном порядке.

является «повёрнутой» в соответствии с [предл. 4.7](#) на стр. 85 версией треугольника $C \xrightarrow{\gamma} E \xrightarrow{\delta} D \xrightarrow{\psi} [1]$ с диаграммы (4-40), что приводит к изменению знака стрелки γ и делает оба квадрата с противоположными вершинами в E и F коммутативными, в отличие от (4-40), где содержащий стрелку γ квадрат был антикоммутативен.

В терминах октаэдра (4-43) предыдущее [предл. 4.9](#) переформулируется следующим образом: если задана диаграмма коммутативных и отмеченных треугольников, имеющая вид четырёхугольной пирамиды (мы смотрим на неё сверху)



то она всегда достраивается до октаэдра второй четырёхугольной пирамидой вида



с тем же основанием так, что оба квадрата с противоположными вершинами в вершинах этих пирамид будут коммутативны.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 4.1. Пусть стрелка α ведёт в объект C , а β — из C . Поскольку $\beta\alpha = 0$, вложение $\alpha' : \text{im } \alpha \hookrightarrow C$ и сюръекция $\beta' : C \twoheadrightarrow \text{im } \beta$ пропускаются, соответственно, через $\ker \beta$ и $\text{coker } \alpha$ при помощи единственных стрелок ι и π :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{coker } \kappa = \text{im } \beta & & \\
 & & \uparrow \beta' & \swarrow \pi & \\
 \text{ker } \zeta = \text{im } \alpha & \xrightarrow{\alpha'} & C & \xrightarrow{\zeta} & \text{coker } \alpha \\
 & \searrow \iota & \downarrow \kappa & & \\
 & & \text{ker } \beta & &
 \end{array} \tag{6-16}$$

Покажем, что ι является ядром, а π — коядром композиции $\zeta\kappa : \text{ker } \beta \rightarrow \text{coker } \alpha$. Тогда ι автоматически будет инъективен, π — сюръективен, а $\text{coker } \iota = \text{coim}(\zeta\kappa)$ будет канонически изоморфен $\text{im}(\zeta\kappa) = \text{ker } \pi$ в силу абелевости объёмлющей категории. Во-первых, $\zeta\iota = \zeta\alpha' = 0$. Во-вторых, если $\zeta\kappa\eta = 0$ для некоторого $\eta : X \rightarrow \text{ker } \beta$, то существует единственный такой $\eta' : X \rightarrow \text{ker } \zeta = \text{im } \alpha$, что $\kappa\eta = \alpha'\eta' = \kappa\eta'$. В силу инъективности κ , это равносильно $\eta = \eta'$. Рассуждение про π полностью симметрично.

Упр. 4.2. Пусть симплекс x имеет вершины $0, 1, \dots, n$, упорядоченные по возрастанию.

Цепь $\partial^2 x = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i(0, 1, \dots, n)$ является суммой $(n-2)$ -мерных симплексов вида

$$0, 1, \dots, \hat{\mu}, \dots, \hat{\nu}, \dots, n,$$

где $\mu < \nu$ и крышки означают пропуск μ -той и ν -той вершины. Каждый такой симплекс появляется в сумме ровно два раза: как $\partial_\mu \partial_\nu x$ и как $\partial_{\nu-1} \partial_\mu x$, и эти вхождения имеют противоположные знаки.

Упр. 4.3. В обозначениях с рис. 1♦1 на стр. 8 модуль $C_2 \simeq \mathbb{Z}^2$ имеет базис f_1, f_2 , модуль $C_1 \simeq \mathbb{Z}^3$ имеет базис e_1, e_2, e_3 , модуль $C_0 \simeq \mathbb{Z}$ имеет базис e , а граничный оператор действует на симплексы триангуляции по формулам¹

$$\begin{aligned}
 \partial(f_1) &= e_1 - e_3 + e_2 & \partial(f_2) &= e_2 - e_3 + e_1 \\
 \partial(e_1) &= \partial(e_2) = \partial(e_3) = v - v = 0 \\
 \partial(v) &= 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, комплекс имеет вид $0 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$, где стрелка $\mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ нулевая, а стрелка $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Поэтому $H_2 \simeq \mathbb{Z}$ с базисом $f_1 - f_2$,

$H_1 \simeq \mathbb{Z}^2$ с базисом e_1, e_2 , $H_0 \simeq \mathbb{Z}$ с базисом v .

Упр. 4.6. $\varphi(\xi)$ является коциклом, поскольку $d_W \varphi \xi = \varphi d_V \xi = 0$. Класс $\varphi(\xi + d_V \zeta) = \varphi(\xi) + d_W(\varphi(\zeta))$ по модулю кограниц совпадает с классом $\varphi(\xi)$.

¹См. формулу (1-7) на стр. 8.

Упр. 4.10. Пусть $\psi : U \rightarrow V$ и $d_V \psi = \psi d_U$. Тогда для $\varphi = \delta_W \gamma + \gamma d_V$ имеем $\varphi \psi = \delta_W \gamma \psi + \gamma d_V \psi = \delta_W \gamma \psi + \gamma \psi d_U$.

Упр. 4.11. Если A стягиваем, то единственные отображения $\iota : 0 \rightarrow A$ и $\pi : A \rightarrow 0$ являются взаимно обратными изоморфизмами в категории $\mathcal{H}o$, т. к. $\pi \iota = \text{Id}_0$, а $\iota \pi = 0 \sim \text{Id}_A$.

Упр. 4.12. Первое проверяется прямой выкладкой:

$$\begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d_V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & d_V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Id}_{\text{Con}(\text{Id}_V)}.$$

Аналогично проверяется, что ${}^1 \iota_{\text{Id}} = [d, \gamma']$ для $\gamma' : v \mapsto \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$, а $\pi_{\text{Id}} = [d, \gamma'']$ для

$$\gamma'' : \begin{pmatrix} v_1 \\ v \end{pmatrix} \mapsto v_1.$$

Упр. 4.13. Базисный моном $\xi_I \otimes x^M = \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_m^{m_m}$ переводится дифференциалом d в

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i \in I} m_i \right) \cdot \xi_I \otimes x^M + \\ & + \sum_{j \notin I} \sum_{v=1}^k (-1)^{v-1} m_{i_v} \cdot \xi_j \wedge \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\xi_{i_v}} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{m_1} \dots x_{i_v}^{m_{i_v}-1} \dots x_j^{m_j+1} \dots x_n^{m_n}, \end{aligned}$$

а дифференциалом $d\partial$ — в

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j \notin I} (m_j + 1) \right) \cdot \xi_I \otimes x^M + \\ & + \sum_{j \notin I} \sum_{v=1}^k (-1)^v m_{i_v} \cdot \xi_j \wedge \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\xi_{i_v}} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{m_1} \dots x_{i_v}^{m_{i_v}-1} \dots x_j^{m_j+1} \dots x_n^{m_n}. \end{aligned}$$

где «крышка» означает пропуск стоящего под нею сомножителя.

Упр. 4.16. Выберем в $V \otimes V$ и $V^* \otimes V^*$ двойственные базисы ξ_ν и ξ_ν^* так, чтобы ξ_ν с $\nu \in N$ составляли базис в подпространстве $I \subset V \otimes V$, а ξ_μ^* с $\mu \notin N$ — базис в $I^\perp \subset V^* \otimes V^*$. Поскольку $\kappa = \sum_i x_i \otimes e_i$, где x_i и e_i суть двойственные базисы в V^* и в V , его квадрат

$$\kappa^2 = - \sum_{ij} (x_i \otimes x_j) \otimes (e_i \otimes e_j) \pmod{I^\perp \otimes (V \otimes V) + (V^* \otimes V^*) \otimes I}$$

является классом (по модулю соотношений в алгебре $B \otimes A$) эндоморфизма

$$-\text{Id}_{V \otimes V} \in (V^* \otimes V^*) \otimes (V \otimes V) \simeq \text{End}(V \otimes V),$$

который в двойственных базисах ξ_ν и ξ_ν^* в $V \otimes V$ и $V^* \otimes V^*$ тоже запишется как

$$\kappa^2 = - \sum_{\alpha} \xi_\alpha^* \otimes \xi_\alpha = - \sum_{\nu \in N} \xi_\nu^* \otimes \xi_\nu - \sum_{\mu \notin N} \xi_\mu^* \otimes \xi_\mu \in I^\perp \otimes (V \otimes V) + (V^* \otimes V^*) \otimes I.$$

¹Напомним, что $\iota_{\text{Id}} : v \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$, а $\pi_{\text{Id}} : \begin{pmatrix} v_1 \\ v \end{pmatrix} \mapsto v_1$.

Упр. 4.21. Корректность $j_1: j(x)$ коцикл, т.к. $dj(x) = jk_j(x) = 0$; если $i(x') = i(x_2)$, то $x_2 = x' + k(y)$, и $j(x_2) = j(x') + dy$ когомологичен $j(x')$. Корректность $k_1: k(d(E)) \subset kj(D) = 0$. Равенство нулю композиций ik_1 , j_1i и k_1j_1 вытекает из равенства нулю композиций ik , ji и kj . Если $i(i(x)) = 0$, то $i(x) = k(y)$, причём $d(y) = jk(y) = j(i(x)) = 0$, т.е. $\ker(i) \subset k_1(H(E))$. Если $j_1(i(x)) \in d(E)$, т.е. $j(x) = jk(y)$, то $x = k(y) + i(x')$ и $i(x) = i^2(x')$, т.е. $\ker j_1 \subset i^2(D)$. Если $k_1(y) = k(y) = 0$, то $y = j(x) = j_1(i(x))$, т.е. $\ker(k_1) \subset j_1(i(D))$.

Упр. 4.23. Обе композиции $\iota_B\beta$ и $\iota_D\delta$ переводят элемент $e \in E$ в элемент

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{pmatrix} \in A[1] \oplus C[1] \oplus E = F.$$