

А. Л. ГОРОДЕНЦЕВ*

ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРИЮ КАТЕГОРИЙ
И ГОМОЛОГИЧЕСКУЮ АЛГЕБРУ

Это записки лекций, которые я читаю на факультете математики НИУ ВШЭ в осеннем семестре 2018 / 19 учебного года. Упражнения, встречающиеся в тексте существенны для его понимания и обычно используются в дальнейшем. Некоторые из них снабжены указаниями в конце книги.

Москва, 2018

* e-mail: gorod@itep.ru, <http://gorod.bogomolov-lab.ru/>

Оглавление

Оглавление	2
§1 Категории и функторы	3
1.1 Категории	3
1.2 Функторы	6
1.3 Естественные преобразования	11
1.4 Представимые функторы	14
§2 Сопряжённые функторы и (ко)пределы	18
2.1 Сопряжённые функторы	18
2.2 Тензорные произведения и Hom	20
2.3 Пределы диаграмм	23
2.4 Функториальность (ко) пределов	30
§3 Абелевы категории и пучки	34
3.1 Линейные категории	34
3.2 Абелевы категории	38
3.3 Проективные и инъективные объекты.	42
3.4 (Ко)порождающие объекты	43
3.5 Категории модулей	45
Ответы и указания к некоторым упражнениям	48

§1. Категории и функторы

1.1. Категории. Категория \mathcal{C} — это класс¹ объектов, обозначаемый $\text{Ob } \mathcal{C}$, в котором для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ задано множество морфизмов

$$\text{Hom}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Морфизмы из X в Y удобно представлять себе в виде стрелок $\varphi : X \rightarrow Y$. Для разных пар объектов эти множества стрелок не пересекаются. Объединение всех стрелок категории \mathcal{C} обозначается $\text{Mor } \mathcal{C} = \bigsqcup_{X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ и тоже является классом, а не множеством. Для каждой тройки объектов $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ имеется отображение композиции² $\text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$, $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \circ \psi (= \varphi\psi)$, ассоциативное в том смысле, что $(\chi \circ \varphi) \circ \psi = \chi \circ (\varphi \circ \psi)$ всякий раз, когда эти композиции определены. Наконец, у каждого объекта $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ есть *тождественный морфизм* $\text{Id}_X \in \text{Hom}(X, X)$, который для любых стрелок $\varphi : X \rightarrow Y$ и $\psi : Z \rightarrow X$ удовлетворяет условиям³ $\varphi \circ \text{Id}_X = \varphi$ и $\text{Id}_X \circ \psi = \psi$. Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ — это категория, все объекты, стрелки и композиции которой наследуются из \mathcal{C} . Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ называется *полной*, если $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ для любых $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$. Категория \mathcal{C} называется *малой*, если $\text{Ob } \mathcal{C}$ это множество, а не больший класс. В этом случае $\text{Mor } \mathcal{C}$ тоже является множеством.

ПРИМЕР 1.1 (КАТЕГОРИИ, НЕ ЯВЛЯЮЩИЕСЯ МАЛЫМИ)

Часто возникающие в примерах категории, *не являющиеся малыми* — это категория $\mathcal{S}et$ всех множеств и всех отображений, категория $\mathcal{T}op$ топологических пространств и непрерывных отображений, категория $\mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$ векторных пространств над полем \mathbb{k} и \mathbb{k} -линейных отображений и её полная подкатегория $\mathit{vec}_{\mathbb{k}}$ конечномерных пространств, категории $R\text{-Mod}$ и $\text{Mod-}R$ левых и правых модулей над кольцом R и R -линейных отображений и их полные подкатегории $R\text{-mod}$ и $\text{mod-}R$ конечно представимых⁴ модулей, категория $\mathcal{A}b = \mathbb{Z}\text{-Mod}$ абелевых групп и их гомоморфизмов, категория $\mathcal{G}rp$ всех групп и групповых гомоморфизмов, категория $\mathcal{C}mr$ коммутативных колец с единицей и гомоморфизмов, переводящих единицу в единицу, и т. п.

ПРИМЕР 1.2 (ЧУМЫ И ТОПОЛОГИИ)

Каждое частично упорядоченное множество M это малая категория, объекты которой суть элементы $m \in M$, стрелки суть неравенства:

$$\text{Hom}_M(n, m) = \begin{cases} \text{одноэлементное множество, когда } n \leq m, \\ \emptyset \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

¹Не хотелось бы вдаваться в точную формализацию этого термина (содержательную в той же мере, как формализация арифметики и теории множеств, изучаемые в стандартном курсе математической логики). Для наших нужд достаточно, что такая формализация существует и позволяет говорить, например, о «категории множеств», объекты которой, по понятным причинам, множества не образуют.

²Знак композиции « \circ », как и знак умножения, принято опускать, когда ясно, о чём речь.

³Выкладка $\text{Id}' = \text{Id}' \circ \text{Id}'' = \text{Id}''$ показывает, что тождественный морфизм единствен.

⁴Модуль называется *конечно представимым*, если он изоморфен фактору свободного модуля конечного ранга по конечно порождённому подмодулю.

а композиция стрелок $k \leq \ell$ и $\ell \leq n$ это стрелка $k \leq n$. Таким образом, наличие композиции и тождественных морфизмов обеспечиваются транзитивностью и рефлексивностью частичного порядка. Кососимметричность частичного порядка означает, что при $m \neq n$ как минимум одно из множеств $\text{Hom}(m, n)$, $\text{Hom}(n, m)$ пусто.

Важным примером категории-чума является категория $\mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств топологического пространства X , стрелками в которой являются включения:

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}(X)}(U, W) = \begin{cases} \text{вложение } U \hookrightarrow W, \text{ если } U \subseteq W \\ \text{пустое множество, когда } U \not\subseteq W. \end{cases}$$

ПРИМЕР 1.3 (МАЛЫЕ КАТЕГОРИИ И АССОЦИАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ)

Всякую ассоциативную алгебру¹ A с единицей $e \in A$ можно рассматривать как малую категорию с одним объектом e и множеством стрелок $\text{Hom}(e, e) = A$, композиция на котором задаётся умножением в этой алгебре. Наоборот, со всякой малой категорией \mathcal{C} и коммутативным кольцом K можно связать алгебру стрелок $K[\mathcal{C}]$, состоящую из формальных конечных линейных комбинаций стрелок категории \mathcal{C} с коэффициентами в K . Условимся для заданного множества M обозначать через $K \otimes M$ свободный K -модуль с базисом M , образованный всеми конечными формальными линейными комбинациями элементов множества M с коэффициентами из K . Тогда

$$K[\mathcal{C}] \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}} K \otimes \text{Hom}(X, Y) = \left\{ \sum x_i \varphi_i \mid x_i \in K, \varphi_i \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \right\}.$$

Умножение стрелок в алгебре $K[\mathcal{C}]$ определяется их композицией в категории \mathcal{C}

$$\varphi \psi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi \circ \psi & \text{если конец } \psi \text{ совпадает с началом } \varphi \\ 0 & \text{во всех прочих случаях} \end{cases}$$

и по дистрибутивности распространяется на произвольные конечные линейные комбинации стрелок. Алгебру $K[\mathcal{C}]$ можно представлять себе как алгебру финитных квадратных матриц², строки и столбцы которых занумерованы объектами категории, и в каждой клетке (Y, X) стоят элементы из своего K -модуля $K \otimes \text{Hom}(X, Y)$. Эта алгебра, вообще говоря, некоммутативна и без единицы, однако, для всякого $f \in K[\mathcal{C}]$ существует идемпотент $e_f = e_f^2$ со свойствами $e_f \circ f = f \circ e_f = f$. В качестве такого можно взять сумму тождественных эндоморфизмов Id_X всех объектов X , служащих началами или концами стрелок, линейной комбинацией которых является стрелка f .

1.1.1. Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы. Стрелка φ в категории \mathcal{C} называется *мономорфизмом*³ (соотв. *эпиморфизмом*⁴), если на неё можно сокращать слева (соотв. справа), т. е. когда $\varphi \alpha = \varphi \beta \Rightarrow \alpha = \beta$ (соотв. $\alpha \varphi = \beta \varphi \Rightarrow \alpha = \beta$). По умолчанию мы используем стрелки \hookrightarrow для обозначения мономорфизмов, и стрелки \twoheadrightarrow для эпиморфизмов. Стрелка $\varphi : X \rightarrow Y$ называется *изоморфизмом* (или *обратимой стрелкой*) и обозначается $\xrightarrow{\sim}$, если существует такая стрелка $\psi : Y \rightarrow X$, что

¹Более общим образом — любой ассоциативный моноид (полугруппу с единицей).

²Возможно, бесконечного размера, но с конечным числом ненулевых элементов.

³А также *вложением* или *инъективным морфизмом*.

⁴А также *наложением* или *сюръективным морфизмом*.

$\varphi\psi = \text{Id}_Y$ и $\psi\varphi = \text{Id}_X$. В этой ситуации объекты X и Y называются *изоморфными*, а морфизмы φ и ψ — *обратными* друг к другу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 (ПОДОБЪЕКТЫ И ФАКТОР ОБЪЕКТЫ)

Класс эквивалентности инъективной стрелки с концом в X по модулю её умножения справа на обратимые стрелки называется *подобъектом* объекта X , а класс эквивалентности сюръективной стрелки с началом в X по модулю левого умножения на обратимые стрелки — *фактор объектом* объекта X . Категория называется *умеренно мощной*¹, если подобъекты любого её объекта образуют множество. Все категории из прим. 1.3 умеренно мощны.

УПРАЖНЕНИЕ 1.1 (ЧАСТИЧНЫЙ ПОРЯДОК НА ПОД- И ФАКТОР ОБЪЕКТАХ). Проверьте, что отношение $\varphi \subseteq \psi$, означающее, что существует такая стрелка ξ , что $\varphi = \psi\xi$, задаёт частичный порядок на множестве подобъектов, а отношение $\varphi \supseteq \psi$, означающее наличие такой стрелки ξ , что $\varphi = \xi\psi$, задаёт частичный порядок на множестве фактор объектов.

ПРИМЕР 1.4 (КОНЕЧНЫЕ УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И КОМБИНАТОРНЫЕ СИМПЛЕКСЫ)

Обозначим через Δ_{big} категорию, объектами которой являются конечные упорядоченные множества X , а морфизмами — сохраняющие порядок² отображения. Категория Δ_{big} не является малой³, но содержит полную малую подкатеорию $\Delta \subset \Delta_{\text{big}}$, объектами которой являются конечные подмножества в \mathbb{Z} вида

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \dots, n\}, \quad n \geq 0, \quad (1-1)$$

со стандартным порядком. Множество (1-1) называется *n -мерным комбинаторным симплексом*, а категория Δ — *симплициальной категорией*. Для любого $X \in \text{Ob } \Delta_{\text{big}}$ имеется *единственный* изоморфизм $n_X : X \simeq [n]$ с *единственным* $[n] \in \text{Ob } \Delta$, а именно нумерация элементов X в порядке возрастания.

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Сколько всего стрелок в множестве $\text{Hom}_\Delta([n], [m])$? Сколько среди них инъективных? Сколько сюръективных? Покажите, что алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\Delta]$, как абстрактная ассоциативная алгебра, порождается стрелками

$$e_n = \text{Id}_{[n]} \quad (\text{тождественное отображение}) \quad (1-2)$$

$$\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n] \quad (\text{вложение, образ которого не содержит } i) \quad (1-3)$$

$$s_n^{(i)} : [n] \rightarrow [n-1] \quad (\text{наложение, склеивающее } i \text{ с } (i+1)) \quad (1-4)$$

и опишите образующие идеала соотношений между этими стрелками.

¹По-английски: *well powered*.

²Т. е. такие отображения $\varphi : X \rightarrow Y$, что $x_1 \leq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$.

³По упомянутым выше логическим причинам, см. сноску на стр. 3.

1.1.2. Обращение стрелок. С каждой категорией \mathcal{C} связана *противоположная* категория \mathcal{C}^{opp} с теми же объектами, но с обращённым направлением всех стрелок:

$$\text{Ob } \mathcal{C}^{\text{opp}} = \text{Ob } \mathcal{C}, \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{opp}}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X), \quad \varphi^{\text{opp}} \circ \psi^{\text{opp}} = (\psi \circ \varphi)^{\text{opp}}.$$

На языке алгебр такое обращение стрелок означает переход от алгебры $\mathcal{C} = K[\mathcal{C}]$ к противоположной алгебре \mathcal{C}^{opp} из тех же элементов, но с происходящим в противоположном порядке умножением. Мономорфизмы и подобъекты категории \mathcal{C} являются эпиморфизмами и фактор объектами категории \mathcal{C}^{opp} и наоборот.

1.2. Функторы. Функтор¹ $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ из категории \mathcal{C} в категорию \mathcal{D} это отображение $\text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{D}$, $X \mapsto F(X)$, и набор таких отображений²

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), \quad \varphi \mapsto F(\varphi), \quad (1-5)$$

что $F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$ для всех $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ и $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ всякий раз, когда композиция $\varphi \circ \psi$ определена. На языке ассоциативных алгебр, каждый функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ задаёт *гомоморфизм* алгебр стрелок $F : K[\mathcal{C}] \rightarrow K[\mathcal{D}]$. Если все отображения (1-5) сюръективны, функтор F называется *полным*³. Образ такого функтора является полной подкатегорией. Если все отображения (1-5) инъективны, функтор F называется *строгим*⁴. Такой функтор задаёт вложение алгебр стрелок. Полные строгие функторы иначе называются *вполне строгими*.

Простейшие функторы — это *тождественный функтор* $\text{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, тождественно действующий на объектах и морфизмах, и *забывающие функторы*, действующие из какой-либо категории множеств с дополнительной структурой⁵, морфизмы в которой суть сохраняющие эту структуру отображения множеств, в категорию *Set* всех множеств — такие функторы просто забывают о структуре. Забывающий функтор не строг, если имеются различные морфизмы структур, одинаково действующие на подлежащих множествах, и не полон, если не всякое отображение множеств сохраняет рассматриваемую структуру.

ПРИМЕР 1.5 (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КОМБИНАТОРНЫХ СИМПЛЕКСОВ)

Зададим функтор $\Delta \rightarrow \text{Top}$ из категории комбинаторных симплексов в категорию топологических пространств, сопоставляя n -мерному комбинаторному симплексу $[n]$ стандартный n -мерный симплекс⁶

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_\nu = 1, x_\nu \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad (1-6)$$

а стрелке $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ — единственное аффинное отображение $\varphi_* : \Delta^n \rightarrow \Delta^m$, действующее на базисные векторы по правилу $e_\nu \mapsto e_{\varphi(\nu)}$. Это строгий, но не полный

¹Иногда вместо «функтор» говорят *ковариантный функтор*.

²По одному отображению для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$.

³По-английски: *full*.

⁴По-английски: *faithful*.

⁵Например, геометрической — такой, как топология или структура гладкого многообразия, или алгебраической — такой, как структура группы, кольца или модуля.

⁶Т. е. выпуклую оболочку концов стандартных базисных векторов e_0, e_1, \dots, e_n в \mathbb{R}^{n+1} .

функтор. Образующие элементы (1-3) и (1-4) алгебры стрелок категории Δ переводятся этим функтором, соответственно, во вложение i -той грани $\Delta^{(n-1)} \hookrightarrow \Delta^n$ и в вырождение вдоль i -того ребра¹ $\Delta^n \rightarrow \Delta^{(n-1)}$.

1.2.1. Предпучки. Функтор $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{D}$ называется *контравариантным функтором* из \mathcal{C} в \mathcal{D} или *предпучком*² объектов категории \mathcal{D} на категории \mathcal{C} . Такой функтор оборачивает композицию: $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ и на языке ассоциативных алгебр является *антигомоморфизмом* алгебр стрелок.

ПРИМЕР 1.6 (ТРИАНГУЛИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА)

Обозначим через $\Delta_s \subset \Delta$ неполную подкатегорию, объектами которой тоже являются комбинаторные симплексы, $\text{Ob } \Delta_s = \text{Ob } \Delta$, но в качестве морфизмов допускаются только *строго возрастающие*³ отображения. Категория Δ_s называется *полусимплициальной категорией*.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3. Убедитесь, что алгебра стрелок $K[\Delta_s]$ порождается тождественными стрелками $e_n = \text{Id}_{[n]}$ и отображениями вложения граней $\partial_n^{(i)}$ из (1-3).

Предпучок множеств $X : \Delta_s^{\text{opp}} \rightarrow \text{Set}$ на полусимплициальной категории Δ_s называется *полусимплициальным множеством* и является ни чем иным, как комбинаторным описанием *триангулированного топологического пространства* $|X|$, которое называется *геометрической реализацией* полусимплициального множества X . В самом деле, функтор X задаёт для каждого целого неотрицательного n множество $X_n = X([n])$, точки которого следует воспринимать как дизъюнктивный набор n -мерных симплексов (1-6), из коих будет склеиваться пространство $|X|$. Стрелки $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ в категории Δ_s биективно соответствуют n -мерным граням m -мерного симплекса Δ^m , и отображение $X(\varphi) : X_m \rightarrow X_n$, которое функтор X сопоставляет стрелке φ , задаёт *правило склейки*: оно указывает данному m -мерному симплексу $x \in X_m$, какой именно n -мерный симплекс $X(\varphi)x \in X_n$ надлежит приклеить к нему в качестве φ -той n -мерной грани.

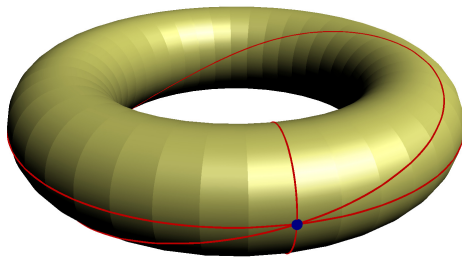


Рис. 1♦1. Триангуляция тора.

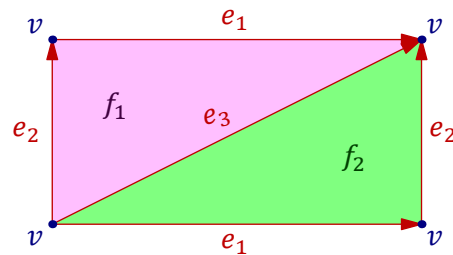


Рис. 1♦2. Симплексы триангуляции.

Так, на рис. 1♦1 показана стандартная триангуляция двумерного тора, склеенного из прямоугольника, изображённого на рис. 1♦2. Эта триангуляция состоит из одного 0-мерного симплекса, в который склеятся все вершины прямоугольника, трёх 1-

¹Т. е. в проекцию симплекса на грань вдоль ребра, соединяющего i -тую вершину с $(i + 1)$ -й.

²Термин «предпучок» употребляется чаще в ситуациях, когда категория \mathcal{C} мала.

³Т. е. сохраняющие порядок и инъективные.

мерных симплексов, в которые склеятся, соответственно, две горизонтальных стороны, две вертикальных стороны, и диагональ прямоугольника, а также пары 2-мерных симплексов, на которые прямоугольник разрезается диагональю. Направления стрелок на рис. 1◊2 соответствуют неравенствам между вершинами симплексов. Вертикальные рёбра e_2 с рис. 1◊2 изображаются на рис. 1◊1 меридианом тора, а горизонтальные рёбра e_1 — экватором тора. Соответствующее полусимплициальное множество X имеет $X_0 = \{v\}$, $X_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $X_2 = \{f_1, f_2\}$, и $X_i = \emptyset$ для всех $i \geq 3$, а отображения склейки $X(\varphi)$ действуют по правилам

$$\begin{aligned} X(\partial_1^0) = X(\partial_1^1) : X_1 &\rightarrow X_0, & e_i &\mapsto v \text{ для всех } i = 1, 2, 3 \\ X(\partial_2^0) : X_2 &\rightarrow X_1, & f_1 &\mapsto e_1, f_2 \mapsto e_2, \\ X(\partial_2^1) : X_2 &\rightarrow X_1, & f_1 &\mapsto e_3, f_2 \mapsto e_3, \\ X(\partial_2^2) : X_2 &\rightarrow X_1, & f_1 &\mapsto e_2, f_2 \mapsto e_1. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.4. Существует ли триангуляция окружности S^1 а) тремя 0-мерными и тремя 1-мерными симплексами¹ б) одним 0-мерным и одним 1-мерным симплексом? Существует ли триангуляция двумерной сферы S^2 в) четырьмя 0-мерными, шестью 1-мерными и четырьмя 2-мерными симплексами г) двумя 0-мерными, одним 1-мерным и одним 2-мерным симплексом? Если да, задайте все отображения $X(\varphi)$ явно, если нет, объясните почему.

ПРИМЕР 1.7 (симплициальные множества)

Предпучок множеств $X : \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \text{Set}$ на всей симплициальной категории называется *симплициальным множеством*. Из симплициального множества X также можно изготовить топологическое пространство $|X|$, склеив стандартные правильные симплексы Δ_x^n , биективно сопоставленные точкам $x \in X_n$, согласно отображениям

$$\varphi^* \stackrel{\text{def}}{=} X(\varphi) : X_m \rightarrow X_n,$$

предусмотренным функтором X для всех неубывающих отображений $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ категории Δ . А именно, для каждого $x \in X_m$ надо приклеить каждую точку s симплекса $\Delta_{\varphi^*(x)}^n$, отвечающего элементу $\varphi^*(x) \in X_n$, к точке $\varphi_*(s)$ симплекса Δ_x^m , отвечающего элементу $x \in X_m$, где через $\varphi_* : \Delta^n \rightarrow \Delta^m$ обозначено аффинное отображение, переводящее вершины симплекса Δ^n в вершины симплекса Δ^m посредством морфизма φ . Результат такой склейки формально описывается как фактор пространство дизъюнктного объединения² $\bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n$ по наименьшему отношению эквивалентности,

содержащему отождествления $(\varphi^*x, s) \simeq (x, \varphi_*s)$ для всех точек $x \in X_m$, $s \in \Delta^n$ и стрелок $\varphi : [n] \rightarrow [m]$.

Если стрелка $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ является композицией наложения $\sigma : [n] \rightarrow [k]$ и вложения $\delta : [k] \hookrightarrow [m]$, то каждый n -мерный симплекс Δ_x^n , лежащий в образе φ^* и

¹Т. е. можно ли получить окружность в качестве геометрической реализации полусимплициального множества X , у которого X_0 и X_1 состоят из трёх элементов, а все остальные X_i пусты.

²В котором множества X_n рассматриваются с дискретной, а симплексы $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ со стандартной топологией объемлющего вещественного аффинного пространства.

помеченный точкой $z = \sigma^* y = \sigma^* \delta^* x$, вклеится в пространство $|X|$ в виде k -мерного симплекса $\Delta_y^k = \sigma_* \Delta_z^n$, полученного из Δ_z^n аффинно линейной проекцией $\sigma_* : \Delta^n \rightarrow \Delta^k$. При этом он окажется δ -той k -мерной гранью m -мерного симплекса Δ_x^m . Таким образом, каждый симплекс $z \in X_n$, лежащий в образе отображения σ^* , отвечающего какой-нибудь стрелке $\sigma : [n] \rightarrow [k]$ с $k < n$, виден в итоговом пространстве $|X|$ как симплекс меньшей, чем n размерности. Такие симплексы называются *вырожденными*. Их использование позволяет описывать более общие клеточные структуры, чем стандартные триангуляции. Однако платой за это является громоздкость такого описания: для любого функтора $X : \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ каждое из множеств X_n обязано быть непустым.

Например, n -мерная сфера S^n гомеоморфна топологическому фактору стандартного n -мерного симплекса по его границе¹ $S^n \simeq \Delta^n / \partial \Delta^n$. Этот гомеоморфизм задаёт на сфере S^n клеточную структуру, состоящую из одной 0-нульмерной вершины, в которую склеится граница симплекса, и одной n -мерной клетки, в которую превратится весь симплекс. Она описывается предпучком $X : \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$, у которого при всех k множество $X_k = X([k])$ получается из множества $\text{Hom}_\Delta([k], [n])$ отождествлением всех неэпиморфных отображений в один элемент, а правило склейки $\varphi^* : X_m \rightarrow X_k$, отвечающее неубывающему отображению $\varphi : [k] \rightarrow [m]$, переводит класс стрелки $\zeta : [m] \rightarrow [n]$ в класс стрелки $\zeta \varphi : [k] \rightarrow [n]$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.5. Убедитесь, что это описание корректно задаёт предпучок X с метрической реализацией $|X| \simeq S^n$, и найдите количество элементов в каждом множестве X_k , $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

ПРИМЕР 1.8 (ПРЕДПУЧКИ И ПУЧКИ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ)

Исторически, термин «предпучок» впервые возник в контексте категории $\mathcal{C} = \mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств $U \subset X$ заданного топологического пространства X . Предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{D}$ сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset X$ объект $F(U) \in \text{Ob } \mathcal{D}$, который называется *сечениями* предпучка F над U . В зависимости от категории \mathcal{D} сечения могут образовывать множество, кольцо, алгебру, векторное или топологическое пространство и т. п. Морфизм $F(W) \rightarrow F(U)$, отвечающий включению $U \subset W$, называется *ограничением сечений*, определённых над W , на подмножество U , а результат его применения к сечению $s \in F(W)$ обозначается через $s|_U$. Вот несколько типичных примеров таких предпучков:

- 1) предпучок Γ_E локальных сечений непрерывного отображения $p : E \rightarrow X$ имеет в качестве $\Gamma_E(U)$ множество таких непрерывных отображений $s : U \rightarrow E$, что² $p \circ s = \text{Id}_U$, а его отображения ограничения — это обычные ограничения сечений с большего подмножества на меньшее
- 2) беря в предыдущем примере в качестве отображения проекцию $p : X \times Y \rightarrow X$, получаем предпучок локальных непрерывных отображений $\mathcal{C}^0(X, Y)$ пространства X в пространство Y , имеющий в качестве сечений над $U \subset X$ непрерывные отображения $s : U \rightarrow Y$

¹Т. е. склеивании всех точек границы в одну. Например, двумерная сфера S^2 получается таким способом из треугольника.

²Это требование означает, что каждая точка $x \in U$ отображается в слой $p^{-1}(x)$ над ней.

- 3) дальнейшими специализациями являются так называемые *структурные предпучки* \mathcal{O}_X : предпучок дифференцируемых функций $X \rightarrow \mathbb{R}$ на гладком вещественном многообразии X , предпучок локальных голоморфных функций $X \rightarrow \mathbb{C}$ на комплексно аналитическом многообразии X , предпучок локальных рациональных функций $X \rightarrow \mathbb{k}$ на алгебраическом многообразии X над полем \mathbb{k} и т. п. (все они являются предпучками алгебр над соответствующим полем)
- 4) постоянный предпучок S имеет в качестве $S(U)$ одно и то же фиксированное множество S для всех $U \subset X$, и все его отображения ограничения — тождественные морфизмы Id_S .

Предпучок F называется *пучком*, если для любого семейства открытых подмножеств U_i и любого набора таких локальных сечений $s_i \in F(U_i)$, что $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ при всех i, j , существует единственное такое сечение $s \in F(\bigcup_i U_i)$, что $s|_{U_i} = s_i$ при всех i . В случае, когда имеется не более одного такого сечения (но может не быть и ни одного), предпучок F называется *отделимым*. Все предпучки (1) – (4) отделимы, и только последний из них — постоянный предпучок — не является пучком, поскольку для покрытия дизъюнктного объединения $W = U_1 \sqcup U_2$ множествами U_1, U_2 не всякая пара констант $s_i \in S(U_i)$ является ограничением одной константы $s \in S(W)$. Тем не менее наряду с постоянным предпучком в природе имеется и

- 5) постоянный пучок S^\sim , у которого $S^\sim(U)$ это *непрерывные* отображения $U \rightarrow S$ в множество S , рассматриваемое с *дискретной* топологией, или — что то же самое — *локально* постоянные функции со значениями в S .

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Опишите множество первообразных действительной функции $1/x$.

1.2.2. Функторы Hom . С каждым объектом $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ любой категории \mathcal{C} связаны функтор $h^X : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$, который переводит объект Y в множество морфизмов

$$h^X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}(X, Y),$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ в отображение $\varphi_* : \text{Hom}(X, Y_1) \rightarrow \text{Hom}(X, Y_2)$, $\psi \mapsto \varphi \circ \psi$, левого умножения на эту стрелку, а также предпучок $h_X : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$, который переводит объект Y в множество морфизмов

$$h_X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}(Y, X),$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ в отображение $\varphi^* : \text{Hom}(Y_2, X) \rightarrow \text{Hom}(Y_1, X)$, $\psi \mapsto \psi \circ \varphi$, правого умножения на эту стрелку.

Например, предпучок $h_{[n]} : \Delta_S \rightarrow \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории Δ_S задаёт стандартную триангуляцию стандартного n -мерного симплекса: множество её k -мерных симплексов $h_{[n]}([k]) = \text{Hom}([k], [n])$ это в точности множество всех k -мерных граней. Предпучок $h_U : \mathcal{U}(X) \rightarrow \mathcal{S}et$ на топологическом пространстве X имеет ровно одно сечение над всеми $W \subseteq U$ и пустое множество сечений над любым $W \not\subseteq U$. Вот ещё несколько примеров.

ПРИМЕР 1.9 (двойственность в категории векторных пространств)

Предпучок $h_{\mathbb{k}}: \mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$ сопоставляет векторному пространству V двойственное векторное пространство $h_{\mathbb{k}}(V) = \text{Hom}(V, \mathbb{k}) = V^*$, а линейному отображению $\varphi: V \rightarrow W$ — двойственное отображение $\varphi^*: W^* \rightarrow V^*$, переводящее линейную форму $\xi: W \rightarrow \mathbb{k}$ в линейную форму $\xi \circ \varphi: V \rightarrow \mathbb{k}$.

ПРИМЕР 1.10 (двойственность конечных упорядоченных множеств)

Это комбинаторная версия предыдущего примера. Обозначим через ∇_{big} категорию конечных упорядоченных множеств из не менее двух элементов, морфизмами в которой являются неубывающие отображения, переводящие минимальный элемент в минимальный, а максимальный — в максимальный¹. Тавтологическое включение $\nabla_{\text{big}} \hookrightarrow \Delta_{\text{big}}$ является строгим, но не полным функтором. Предпучки

$$h_{[1]}: \Delta_{\text{big}}^{\text{opp}} \rightarrow \nabla_{\text{big}} \quad \text{и} \quad h_{[1]}: \nabla_{\text{big}}^{\text{opp}} \rightarrow \Delta_{\text{big}}$$

переводят упорядоченные множества $X \in \text{Ob } \Delta_{\text{big}}$ и $Y \in \text{Ob } \nabla_{\text{big}}$ в множества

$$X^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\Delta_{\text{big}}}(X, [1]) \quad \text{и} \quad Y^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\nabla_{\text{big}}}(Y, [1]),$$

порядок на которых задаётся поточечным сравнением значений:

$$\varphi \leq \psi, \quad \text{если } \varphi(x) \leq \psi(x) \text{ для всех } x.$$

Стрелка $\varphi: Z_1 \rightarrow Z_2$ переводится обоими функторами в морфизм правого умножения $\varphi^*: \text{Hom}(Z_2, [1]) \rightarrow \text{Hom}(Z_1, [1])$, $\xi \mapsto \xi \circ \varphi$.

Иначе можно сказать, что множество Z^* это множество «дедекиндовых сечений» множества Z , т. е. множество таких разбиений $Z = Z_0 \sqcup Z_1$, что $z_0 < z_1$ для всех $z_0 \in Z_0$, $z_1 \in Z_1$, и оба множества Z_i должны быть непусты, когда $Z \in \text{Ob } \nabla_{\text{big}}$, или одно из них может быть пусто, когда $Z \in \text{Ob } \Delta_{\text{big}}$. Обратите внимание, что сечения ведут себя контравариантно по отношению к морфизмам: при наличии неубывающего отображения $Z_1 \rightarrow Z_2$ разбиение второго множества Z_2 индуцирует разбиение на Z_1 , но не наоборот.

1.3. Естественные преобразования. Для пары функторов $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ естественным (или функториальным) преобразованием F в G называется такое занумерованное объектами $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ семейство стрелок $f_X: F(X) \rightarrow G(X)$ в категории \mathcal{D} , что для любой стрелки $\varphi: X \rightarrow Y$ из \mathcal{C} возникающая в категории \mathcal{D} диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(Y) \\ f_X \downarrow & & \downarrow f_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(\varphi)} & G(Y) \end{array} \quad (1-7)$$

коммукативна. На языке алгебр, гомоморфизм $F: K[\mathcal{C}] \rightarrow K[\mathcal{D}]$ наделяет алгебру $K[\mathcal{D}]$ структурой модуля над алгеброй $K[\mathcal{C}]$, в которой умножение элемента $b \in K[\mathcal{D}]$ на элемент $a \in K[\mathcal{C}]$ определяется правилом $a \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} F(a) \cdot b$. Пара функторов F, G

¹Отметим, что минимальный и максимальный элементы различны.

задаёт на алгебре $K[\mathcal{D}]$ две различных структуры $K[\mathcal{C}]$ -модуля, и естественное преобразование $f : F \rightarrow G$ это $K[\mathcal{C}]$ -линейный гомоморфизм между этими модулями, переводящий стрелку ψ с концом в $F(X)$ в стрелку $f_X \circ \psi$ с концом в $G(X)$, а стрелки, не заканчивающиеся в объектах вида $F(X)$, — в нуль.

УПРАЖНЕНИЕ 1.7. Убедитесь, что $K[\mathcal{C}]$ -линейность такого гомоморфизма действительно означает, что для любого $\varphi \in K[\mathcal{C}]$ действие на $K[\mathcal{D}]$ операторов $F(\varphi)$ и $G(\varphi)$ удовлетворяет соотношению $f \circ F(\varphi) = G(\varphi) \circ f$.

ПРИМЕР 1.11 (КАТЕГОРИЯ ФУНКТОРОВ)

Функторы из малой категории \mathcal{C} в произвольную категорию \mathcal{D} образуют категорию $\mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, объектами которой являются функторы $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, а морфизмами — естественные преобразования $f : F \rightarrow G$. Для малой категории \mathcal{C} мы будем обозначать категорию предпучков $\mathcal{F}un(\mathcal{C}^{opp}, \mathcal{D})$ через $pSh(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Опущенная буква \mathcal{D} в этой записи по умолчанию означает, что $\mathcal{D} = \mathcal{S}et$, т. е. $pSh(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}un(\mathcal{C}^{opp}, \mathcal{S}et)$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.8. Проверьте, что описанное в н° 1.2.2 сопоставление $X \mapsto h_X$ задаёт функтор $\mathcal{C} \rightarrow pSh(\mathcal{C})$, а сопоставление $X \mapsto h^X$ — предпучок $\mathcal{C}^{opp} \rightarrow \mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{S}et)$.

Предпучки на категории $\mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств топологического пространства X обычно называются просто предпучками на X . Они образуют категорию, обозначаемую $pSh(X)$. Морфизм предпучков $f : F \rightarrow G$ на X задаётся набором согласованных с ограничениями отображений между множествами сечений $f_U : F(U) \rightarrow G(U)$, по одному отображению для каждого открытого $U \subset X$. Согласованность с ограничениями означает, что $f_W(s)|_U = f_U(s|_U)$ для любой пары вложенных открытых множеств $U \subset W$ и любого сечения $s \in F(W)$. Пучки и отделимые предпучки¹ на X составляют полные подкатегории $Sh(X)$ и $spSh(X)$ в категории всех предпучков $pSh(X)$.

1.3.1. Эквивалентности категорий. Категории \mathcal{C} и \mathcal{D} называются *эквивалентными*, если между ними есть такие функторы $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, что композиция GF естественно изоморфна тождественному функтору $\text{Id}_{\mathcal{C}}$, а композиция FG естественно изоморфна $\text{Id}_{\mathcal{D}}$, т. е. имеются естественные по $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ и $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ преобразования

$$GF(X) \simeq X \quad \text{и} \quad FG(Y) \simeq Y, \quad (1-8)$$

являющиеся для всех X и Y изоморфизмами в категориях \mathcal{C} и \mathcal{D} соответственно. Такие функторы F и G называются *квазиобратными* друг другу *эквивалентностями категорий*. Подчеркнём, что наличие изоморфизмов (1-8) не означает равенств $FG = \text{Id}_{\mathcal{D}}$ или $GF = \text{Id}_{\mathcal{C}}$: объекты $GF(X)$ и X могут быть различны, как и объекты $FG(Y)$ и Y .

ПРИМЕР 1.12 (ВЫБОР БАЗИСА)

Зафиксируем поле \mathbb{k} и обозначим через vec категорию конечномерных векторных пространств над \mathbb{k} , а через $crd \subset vec$ — её полную малую подкатеорию со счётным множеством объектов, коими являются *координатные* пространства \mathbb{k}^n , где $n \geq 0$ и $\mathbb{k}^0 = \{0\}$. Зафиксируем в каждом пространстве $V \in \text{Ob } vec$ какой-нибудь базис, т. е. выберем для каждого $V \in \text{Ob } vec$ изоморфизм²

$$f_V : V \simeq \mathbb{k}^{\dim(V)}, \quad (1-9)$$

¹См. прим. 1.8 на стр. 9.

²Переводящий выбранный базис в стандартный базис пространства \mathbb{k}^n .

причём для всех координатных пространств положим $f_{\mathbb{k}^n} = \text{Id}_{\mathbb{k}^n}$. Рассмотрим функтор $F : \text{vec} \rightarrow \text{crd}$, переводящий векторное пространство V в координатное пространство $\mathbb{k}^{\dim V}$, а стрелку $\varphi : V \rightarrow W$ — в стрелку $F(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}$, которую можно воспринимать как матрицу оператора φ в выбранных базисах пространств V и W . Покажем, что F является эквивалентностью категорий, квазиобратной к тавтологическому вложению $G : \text{crd} \hookrightarrow \text{vec}$. По построению мы имеем точное равенство¹ $FG = \text{Id}_{\text{crd}}$. Противоположная композиция $GF : \text{vec} \rightarrow \text{vec}$ принимает значения в несопоставимой с vec по мощности малой подкатегории $\text{crd} \subset \text{vec}$. Однако изоморфизмы (1-9) задают естественное преобразование из Id_{vec} в GF , т. к. в силу определения действия функтора F на стрелки все диаграммы (1-7) коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}_{\text{vec}}(V) = V & \xrightarrow{\varphi = \text{Id}_{\text{vec}}(\varphi)} & W = \text{Id}_{\text{vec}}(W) \\ f_V \downarrow & & \downarrow f_W \\ GF(V) = \mathbb{k}^{\dim V} & \xrightarrow{GF(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}} & \mathbb{k}^{\dim W} = GF(W). \end{array}$$

Тем самым, тождественный функтор Id_{vec} естественно изоморфен композиции GF .

УПРАЖНЕНИЕ 1.9. Покажите, что категория Δ_{big} канонически эквивалентна симплициальной подкатегории $\Delta \subset \Delta_{\text{big}}$ (см. прим. 1.4 на стр. 5).

ЛЕММА 1.1

Функтор $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ тогда и только тогда задаёт эквивалентность категорий, когда он вполне строг² и каждый объект $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ изоморфен объекту вида $G(X)$ для некоторого (зависящего от Y) объекта³ $X = X(Y) \in \text{Ob } \mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть для каждого $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ указаны $X = X(Y) \in \text{Ob } \mathcal{C}$ и изоморфизм $f_Y : Y \simeq G(X)$, причём когда $Y = G(X)$, мы положим $f_{G(X)} = \text{Id}_{G(X)}$. Зададим функтор $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ на объектах правилом $F(Y) = X(Y)$, а для стрелки $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ положим $F(\varphi)$ равным такой стрелке⁴ $\psi : X(Y_1) \rightarrow X(Y_2)$, что $G(\psi) = f_{Y_2} \circ \varphi \circ f_{Y_1}^{-1}$. Тогда $FG = \text{Id}_{\mathcal{C}}$ и для любой стрелки $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}_{\mathcal{D}}(Y_1) = Y_1 & \xrightarrow{\varphi} & Y_2 = \text{Id}_{\mathcal{D}}(Y_2) \\ f_{Y_1} \downarrow & & \downarrow f_{Y_2} \\ GF(Y_1) = X_1 & \xrightarrow{GF(\varphi) = G(\psi)} & X_2 = GF(Y_2). \end{array}$$

Таким образом, $f_Y : Y \simeq G(X) = GF(Y)$ задают естественный изоморфизм тождественного функтора $\text{Id}_{\mathcal{D}}$ с композицией GF . \square

УПРАЖНЕНИЕ 1.10. Покажите, что функторы дуализации из прим. 1.9 и прим. 1.10 являются квазиобратными самим себе антиэквивалентностями категорий.

¹А не просто изоморфизм функторов.

²Т. е. все отображения $G : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(Y))$ являются изоморфизмами.

³Функторы G , обладающие этим свойством, называются по существу сюръективными (по-английски: *essentially surjective*).

⁴Поскольку $G : \text{Hom}(X_1, X_2) \simeq \text{Hom}(G(X_1), G(X_2))$ является изоморфизмом, стрелка ψ существует и единственна.

1.4. Представимые функторы. Предпучок $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$, естественно изоморфный предпучку $h_X : Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ для некоторого $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, называется *представимым*, и объект X в этом случае называют *представляющим* предпучок F . Двойственным образом, ковариантный функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ называется *копредставимым*, если он естественно изоморфен функтору $h^X : Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ для некоторого объекта X , который в этом случае называется *копредставляющим* функтор F .

УПРАЖНЕНИЕ 1.11. Убедитесь, что тензорное произведение конечномерных векторных пространств $U \otimes V$ копредставляет функтор $\mathcal{V}ec \rightarrow \mathcal{S}et$, сопоставляющий векторному пространству W множество билинейных отображений $U \times V \rightarrow W$.

Множество $X_n = X([n])$ всех n -мерных симплексов триангулированного топологического пространства $X : \Delta_s^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ можно описать как множество всех *симплициальных* отображений $\Delta^n \rightarrow X$ из стандартным образом триангулированного n -мерного симплекса $\Delta^n = h_{[n]}$ в триангулированное пространство X , т. е. как множество естественных преобразований $\text{Hom}_{pSh(\Delta_s)}(h_{[n]}, X)$. Прямым обобщением этого наблюдения является

ЛЕММА 1.2 (ЛЕММА ИОНЕДЫ 1)

Для любого предпучка множеств $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ на произвольной категории \mathcal{C} имеется функториальная по $F \in pSh(\mathcal{C})$ и по $A \in \mathcal{C}$ биекция $F(A) \simeq \text{Hom}_{pSh(\mathcal{C})}(h_A, F)$, переводящая элемент $a \in F(A)$ в естественное преобразование

$$f_X : \text{Hom}(X, A) \rightarrow F(X), \quad (1-10)$$

которое посылает стрелку $\varphi : X \rightarrow A$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \rightarrow F(X)$ на элементе a . Обратная биекция сопоставляет каждому естественному преобразованию (1-10) значение отображения $f_A : h_A(A) \rightarrow F(A)$ на элементе $\text{Id}_A \in h_A(A)$.

Доказательство. Для любого естественного преобразования (1-10), любого объекта $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ и любой стрелки $\varphi : X \rightarrow A$ мы имеем коммутативную диаграмму (1-7)

$$\begin{array}{ccc} h_A(A) = \text{Hom}(A, A) & \xrightarrow{h_A(\varphi)} & \text{Hom}(X, A) = h_A(X) \\ f_A \downarrow & & \downarrow f_X \\ F(A) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(X), \end{array} \quad (1-11)$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ , так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)(f_A(\text{Id}_A))$. Это означает, что естественное преобразование $f : h_A \rightarrow F$ однозначно восстанавливается по элементу $a = f_A(\text{Id}_A) \in F(A)$. Каждому элементу $a \in F(A)$ при этом отвечает преобразование (1-10), переводящее $\varphi \in \text{Hom}(X, A)$ в $f_X(\varphi) = F(\varphi)(a) \in F(X)$, естественное, поскольку для любой стрелки $\psi : Y \rightarrow X$ и всех $\varphi \in h_A(X)$ имеем $f_Y(h_A(\psi)\varphi) = f_Y(\varphi\psi) = F(\varphi\psi)a = F(\psi)F(\varphi)a = F(\psi)(f_X(\varphi))$, т. е. $f_Y \circ h_A(\psi) = F(\psi) \circ f_X$ как отображения $h_A(X) \rightarrow F(Y)$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 1.12 (ЛЕММА ИОНЕДЫ 2). Для ковариантного функтора $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ постройте функториальную по F и $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ биекцию $F(A) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{S}et)}(h^A, F)$.

Следствие 1.1

Функторы $X \mapsto h_X$ и $X \mapsto h^X$ задают вполне строгие ковариантное и контравариантное вложения категории \mathcal{C} в категории предпучков и ковариантных функторов соответственно. Иными словами, имеются функториальные по $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ изоморфизмы $\text{Hom}_{\text{pSh}(\mathcal{C})}(h_A, h_B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ и $\text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{C})}(h^A, h^B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

Доказательство. Применяем леммы Йонеды к функторам $F = h_B$ и $F = h^B$. \square

Следствие 1.2

Если объект $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$, копредставляющий функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ (соотв. представляющий предпучок $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Set}$) существует, то он единствен с точностью до канонического изоморфизма.

Доказательство. Если имеются два таких объекта A, B , что $h^A \simeq F \simeq h^B$ (соотв. $h_A \simeq F \simeq h_B$), то беря подходящую композицию этих естественных изоморфизмов, мы получаем естественный изоморфизм $h^B \simeq h^A$ (соотв. $h_A \simeq h_B$), которому по лемме Йонеды отвечает естественный по A и B изоморфизм $A \simeq B$. \square

1.4.1. Описание объектов универсальными свойствами. При помощи [сл. 1.2](#) можно пытаться переносить в произвольную категорию \mathcal{C} естественные¹ операции над множествами, имеющиеся в категории Set . А именно, будем называть результатом применения такой операции к набору объектов $X_i \in \text{Ob } \mathcal{C}$ представляющий объект X предпучка $\mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Set}$, переводящего каждый объект $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ в результат применения этой операции к множествам $\text{Hom}(Y, X_i)$ в категории Set . Разумеется, такое неявное описание не даёт никаких гарантий существования определяемого объекта, т. к. рассматриваемый функтор может оказаться непредставимым. Однако, если он представим, то представляющий объект X , во-первых, автоматически обладает некоторыми «универсальными свойствами», а во-вторых, единствен с точностью до *единственного* изоморфизма, сохраняющего эти свойства. Вдобавок, у каждой такого рода конструкции есть двойственная версия, получающаяся из предыдущей обращением стрелок и объявляющая результатом теоретико-множественной операции над объектами $X_i \in \text{Ob } \mathcal{C}$ копредставляющий объект ковариантного функтора $\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$, переводящего $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ в результат применения операции к множествам $\text{Hom}(X_i, Y)$.

Пример 1.13 (произведение $A \times B$)

Определим *произведение* $A \times B$ объектов $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ произвольной категории \mathcal{C} как объект, представляющий предпучок $\mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Set}$, $Y \mapsto \text{Hom}(Y, A) \times \text{Hom}(Y, B)$. Если произведение существует, то имеется функториальный по Y изоморфизм

$$\beta_Y : \text{Hom}(Y, A \times B) \simeq \text{Hom}(Y, A) \times \text{Hom}(Y, B).$$

Полагая в нём $Y = A \times B$, получаем пару стрелок

$$A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B, \quad (1-12)$$

¹Т. е. функториальные по всем участвующим множествам.

изображающих элемент $\beta_{A \times B}(\text{Id}_{A \times B}) \in \text{Hom}(A \times B, A) \times \text{Hom}(A \times B, B)$. Пара стрелок (1-12) универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок

$$A \xleftarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} B, \quad (\varphi, \psi) \in \text{Hom}(Y, A) \times \text{Hom}(Y, B), \quad (1-13)$$

существует единственная стрелка $\varphi \times \psi : Y \rightarrow A \times B$, такая что $\beta_Y(\varphi \times \psi) = (\varphi, \psi)$. Коммутативная диаграмма¹

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(A \times B, A \times B) & \xrightarrow{h_{A \times B}(\varphi \times \psi)} & \text{Hom}(Y, A \times B) \\ \beta_{A \times B} \downarrow & & \downarrow \beta_Y \\ \text{Hom}(A \times B, A) \times \text{Hom}(A \times B, B) & \xrightarrow{h_A(\varphi \times \psi) \times h_B(\varphi \times \psi)} & \text{Hom}(Y, A) \times \text{Hom}(Y, B), \end{array}$$

верхняя горизонтальная стрелка которой переводит $\text{Id}_{A \times B}$ в $\varphi \times \psi$, а композиция нижней и левой стрелок действуют на $\text{Id}_{A \times B}$ как

$$\text{Id}_{A \times B} \xrightarrow{\beta_{A \times B}} (\pi_A, \pi_B) \xrightarrow{h_A(\varphi \times \psi) \times h_B(\varphi \times \psi)} (\pi_A \circ (\varphi \times \psi), \pi_B \circ (\varphi \times \psi)),$$

показывает, что равенство $\beta_Y(\varphi \times \psi) = (\varphi, \psi)$ равносильно равенствам $\varphi = \pi_A \circ (\varphi \times \psi)$ и $\psi = \pi_B \circ (\varphi \times \psi)$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.13. Пусть диаграмма $A \xleftarrow{\pi'_A} C \xrightarrow{\pi'_B} B$ тоже универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок (1-13) существует единственная такая стрелка $Y \rightarrow C$, композиции которой с π'_A и π'_B равны φ и ψ соответственно. Убедитесь, что существует единственный изоморфизм $\gamma : C \simeq A \times B$, такой что $\pi_A \circ \gamma = \pi'_A$ и $\pi_B \circ \gamma = \pi'_B$. Покажите также, что любая пара стрелок

$$\alpha : A_1 \rightarrow A_2, \quad \beta : B_1 \rightarrow B_2$$

задаёт единственный морфизм $\alpha \times \beta : A_1 \times B_1 \rightarrow A_2 \times B_2$, такой что $\alpha \circ \pi_A = (\alpha \times \beta) \circ \alpha$ и $\beta \circ \pi_B = (\alpha \times \beta) \circ \beta$.

В категории множеств произведение $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Снабжённое слабой топологией, в которой π_A и π_B непрерывны, это множество задаёт произведение и в категории топологических пространств. Снабжённое покомпонентными операциями, оно же является произведением групп, колец и модулей над кольцами.

ПРИМЕР 1.14 (копроизведение $A \otimes B$)

Двойственным образом, копроизведение $A \otimes B$ объектов $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ произвольной категории \mathcal{C} определяется как объект, копредставляющий ковариантный функтор

$$Y \mapsto \text{Hom}(A, Y) \times \text{Hom}(B, Y)$$

из \mathcal{C} в $\mathcal{S}et$. Обращая все стрелки в предыдущем примере, мы можем охарактеризовать копроизведение как объект, включающийся в диаграмму

$$A \xrightarrow{l_A} A \otimes B \xleftarrow{l_B} B,$$

¹Ср. с использованной в доказательстве леммы Йонеды диаграммой из форм. (1-11) на стр. 14

универсальную в том смысле, что для любой пары стрелок в \mathcal{C}

$$A \xrightarrow{\varphi} Y \xleftarrow{\psi} B$$

имеется единственный морфизм $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \rightarrow Y$, такой что $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_A$ и $\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_B$.

Упражнение 1.14. Убедитесь, что если такая универсальная диаграмма существует, то она единственна с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со стрелками ι_A, ι_B , и что любая пара стрелок $\alpha : A_1 \rightarrow A_2, \beta : B_1 \rightarrow B_2$ задаёт единственный такой морфизм $\alpha \otimes \beta : A_1 \otimes B_1 \rightarrow A_2 \otimes B_2$, что $\iota_A \circ \alpha = (\alpha \otimes \beta) \circ \alpha$.

Копроизведение в категории множеств и топологических пространств это дизъюнктное объединение $A \otimes B = A \sqcup B$. В категории групп это свободное произведение групп¹ $A \otimes B = A * B$. В категории модулей над кольцом² копроизведение совпадает с произведением и равно прямой сумме модулей $A \otimes B = A \times B = A \oplus B$. В категории коммутативных колец с единицей копроизведение $A \otimes B$ это тензорное произведение колец³.

Пример 1.15 (свободные модули)

Обозначим через $R\text{-Mod}$ категорию левых модулей над фиксированным кольцом R . Для любого множества $E \in \text{Ob } \mathcal{S}et$ ковариантный функтор

$$R\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{S}et, \quad M \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M),$$

копредставим свободным R -модулем с базисом E . Мы будем обозначать такой свободный модуль через $R \otimes E$. По определению, он состоит из формальных линейных комбинаций $\sum_{e \in E} x_e e$ элементов множества E с коэффициентами $x_e \in R$, лишь конечное число из которых отлично от нуля.

Упражнение 1.15. Установите функториальный по M и E изоморфизм

$$\text{Hom}_{R\text{-Mod}}(R \otimes E, M) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M). \quad (1-14)$$

¹Т. е. фактор свободной группы, порождённой дизъюнктным объединением $A \sqcup B$, по наименьшей нормальной подгруппе соотношений, позволяющих заменять пару соседних лежащих в одной группе букв их произведением. К примеру, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \mathbb{F}_2$ это свободная (некоммутативная) группа с двумя образующими.

²В частности, в категории $\mathcal{A}b$ абелевых групп.

³Т. е. тензорное произведение подлежащих абелевых групп, как модулей над \mathbb{Z} , с покомпонентным умножением: $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$.

§2. Сопряжённые функторы и (ко)пределы

2.1. Сопряжённые функторы. Функторы $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ между категориями \mathcal{C} и \mathcal{D} называются, соответственно, *левым* и *правым сопряжёнными* друг другу, если имеется функториальная по $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ и $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ биекция

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)). \quad (2-1)$$

С каждой парой сопряжённых функторов связаны естественные преобразования

$$t : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad s : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F. \quad (2-2)$$

Стрелка $t_Y : FG(Y) \rightarrow Y$, задающая действие преобразования t над $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$, является образом элемента $\text{Id}_{G(Y)}$ при изоморфизме (2-1), написанном для $X = G(Y)$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \ni \text{Id}_{G(Y)}.$$

Двойственным образом, стрелка $s_X : X \rightarrow GF(X)$ получается из $\text{Id}_{F(X)}$ при изоморфизме (2-1), написанном для $Y = F(X)$:

$$\text{Id}_{F(X)} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X)).$$

ПРИМЕР 2.1 (ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМ. 1.15 ПРО СВОБОДНЫЕ МОДУЛИ)
Изоморфизм из форм. (1-14) на стр. 17 означает, что функтор

$$F : \text{Set} \rightarrow R\text{-Mod}, \quad E \mapsto R \otimes E,$$

сопоставляющий произвольному множеству E свободный левый R -модуль с базисом E , сопряжён слева к забывающему функтору $G : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Set}$, переводящему модуль в множество его элементов, т. е. $\text{Hom}_{R\text{-Mod}}(R \otimes E, M) \simeq \text{Hom}_{\text{Set}}(E, G(M))$ функториально по модулю M и множеству E . Естественное преобразование

$$s_E : E \hookrightarrow G(R \otimes E)$$

вкладывает E в качестве множества базисных векторов в множество всех векторов свободного модуля $R \otimes E$. Естественное преобразование

$$t_M : R \otimes G(M) \twoheadrightarrow M$$

это R -линейный эпиморфизм огромного свободного модуля, базисом которого служит множество всех векторов модуля M , на модуль M . Он переводит каждый базисный вектор t в элемент $t \in M$, а формальную линейную комбинацию базисных векторов — в результат её вычисления внутри модуля M . Так, при $M = R = \mathbb{R}$ векторное пространство $\mathbb{R} \otimes G(\mathbb{R})$ состоит из формальных линейных комбинаций $\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot x$, в которых лишь конечное множество коэффициентов $f(x)$ отлично от нуля. Оно изоморфно пространству всех функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с конечным носителем, и преобразование $t_{\mathbb{R}}$ сопоставляет такой функции f вещественное число $\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot x$.

Предложение 2.1

Для существования левого сопряжённого функтора $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ к данному функтору $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ функтор

$$h_G^X : \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}, \quad Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)), \quad (2-3)$$

был копредставим, и в этом случае $F(X)$ является его копредставляющим объектом.

Доказательство. Необходимость очевидна из определений. Докажем достаточность. Пусть для каждого $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ функтор (2-3) представляется объектом $F(X)$, т. е. имеется естественный изоморфизм функторов $f^X : h^{F(X)} \simeq h_G^X$. Чтобы продолжить соответствие $X \mapsto F(X)$ до функтора $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ заметим, что морфизм $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ задаёт естественное преобразование $\varphi^* : h_G^{X_2} \rightarrow h_G^{X_1}$ заключающееся в правом умножении на φ : стрелка $\psi : X_2 \rightarrow G(Y)$ переходит в $\psi\varphi : X_1 \rightarrow G(Y)$. Из леммы Ионеды вытекает¹, что композиция естественных преобразований $(f^{X_1})^{-1} \circ \varphi^* \circ f^{X_2} : h^{F(X_2)} \rightarrow h^{F(X_1)}$ задаётся правым умножением на единственную стрелку $F(X_1) \rightarrow F(X_2)$, которую мы и объявим образом $F(\varphi)$ стрелки φ под действием функтора F . Прямо по построению мы получаем функториальный по X изоморфизм $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. \square

Упражнение 2.1. Докажите двойственное утверждение: для существования правого сопряжённого функтора G к функтору $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ был предствим предпучок $h_Y^G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$, переводящий $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ в $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$, и $G(X)$ в этом случае его и представляет.

Предложение 2.2

Функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ тогда и только тогда сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, когда существуют такие естественные преобразования $t : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ и $s : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$, что композиции $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ и $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$ являются тождественными эндоморфизмами функторов F и G .

Доказательство. Если имеются функториальные по X и Y изоморфизмы

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\varrho} & \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \\ & \xleftarrow{\lambda} & \end{array} \quad (2-4)$$

то для любой стрелки $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ в \mathcal{C} и любого Y из \mathcal{D} коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_1), Y) & \xleftarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, G(Y)) \\ \uparrow F(\varphi)^* & & \uparrow \varphi^* \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_2), Y) & \xleftarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, G(Y)) \end{array}$$

вертикальные стрелки которой задаются правым умножением на $F(\varphi)$ и на φ соответственно. Рисуя это для $Y = F(X)$ и морфизма $\varphi = s_X : X \rightarrow GF(X)$, который задаёт

¹См. сл. 1.1 на стр. 15.

действие над объектом X естественного преобразования $s : \text{Id}_C \rightarrow GF$ из форм. (2-2) на стр. 18, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) & \xleftarrow{\sim \lambda} & \text{Hom}_C(X, GF(X)) \\ \uparrow F(s_X)^* & & \uparrow s_X^* \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGF(X), F(X)) & \xleftarrow{\sim \lambda} & \text{Hom}_C(GF(X), GF(X)) \end{array}$$

верхняя стрелка λ которой переводит s_X в $\text{Id}_{F(X)}$, а нижняя стрелка λ переводит $\text{Id}_{GF(X)}$ в морфизм $t_{F(X)} : FGF(X) \rightarrow F(X)$, задающий действие второго естественного преобразования $t : FG \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ из формулы (2-2) над объектом $F(X)$. Таким образом,

$$\text{Id}_{F(X)} = \lambda(s_X) = \lambda s_X^*(\text{Id}_{GF(X)}) = F(s_X)^* \lambda(\text{Id}_{GF(X)}) = F(s_X)^*(t_{F(X)}) = t_{F(X)} \circ F(s_X),$$

а это и значит, что композиция $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ задаёт тождественное преобразование функтора F . Проверка того, что $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$ совпадает с Id_G полностью симметрична. Наоборот, если имеются преобразования $s : \text{Id}_C \rightarrow GF$ и $t : FG \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$, зададим в (2-4) действие λ и ϱ на стрелки $\varphi : F(X) \rightarrow Y$ и $\psi : X \rightarrow G(Y)$ правилами:

$$\varrho(\varphi) = G(\varphi) \circ s_X \quad \text{и} \quad \lambda(\psi) = t_Y \circ F(\psi),$$

в правых частях которых стоят сквозные отображения вдоль стрелок

$$X \xrightarrow{s_X} GF(X) \xrightarrow{G(\varphi)} G(Y) \quad \text{и} \quad F(X) \xrightarrow{F(\psi)} FG(Y) \xrightarrow{t_Y} Y.$$

Композиция $\lambda\varrho(\varphi) = t_Y \circ FG(\varphi) \circ F(s_X) : F(X) \rightarrow Y$ представляет собою путь из левого нижнего угла в правый верхний на диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} & & F(X) & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \text{Id}_{F(X)} \nearrow & & & \nwarrow t_Y \\ & & F(X) & \xleftarrow{t_{F(X)}} & \\ & & \nwarrow F(s_X) & & \nearrow FG(\varphi) \\ F(X) & \xrightarrow{\quad} & FGF(X) & \xrightarrow{\quad} & FG(Y) \end{array}$$

правый параллелограмм которой коммутативен в силу естественности преобразования t , а левый треугольник — в силу равенства $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ и Id_F . Поэтому $\lambda\varrho(\varphi) = \varphi$. Равенство $\varrho\lambda(\psi) = \psi$ проверяется симметричным образом. \square

2.2. Тензорные произведения и Hom . Пусть R — произвольное кольцо. Тензорным произведением $M \otimes_R N$ правого R -модуля M на левый R -модуль N называется фактор тензорного произведения абелевых групп¹ $M \otimes N$ по подгруппе, порождённой всевозможными разностями

$$(mx) \otimes n - m \otimes (xn), \quad \text{где} \quad m \in M, \quad x \in R, \quad n \in N.$$

¹Или, что то же самое, \mathbb{Z} -модулей.

Это абелева группа, на которой кольцо R никак не действует, но в которой выполняются соотношения $(mx) \otimes_R n = m \otimes_R (xn)$. Тензорное умножение на фиксированный левый R -модуль N задаёт функтор из категории правых R -модулей в абелевы группы

$$\mathcal{M}od\text{-}R \rightarrow \mathcal{A}b, \quad X \mapsto X \otimes_R N,$$

переводящий стрелку $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ в стрелку $\varphi \otimes \text{Id}_N : m \otimes_R n \mapsto \varphi(m) \otimes_R n$. Если левый R -модуль N одновременно является правым модулем над ещё одним кольцом S и правое действие S коммутирует с левым действием R (такие N называются R - S бимодулями), функтор тензорного умножения на N отображает $\mathcal{M}od\text{-}R$ в $\mathcal{M}od\text{-}S$: кольцо S действует на $M \otimes N$ справа по правилу $(m \otimes n)y = m \otimes (ny)$. С другой стороны, представимый функтор $h^N : \mathcal{M}od\text{-}S \rightarrow \mathcal{A}b, Y \mapsto \text{Hom}_S(N, Y)$, принимает значения в $\mathcal{M}od\text{-}R$: правое действие $x \in R$ на $\text{Hom}_S(N, Y)$ переводит S -линейную справа стрелку $\varphi : N \rightarrow Y$ в стрелку $\varphi x : n \mapsto \varphi(xn)$, так что выполняется равенство $(\varphi x)n = \varphi(xn)$.

Предложение 2.3

Тензорное умножение на R - S -бимодуль N сопряжено слева функтору h^N , т. е. имеется естественный по $X \in \text{Ob } \mathcal{M}od\text{-}R$ и $Y \in \text{Ob } \mathcal{M}od\text{-}S$ изоморфизм абелевых групп

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(X \otimes_R N, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(X, \text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y)). \quad (2-5)$$

Доказательство. Отображение из левой части (2-5) в правую сопоставляет S -линейному справа гомоморфизму $\varphi : X \otimes_R N \rightarrow Y$ зависящее от $x \in X$ семейство гомоморфизмов $\varphi_x : N \rightarrow Y, n \mapsto \varphi(x \otimes n)$. Каждый из них S -линеен справа:

$$\varphi_x(ns) = \varphi(x \otimes ns) = \varphi(x \otimes n)s = \varphi_x(n)s,$$

а сопоставление $x \mapsto \varphi_x$, как отображение $X \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y)$, R -линейно справа:

$$\varphi_{xr}n = \varphi(xr \otimes n) = \varphi(x \otimes rn) = \varphi_x(rn) = (\varphi_x r)n.$$

Обратное отображение из правой части (2-5) в левую переводит семейство S -линейных справа гомоморфизмов $\varphi_x : N \rightarrow Y$, которые R -линейно справа зависят от $x \in X$, в S -линейный справа гомоморфизм $\varphi : x \otimes n \mapsto \varphi_x(n)$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 2.2. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y) \otimes_R N \rightarrow Y \quad \text{и} \quad s_X : X \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, X \otimes_R N).$$

ПРИМЕР 2.2 (ИНДУЦИРОВАНИЕ И КОИНДУЦИРОВАНИЕ)

Если кольцо A содержится в кольце B и они имеют общую единицу, каждый правый B -модуль X одновременно является и правым A -модулем, что задаёт функтор ограничения

$$\text{res} : \mathcal{M}od\text{-}B \rightarrow \mathcal{M}od\text{-}A. \quad (2-6)$$

Рассмотрим B как A - B бимодуль и положим в [предл. 2.3](#) $S = N = B$, $R = A$. Абелева группа $\text{Hom}_{\mathcal{M}od-B}(B, Y)$ канонически отождествляется с Y и как правый A -модуль изоморфна $\text{res } Y$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.3. Убедитесь в этом.

Поэтому изоморфизм 2-5 из [предл. 2.3](#) превращается в функториальный по A -модулю X и B -модулю Y изоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}od-B}(X \otimes_A B, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{M}od-A}(X, \text{res } Y).$$

Правый B -модуль $\text{ind } X \stackrel{\text{def}}{=} X \otimes_A B$ называется *индуцированным* с A -модуля X . Таким образом, функтор индуцирования $\text{ind} : \mathcal{M}od-A \rightarrow \mathcal{M}od-B$ сопряжён слева к функтору ограничения.

УПРАЖНЕНИЕ 2.4. Явно опишите естественные преобразования

$$\lambda_Y : \text{res ind } Y \rightarrow Y \quad \text{и} \quad \varrho_X : X \rightarrow \text{ind res } X.$$

Теперь рассмотрим B как B - A бимодуль и положим в [предл. 2.3](#) $S = A$, $N = R = B$. Абелева группа $X \otimes_B B$ канонически отождествляется с X и как правый A -модуль изоморфна $\text{res } X$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.5. Убедитесь в этом.

Поэтому изоморфизм 2-5 из [предл. 2.3](#) превращается в функториальный по B -модулю X и A -модулю Y изоморфизм абелевых групп

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}od-A}(\text{res } X, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{M}od-B}(X, \text{Hom}_{\mathcal{M}od-A}(B, Y)).$$

Правый B -модуль $\text{coind } Y \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{M}od-A}(B, Y)$ называется *коиндуцированным* с A -модуля Y . Таким образом, функтор коиндуцирования $\text{coind} : \mathcal{M}od-A \rightarrow \mathcal{M}od-B$ сопряжён справа к функтору ограничения.

УПРАЖНЕНИЕ 2.6. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \text{res coind } Y \rightarrow Y \quad \text{и} \quad s_X : X \rightarrow \text{coind res } X.$$

В ситуации, когда $A = \mathbb{k}[H]$ и $B = \mathbb{k}[G]$ являются групповыми алгебрами группы G и её подгруппы H с коэффициентами в поле \mathbb{k} , мы получаем известные из начального курса алгебры функторы (ко)индуцирования линейных представлений группы G над полем \mathbb{k} с представлений её подгруппы H .

УПРАЖНЕНИЕ 2.7*. Покажите, что функторы $\text{ind}, \text{coind} : \mathcal{M}od-H \rightarrow \mathcal{M}od-G$ естественно изоморфны, если индекс $[G : H]$ конечен.

ПРИМЕР 2.3 (СИНГУЛЯРНЫЕ СИМПЛЕКСЫ)

Свяжем с топологическим пространством Y симплициальное множество его *сингулярных симплексов* $S(Y) : \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$, которое сопоставляет комбинаторному симплексу $[n] \in \text{Ob } \Delta$ множество $S_n(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{J}op}(\Delta^n, Y) = h_Y(\Delta^n)$ всех непрерывных отображений правильного n -мерного симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в Y , а неубывающему отображению $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ — правое умножение $f \mapsto f \circ \varphi^*$ на аффинное отображение

$\varphi^* : \Delta^m \rightarrow \Delta^n$, действие которого на вершины симплекса совпадает с φ . Возникающий таким образом функтор $S : \mathcal{T}op \rightarrow pSh(\Delta)$ сопряжён справа функтору геометрической реализации $pSh(\Delta) \rightarrow \mathcal{T}op$, $X \mapsto |X|$, из [прим. 1.7](#) на стр. 8, т. е. имеется естественный по симплициальному множеству $X : \Delta^{opp} \rightarrow \mathcal{S}et$ и топологическому пространству Y изоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y) \simeq \text{Hom}_{pSh} (X, S(Y)), \quad (2-7)$$

который является категорным аналогом изоморфизма из форм. (2-5) на стр. 21. В самом деле, функтор геометрической реализации вкладывает категорию Δ в категорию $\mathcal{T}op$ в виде дизъюнктного набора $D = \bigsqcup_{n \geq 0} \Delta^n$ правильных симплексов всех размерностей. На пространстве D имеется левое действие стрелок φ категории Δ аффинными отображениями φ_* . Оно задаёт правое действие стрелок из Δ на множестве $S(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)$ сингулярных симплексов топологического пространства Y . С другой стороны, каждое симплициальное множество $X : \Delta^{opp} \rightarrow \mathcal{S}et$ по определению снабжено правым действием стрелок категории Δ на множества $X_n = X([n])$, и геометрическая реализация $|X|$, представляющая собою фактор дизъюнктного объединения $\bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n$ по соотношениям $(x\varphi, s) = (x, \varphi s)$, является прямым аналогом «тензорного произведения $X \otimes_{\Delta} D$ ». Таким образом, изоморфизм (2-7) имеет вид

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}op} (X \otimes_{\Delta} D, Y) \simeq \text{Hom}_{\text{Mod-}\Delta} (X, \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)), \quad (2-8)$$

ничем не отличающийся от изоморфизма (2-5) со стр. 21.

УПРАЖНЕНИЕ 2.8. Явно постройте взаимно обратные изоморфизмы между левой и правой частями формулы (2-8) и опишите естественные преобразования¹

$$t_Y : |S(Y)| \rightarrow Y \quad \text{и} \quad s_X : X \rightarrow S(|X|).$$

2.3. Пределы диаграмм. Любую малую категорию \mathcal{N} можно воспринимать как диаграмму, вершинами которой служат объекты, а стрелками — морфизмы категории \mathcal{N} . Функторы $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ реализуют эту диаграмму в категории \mathcal{C} в том смысле, что указывают объекты $X_\nu = X(\nu)$, занумерованные множеством $\text{Ob } \mathcal{N}$, а также стрелки $X(\nu \rightarrow \mu) : X_\nu \rightarrow X_\mu$, занумерованные множеством $\text{Mor } \mathcal{N}$. Поэтому такие функторы часто называют *диаграммами* вида \mathcal{N} в категории \mathcal{C} . Диаграммы образуют категорию $\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ с естественными преобразованиями функторов в качестве морфизмов. Каждый объект $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ задаёт *постоянную диаграмму* \bar{Y} , в которой все объекты $\bar{Y}_\nu = Y$, а все стрелки $\bar{Y}(\nu \rightarrow \mu) = \text{Id}_Y$. Со всякой диаграммой $X \in \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ связан предпучок множеств $\mathcal{C}^{opp} \rightarrow \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(\bar{Y}, X)$. Если он представим, т. е. существует такой объект $L \in \text{Ob } \mathcal{C}$, что имеется естественный по $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ изоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, L) = \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(\bar{Y}, X), \quad (2-9)$$

¹Первое является непрерывным отображением топологических пространств, второе — естественным преобразованием функторов $\Delta^{opp} \rightarrow \mathcal{S}et$, переводящих комбинаторный симплекс $[n]$ в множества X_n и $\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, |X|)$ соответственно.

то представляющий объект L называют *пределом*¹ диаграммы X и пишут $L = \lim X$. Двойственным образом, объект $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$, копредставляющий ассоциированный с диаграммой X ковариантный функтор $\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$, $Y \mapsto \text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(X, \bar{Y})$, называется *копределом*² диаграммы $X: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ и обозначается $C = \text{colim } X$. С копределом C связана функториальная по $Y \in \mathcal{C}$ биекция

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) = \text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(X, \bar{Y}). \quad (2-10)$$

Как и все (ко)представляющие объекты, (ко)пределы однозначно характеризуются своими «универсальными свойствами». Полагая $Y = L$ в формуле (2-9), мы получаем естественное преобразование $\pi: \bar{L} \rightarrow X$, соответствующее тождественному эндоморфизму Id_L и представляющее собою набор стрелок $\pi_\nu: L \rightarrow X_\nu$, которые коммутируют со всеми стрелками диаграммы X и универсальны в том смысле, что для любого коммутирующего со всеми стрелками диаграммы X набора стрелок $\psi_\nu: Y \rightarrow X_\nu$, выпущенных из произвольного объекта $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, существует единственный морфизм $\alpha: Y \rightarrow \lim X$, такой что $\psi_\nu = \pi_\nu \circ \alpha$ для всех ν .

Двойственным образом, в копредел $C = \text{colim } X$ диаграммы $X: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ ведёт канонический набор таких коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X морфизмов $\iota_\nu: X_\nu \rightarrow C$, что для любых перестановочных со всеми стрелками диаграммы X морфизмов $\psi_\nu: X_\nu \rightarrow Y$ в произвольный объект $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ существует единственный морфизм $\beta: \text{colim } X_\nu \rightarrow Y$, такой что $\psi_\nu = \beta \circ \iota_\nu$ для всех ν .

УПРАЖНЕНИЕ 2.9. Проверьте, что универсальные свойства задают предел и копредел однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми каноническими стрелками π_ν и ι_ν соответственно.

ПРИМЕР 2.4 (начальный, конечный и нулевой объекты)

Простейшая диаграмма — пустая. Её предел Fin называется *конечным*, а копредел Og — *начальным* объектами категории. Эти объекты однозначно с точностью до единственного изоморфизма определяются тем, что для любого $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ есть единственная стрелка $X \rightarrow \text{Fin}$ и единственная стрелка $\text{Og} \rightarrow X$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.10. Укажите начальный и конечный объекты в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом.

Если в категории имеется объект 0 , являющийся одновременно и начальным, и конечным, то этот объект называется *нулевым*. Морфизм $X \rightarrow Y$ в категории с нулевым объектом называется *нулевым*, если он разлагается³ в композицию $X \rightarrow 0 \rightarrow Y$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.11. Какие категории из [упр. 2.10](#) обладают нулевым объектом?

ПРИМЕР 2.5 (прямые (ко)произведения)

Малая категория \mathcal{N} называется *дискретной*, если все её морфизмы исчерпываются тождественными морфизмами Id_ν с $\nu \in \text{Ob } \mathcal{N}$. Соответствующие *дискретные диаграммы* $X: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ — это семейства объектов X_ν без стрелок между ними. Пределы

¹Или *проективным* пределом.

²Или *инъективным* пределом.

³Обратите внимание, что если такое разложение существует, то оно единственно.

и копределы таких диаграмм называются *прямыми произведениями* и *копроизведениями* и обозначаются, соответственно, через $\prod_{\nu} X_{\nu}$ и $\coprod_{\nu} X_{\nu}$. Когда индексов всего два, мы получаем прямые (ко) произведения двух объектов из [прим. 1.13](#) и [прим. 1.14](#) на [стр. 16](#). Очевидная индукция показывает, что для существования всех конечных прямых (ко) произведений достаточно существования прямых (ко) произведений любых двух объектов.

ПРИМЕР 2.6 ((ко) УРАВНИТЕЛИ)

(Ко)предел диаграммы вида $X \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} Y$ называется *(ко)уравнителем*¹ стрелок φ и ψ . В

категории множеств уравнитель представляет собою множество решений уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$ на $x \in X$ или, более научно, прообраз диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ при каноническом отображении $\varphi \times \psi : X \rightarrow Y \times Y$. Коуравнитель является фактором множества Y по наименьшему отношению эквивалентности² $R \subset Y \times Y$, содержащему образ отображения $\varphi \times \psi$, т. е. все отождествления $\varphi(x) = \psi(x)$ с $x \in X$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.12. Проверьте это и постройте (ко) уравнители любой пары стрелок в категориях топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным коммутативным кольцом.

Например, (ко) ядро гомоморфизма $f : A \rightarrow B$ в категории $\mathcal{A}b$ абелевых групп это (ко) уравнитель f и нулевого морфизма. Интуитивно, уравнители позволяют задавать «подобъекты» при помощи «уравнений», а коуравнители — «фактор объекты» при помощи «соотношений».

ПРИМЕР 2.7 (ПОСЛОЙНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ)

Предел диаграммы вида

$$X \xrightarrow{\xi} B \xleftarrow{\eta} Y$$

называется *послойным*³ *произведением* и обозначается $X \times_B Y$. Он включается в коммутативный декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X \times_B Y & \xrightarrow{\psi} & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow{\xi} & B \end{array} \quad (2-11)$$

¹По-английски *(co)equalizer*.

²Напомним, что *отношение эквивалентности* на Y это подмножество $R \subset Y \times Y$, которое *рефлексивно* (содержит диагональ Δ_Y), *симметрично* (переходит в себя при транспозиции сомножителей) и *транзитивно* (т. е. $(y_1, y_2), (y_2, y_3) \in R \Rightarrow (y_1, y_3) \in R$). Пересечение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности. Поэтому любое подмножество $S \subset Y \times Y$ содержится в единственном минимальном по включению отношении эквивалентности R_S , которое называется *порождённым* подмножеством S . Всякое отображение $\xi : Y \rightarrow Z$ определяет отношение эквивалентности $R_{\xi} = \{(y_1, y_2) \mid \xi(y_1) = \xi(y_2)\}$ на Y , причём $\xi' : Y \rightarrow Z'$ тогда и только тогда представляется в виде композиции $\xi' = \eta \circ \xi$ с некоторой стрелкой $\eta : Z \rightarrow Z'$, когда $R_{\xi} \subset R_{\xi'}$, т. е. когда эквивалентность, отвечающая ξ , *влечёт* эквивалентность, отвечающую ξ' (в этом случае говорят, что первая эквивалентность *тоньше* или *сильнее* последней).

³Или *расслоенным*.

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\psi'} & Y \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow{\xi} & B \end{array}$$

имеется единственный такой морфизм $\varphi' \times \psi' : Z \rightarrow X \times_B Y$, что $\varphi' = \varphi \circ (\varphi' \times \psi')$ и $\psi' = \psi \circ (\varphi' \times \psi')$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.13. Убедитесь, что левый верхний угол диаграммы (2-11) задаётся этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с φ и ψ .

В категории множеств отображение $X \times_B Y \rightarrow B$ имеет в качестве слоя над произвольной точкой $b \in B$ прямое произведение слоёв $\varphi^{-1}(b) \times \psi^{-1}(b)$, отсюда и название.

УПРАЖНЕНИЕ 2.14. Убедитесь, что $U \times_X V = U \cap V$ в категории $\mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств топологического пространства X .

Пример 2.8 (послойные копроизведения)

Оборачивая все стрелки в предыдущем примере, назовём *послойным копроизведением* $X \otimes_B Y$ копредел диаграммы $X \xleftarrow{\xi} B \xrightarrow{\eta} Y$. Он вписывается в коммутативный ко-декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\eta} & Y \\ \xi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{\varphi} & X \otimes_B Y \end{array} \quad (2-12)$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\eta} & Y \\ \xi \downarrow & & \downarrow \psi' \\ X & \xrightarrow{\varphi'} & Z \end{array}$$

существует единственный такой морфизм $\varphi' \otimes \psi' : X \otimes_B Y \rightarrow Z$, что $\varphi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \varphi$ и $\psi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \psi$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.15. Явно опишите послойные (ко) произведения в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп¹, коммутативных колец с единицей и модулей над коммутативным кольцом.

¹В теории групп копроизведения традиционно называются *амальгами*.

2.3.1. (Ко) замкнутость. Категория \mathcal{C} называется (ко) замкнутой, если для любой малой категории \mathcal{N} каждая диаграмма $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ имеет (ко) предел в \mathcal{C} .

Предложение 2.4

Для замкнутости категории \mathcal{C} достаточно существования в \mathcal{C} конечного объекта, прямых произведений любых множеств объектов и уравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом, а для козамкнутости — существования в \mathcal{C} начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

Доказательство. Мы построим предел произвольной диаграммы $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$, копредел строится аналогично путём обращения стрелок. Надо предъявить универсальный набор морфизмов $\varphi_\nu : L \rightarrow X_\nu$, решающий уравнения $\varphi_\mu = X(\nu \rightarrow \mu) \circ \varphi_\nu$, где $\nu \rightarrow \mu$ пробегает $\text{Mor } \mathcal{N}$. Для каждой стрелки $\nu \rightarrow \mu$ обозначим через $T_{\nu \rightarrow \mu} = X_\mu$ тот объект диаграммы X , в который ведёт эта стрелка, и образуем два произведения $A = \prod_\mu X_\mu$ и $B = \prod_{\nu \rightarrow \mu} T_{\nu \rightarrow \mu}$. В первое из них каждый объект диаграммы X входит ровно один раз, а во второе — столько раз, сколько стрелок в нём заканчивается. Для каждой стрелки $\mu \rightarrow \nu$ имеются два отображения $A \rightarrow T_{\nu \rightarrow \mu}$: проекция $\pi_\mu : A \rightarrow X_\mu$ произведения A на μ -тый сомножитель и композиция $\varkappa_{\nu \rightarrow \mu} = X(\nu \rightarrow \mu) \circ \pi_\nu$ проекции $\pi_\nu : A \rightarrow X_\nu$ произведения A на ν -тый сомножитель со стрелкой $X(\nu \rightarrow \mu) : X_\nu \rightarrow X_\mu$ диаграммы X . По универсальному свойству произведения B эти пары отображений задают два морфизма $\pi, \varkappa : A \rightarrow B$. Их уравнитель L приходит вместе с морфизмом $\varphi : L \rightarrow A$, который представляет собою набор стрелок $\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi$, удовлетворяющих равенствам

$$\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi = \varkappa_{\nu \rightarrow \mu} \circ \varphi = X(\nu \rightarrow \mu) \circ \varphi_\nu$$

и обладающих требуемым универсальным свойством (убедитесь в этом!). \square

Пример 2.9

В категории множеств $\lim X$ изоморфен подмножеству прямого произведения $\prod X_\nu$, образованному такими семействами (x_ν) , $\nu \in \text{Ob } \mathcal{N}$, $x_\nu \in X_\nu$, где $x_\mu = X(\nu \rightarrow \mu)x_\nu$ для всех стрелок $\nu \rightarrow \mu$ из $\text{Mor } \mathcal{N}$.

Упражнение 2.16. Проверьте, что $\text{colim } X$ изоморфен коуравнителю диаграммы

$$\prod_{\nu \rightarrow \mu} S_{\nu \rightarrow \mu} \xrightarrow[\varkappa]{\iota} \prod_\nu X_\nu,$$

в которой объекты $S_{\nu \rightarrow \mu} = X_\nu$ суть начала стрелок $X(\nu \rightarrow \mu)$ диаграммы X , а морфизмы задаются семействами стрелок

$$\iota_\nu : S_{\nu \rightarrow \mu} \rightarrow \prod_\nu X_\nu \quad \text{и} \quad \varkappa_{\nu \rightarrow \mu} = \iota_\mu \circ X(\nu \rightarrow \mu) : S_{\nu \rightarrow \mu} \rightarrow \prod_\nu X_\nu.$$

В частности, убедитесь, что в категории множеств $\text{colim } X$ является фактором дизъюнктного объединения $\bigsqcup_\nu X_\nu$ по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему отождествления $x \sim X(\nu \rightarrow \mu)x$ для всех $x \in X_\nu$ и всех стрелок $\nu \rightarrow \mu$ из $\text{Mor } \mathcal{N}$.

Замечание 2.1. Для того, чтобы в категории \mathcal{C} существовали (ко) пределы всех конечных диаграмм, в условиях предл. 2.4 достаточно требовать существования в \mathcal{C} конечных (ко) произведений.

Следствие 2.1

Категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом замкнуты и козамкнуты.

Доказательство. Сделайте упр. 2.12. □

Пример 2.10 (уточнённое определение пучка)

Объединение $U = \bigcup_i U_i$ произвольного семейства $\{U_i\}_{i \in I}$ открытых множеств топологического пространства X является коуравнителем отображений

$$\prod_{ij} U_i \cap U_j \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi_1} \\ \xrightarrow{\psi_2} \end{array} \prod_i U_i,$$

являющихся копроизведениями вложений $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i$ и $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_j$. Всякий предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{C}$ объектов любой категории \mathcal{C} переводит диаграмму коуравнителя

$$\prod_{ij} U_i \cap U_j \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi_1} \\ \xrightarrow{\psi_2} \end{array} \prod_i U_i \xrightarrow{\varphi} U, \quad (2-13)$$

в следующую диаграмму в категории \mathcal{C} :

$$F(U) \xrightarrow{\varphi^*} \prod_i F(U_i) \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi_1^*} \\ \xrightarrow{\psi_2^*} \end{array} \prod_{ij} F(U_i \cap U_j). \quad (2-14)$$

Стрелка φ^* этой диаграммы является произведением ограничений $F(U) \rightarrow F(U_i)$, а стрелки ψ_1^* и ψ_2^* — ограничений $F(U_i) \rightarrow F(U_i \cap U_j)$ и $F(U_j) \rightarrow F(U_i \cap U_j)$ соответственно. По определению, предпучок F является пучком, если стрелка φ является уравнителем стрелок ψ_1^* и ψ_2^* . В частности, когда множество индексов $I = \emptyset$, мы получаем в левом члене диаграммы (2-14) объект $F(\emptyset) \in \text{Ob } \mathcal{C}$, а в среднем и правом членах — произведения пустых множеств объектов, т. е. пределы пустых диаграмм, канонически изоморфные конечному объекту¹ $\text{Fin}_{\mathcal{C}}$ категории \mathcal{C} . Стрелки ψ_1^* и ψ_2^* являются в этом случае тождественными эндоморфизмами конечного объекта, и их уравнитель равен $\text{Id}_{\text{Fin}_{\mathcal{C}}}$. Таким образом, для любого пучка объектов произвольной категории \mathcal{C} на топологическом пространстве X должно выполняться равенство $F(\emptyset) = \text{Fin}_{\mathcal{C}}$. Например, для любого пучка множеств $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Set}$ множество $F(\emptyset)$ состоит из одной точки, а для пучка абелевых групп $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Ab}$ группа $F(\emptyset) = 0$.

¹Тем самым, для того чтобы предпучок F был пучком, необходимо, чтобы в категории \mathcal{C} был конечный объект (см. прим. 2.4 на стр. 24).

2.3.2. Фильтрующиеся диаграммы. Малая категория \mathcal{F} называется *фильтрующейся*, если из любых двух её объектов выходят стрелки с общим концом и для любых двух стрелок φ, ψ с общими началом и концом из их конца ведёт такая стрелка ζ , что $\zeta\varphi = \zeta\psi$. Например, любой чум, в котором у каждого двух элементов есть общая верхняя грань, является фильтрующейся категорией¹. Диаграммы вида $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ и $\mathcal{F}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{C}$ с фильтрующейся категорией \mathcal{F} принято называть, соответственно, *индуктивными* (или *прямыми*) и *проективными* (или *обратными*) системами стрелок категории \mathcal{C} , а их (ко)пределы обозначать через \varinjlim, \varinjlim для прямых систем и \varprojlim, \varprojlim для обратных. Копредел индуктивной системы множеств $X : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}et$ изоморфен фактору дизъюнктивного объединения $\coprod_{v \in \text{Ob } \mathcal{F}} X_v$ по отношению эквивалентности, отождествляющему $x_v \in X_v$ и $x_\mu \in X_\mu$, если существует такая пара стрелок $\nu \rightarrow \eta \leftarrow \mu$, что $X(\nu \rightarrow \eta)x_\nu = X(\mu \rightarrow \eta)x_\mu$ в множестве X_η .

УПРАЖНЕНИЕ 2.17. Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности и убедитесь, что множество классов эквивалентности изоморфно $\text{colim } X$.

ПРИМЕР 2.11 (РАЗБИЕНИЯ ОТРЕЗКА)

Конечные наборы точек $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_\infty = 1$, разбивающие отрезок $[0, 1]$ на непересекающиеся интервалы (как в определении интеграла Римана), образуют прямую систему в категории ∇_{big} относительно морфизмов включения, отвечающих измельчениям разбиения. Копределом этой системы в категории всех (не обязательно конечных) упорядоченных множеств с отмеченными максимальным и минимальным элементами является $[0, 1]$. В категории ∇_{big} копредела не существует.

ПРИМЕР 2.12 (ОТКРЫТЫЕ ОКРЕСТНОСТИ И СЛОЙ ПРЕДУПЧКА)

Множество открытых окрестностей любого подмножества $Z \subset X$ топологического пространства X является проективной системой в категории $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств в X , т. к. для любых окрестностей $U, W \supset Z$ окрестность $U \cap W = U \times_X W \supset Z$ вкладывается и в окрестность U , и в окрестность W . Пределом этой системы в категории $\mathcal{S}et$ является пересечение всех открытых окрестностей Z . В категории \mathcal{U} предела может и не быть. Для любого предпучка $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ множества сечений $F(U)$ над открытыми окрестностями U произвольно заданного подмножества $Z \subset X$ образуют индуктивную систему в $\mathcal{S}et$. Её копредел называется *слоем* предпучка F над Z и обозначается F_Z . В силу козамкнутости категории $\mathcal{S}et$ этот копредел всегда существует. Согласно [упр. 2.17](#), каждый элемент слоя F_Z представляет собою класс $s|_Z$ некоторого сечения $s \in F(U)$ над каким-либо открытым множеством $U \supset Z$ по модулю эквивалентности, отождествляющей сечения $s \in F(U)$ и $t \in F(W)$, когда $s|_V = t|_V$ над некоторым открытым V , таким что $Z \subset V \subset U \cap W$. Определённые таким образом классы $s|_Z$ называются *ростками сечений* предпучка F над Z .

В частности, когда $Z = \{x\}$ это одна точка, слой F_x называется *слоем F в точке x* . Мы будем обозначать класс сечения s в слое F_x через $s|_x$. В ситуации, когда F — пучок функций на X со значениями в каком-либо поле \mathbb{k} , класс $f|_x \in F_x$ локальной функции $f \in F(U)$ в слое F над точкой $x \in U$ не следует путать со значением $f(x) \in \mathbb{k}$ этой функции в точке x , поскольку, во первых, они лежат в разных множествах, во вторых,

¹Ср. с [прим. 1.2](#) на стр. 3.

равенство $f|_x = g|_x$ означает равенство $f \equiv g$ в некоторой открытой окрестности точки x , что обычно гораздо сильнее, чем равенство значений $f(x) = g(x)$.

ПРИМЕР 2.13 (ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОЛЬЦА)

Пусть подмножество S ассоциативного (но не обязательно коммутативного) кольца R с единицей таково, что $1 \in S$ и $st \in S$ для всех $s, t \in S$. Пусть, кроме того, выполняются следующие условия Ore¹:

$$\forall \varrho \in R, \forall s \in S \quad \exists \lambda \in R, \exists t \in S : \lambda s = t\varrho \quad (\text{O}_1)$$

$$\forall \varphi, \psi \in R \quad \text{из} \quad \exists s \in S : \varphi s = \psi s \quad \text{следует, что} \quad \exists t \in S : t\varphi = t\psi. \quad (\text{O}_2)$$

Превратим множество S в категорию, полагая $\text{Hom}_S(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in R \mid \lambda s = t\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.18. Выведите из условий Ore, что категория S фильтрующаяся.

Рассмотрим в категории правых R -модулей фильтрующуюся диаграмму $S \rightarrow \text{Mod-}R$, образованную свободными модулями $s^{-1}R$ ранга один, где символом s^{-1} обозначен базисный вектор того модуля, который отвечает объекту $s \in S$, и R -линейными отображениями $\lambda_* : s_1^{-1}R \rightarrow s_2^{-1}R$, которые отвечают стрелкам $\lambda \in \text{Hom}_S(s_1, s_2)$ и действуют на базисный вектор по правилу $s_1^{-1} \mapsto s_2^{-1}\lambda$. Копредел этой диаграммы в категории $\text{Mod-}R$ состоит из классов $s^{-1}\varrho$, где $s \in S$, $\varrho \in R$, по модулю равенств $s_1^{-1}\varrho_1 = s_2^{-1}\varrho_2$, означающих существование таких $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, что $\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ и $\lambda_1 \varrho_1 = \lambda_2 \varrho_2$ в R . Классы $s^{-1}\varrho$ называются *левыми дробями* со знаменателями в S . Они образуют правый R -модуль, обозначаемый $S^{-1}R$ и именуемый *левой локализацией* кольца R относительно мультипликативной системы Ore S .

УПРАЖНЕНИЕ 2.19. Чему равна сумма $s_1^{-1}\varrho_1 + s_2^{-1}\varrho_2$ в модуле $S^{-1}R$?

Определим *произведение* левых дробей $s_1^{-1}\varrho_1$ и $s_2^{-1}\varrho_2$ следующим образом. Пользуясь условием (O₁) подберём такие $\lambda_1 \in R$ и $t_2 \in S$, что² $t_2\varrho_1 = \lambda_1 s_2$, и положим

$$s_1^{-1}\varrho_1 \cdot s_2^{-1}\varrho_2 \stackrel{\text{def}}{=} (t_2 s_1)^{-1}(\lambda_1 \varrho_2).$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.20. Проверьте, что это определение корректно³ и задаёт на модуле $S^{-1}R$ структуру ассоциативного кольца с единицей. Убедитесь, что для коммутативного кольца R кольцо дробей $S^{-1}R$ изоморфно известному из курса алгебры⁴ кольцу частных a/s , где $a \in R$, $s \in S$, и $a_1/s_1 = a_2/s_2$, если и только если $\exists s \in S : s \cdot (a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$ в R .

2.4. Функториальность (ко) пределов. Естественное преобразование f диаграммы $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ в диаграмму $Y : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ — это набор стрелок $f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu$, по одной для каждого $\nu \in \text{Ob } \mathcal{N}$, перестановочных со стрелками из диаграмм. Если диаграммы $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ и $Y : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ имеют в категории \mathcal{C} пределы $L_X = \lim X_\nu$ и $L_Y = \lim Y_\mu$, то для любого функтора $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ и любого естественного преобразования $f : X \circ \tau \rightarrow Y$

¹В коммутативном кольце R оба условия Ore выполнены автоматически.

²Это «политкорректная» запись интуитивно желаемого равенства $\varrho_1 s_2^{-1} = t_2^{-1} \lambda_1$.

³Т. е. результат умножения не зависит от выбора таких $\lambda_1 \in R$ и $t_2 \in S$, что $t_2\varrho_1 = \lambda_1 s_2$.

⁴См. <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-04.pdf>.

существует единственный морфизм $\lim f : L_X \rightarrow L_Y$, такой что при всех $\mu \in \text{Ob } \mathcal{M}$ коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} L_X & \xrightarrow{\pi_{\tau(\mu)}} & X_{\tau(\mu)} \\ \lim f \downarrow & & \downarrow f_\mu \\ L_Y & \xrightarrow{\pi_\mu} & Y_\mu, \end{array} \quad (2-15)$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из предела в элементы диаграммы. В самом деле, композиции $f_\mu \circ \pi_{\tau(\mu)} : L_X \rightarrow Y_\mu$ задают систему стрелок из L_X в элементы диаграммы Y , перестановочные со всеми её стрелками, что даёт единственный морфизм $L_X \rightarrow \lim Y = L_Y$, делающий все диаграммы (2-15) коммутативными. Двойственным образом, если существуют копределы $C_X = \text{colim } X_\nu$ и $C_Y = \text{colim } Y_\mu$, то для любого функтора $\tau : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ и любого естественного преобразования $f : X \rightarrow Y \circ \tau$ существует единственный морфизм $\text{colim } f : C_X \rightarrow C_Y$, такой что коммутативны все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X_\nu & \xrightarrow{l_\nu} & C_X \\ f_\nu \downarrow & & \downarrow \text{colim } f \\ Y_{\tau(\nu)} & \xrightarrow{l_{\tau(\nu)}} & C_Y, \end{array}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из вершин диаграммы в копредел. При $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ и $\tau = \text{Id}$ из предл. 2.1 на стр. 19 и равенств (2-9) и (2-10) на стр. 24 получаем

Предложение 2.5

Для заданных малой категории \mathcal{N} и (ко)замкнутой категории \mathcal{C} копредел и предел являются, соответственно, левым и правым сопряжёнными к функтору $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$, переводящему $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ в постоянную диаграмму \bar{C} . \square

Замечание 2.2. Если не предполагать (ко)замкнутости, то (ко)предел будет функториален на всех диаграммах, где определён.

Следствие 2.2

Категория $pSh(\mathcal{U})$ предпучков множеств на малой категории \mathcal{U} замкнута и козамкнута. Для любой диаграммы предпучков $F : \mathcal{N} \rightarrow pSh(\mathcal{U})$ множества сечений предпучков $L = \lim F$ и $C = \text{colim } F$ над любым объектом $U \in \mathcal{U}$ суть $L(U) = \lim F(U)$ и $C(U) = \text{colim } F(U)$, где диаграмма $F(U) : \mathcal{N} \rightarrow Set$ образована множествами сечений предпучков диаграммы F над объектом U с отображениями, задающими действие стрелок диаграммы F над этим объектом.

Доказательство. В силу функториальности (ко)пределов, множества $L(U) = \lim F(U)$ и $C(U) = \text{colim } F(U)$ составляют предпучки множеств на \mathcal{U} , и для любого предпучка $F_\nu : \mathcal{U}^{opp} \rightarrow Set$ диаграммы F имеются перестановочные со всеми морфизмами из диаграммы канонические морфизмы предпучков $L \rightarrow F_\nu$ и $F_\nu \rightarrow C$, действие которых над каждым объектом $U \in \text{Ob } \mathcal{U}$ задаётся стрелками

$$\lim F(U) \rightarrow F_\nu(U) \quad \text{и} \quad F_\nu(U) \rightarrow \text{colim } F(U)$$

в категории $\mathcal{S}et$. Универсальность этих морфизмов также проверяется отдельно над каждым объектом $U \in \text{Ob } \mathcal{U}$. \square

2.4.1. Перестановочность функторов с (ко)пределами. Скажем, что функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ перестановочен с (ко)пределами, если для любого $L \in \text{Ob } \mathcal{C}$ и любой диаграммы $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ из того, что L является (ко)пределом X в \mathcal{C} , вытекает, что $F(L)$ является (ко)пределом диаграммы $F \circ X$ в \mathcal{D} .

Предложение 2.6

Если функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, то F перестановочен с копределами, а G — с пределами.

Доказательство. В силу сопряжённости F и G имеем функториально по $D \in \text{Ob } \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\text{colim } X), D) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim } X, G(D)) \simeq \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(X, \overline{G(D)}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{D})}(F \circ X, \overline{D}). \end{aligned}$$

Тем самым, $F(\text{colim } X) \simeq \text{colim}(F \circ X)$. Рассуждение про пределы аналогично. \square

Следствие 2.3

Тензорное умножение на (левый) модуль N над произвольным кольцом S с единицей перестановочно с копределами диаграмм (правых) S -модулей. В частности, тензорное умножение на N переводит коядра в коядра, т. е. для любого $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Mod-}S}(K, L)$ имеется канонический изоморфизм абелевых групп

$$\text{coker} \left(\varphi \otimes_{\underset{S}{\text{Id}}_N} : K \otimes_{\underset{S}{N}} \rightarrow L \otimes_{\underset{S}{N}} \right) \simeq \text{coker}(\varphi) \otimes_{\underset{S}{N}}.$$

Доказательство. По [предл. 2.3](#) на стр. 21, применённому к кольцам S и $R = \mathbb{Z}$, функтор $\text{Mod-}S \rightarrow \mathcal{A}b$, $X \mapsto X \otimes_{\underset{S}{N}}$, сопряжён слева функтору $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(N, Y)$. \square

Следствие 2.4

Пределы коммутируют с пределами, а копределы — с копределами всякий раз, когда они существуют: если задана такая диаграмма $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ естественных преобразований $F(\mu_1 \rightarrow \mu_2)$ диаграмм $\{F_\mu : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}\}$, что для всех $\mu \in \mathcal{M}$ и $\nu \in \mathcal{N}$ μ -тая диаграмма $F_\mu : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ и диаграмма $F(\nu)$, задающая действие стрелок $F(\mu_1 \rightarrow \mu_2)_\nu$ между элементами $F_\mu(\nu)$ с фиксированным номером ν , обе имеют (ко)предел в \mathcal{C} , то

$$\lim_{\mu} \lim_{\nu} F_\mu \simeq \lim_{\nu} \lim_{\mu} F(\nu) \quad \text{и} \quad \text{colim}_{\mu} \text{colim}_{\nu} F_\mu \simeq \text{colim}_{\nu} \text{colim}_{\mu} F(\nu).$$

Следствие 2.5

Если стрелки $f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu$ задают естественное преобразование между диаграммами абелевых групп $X, Y : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A}b$, то копредел коядер этих стрелок равен коядру индуцированной стрелки между копределами, а предел ядер — ядру стрелки между пределами:

$$\begin{aligned} \text{colim coker } f_\nu &\simeq \text{coker} \left(\text{colim } X_\nu \xrightarrow{\text{colim } f_\nu} \text{colim } Y_\nu \right) \\ \lim \ker f_\nu &\simeq \ker \left(\lim X_\nu \xrightarrow{\lim f_\nu} \lim Y_\nu \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Будучи (ко)уравнителем f_ν и нулевого морфизма (ко)ядро является (ко)пределом. \square

Предложение 2.7

Копределы прямых систем абелевых групп перестановочны также и с ядрами, т. е. если в сл. 2.5 категория \mathcal{N} индексов диаграмм $X, Y : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{Ab}$ фильтрующаяся, то

$$\operatorname{colim} \ker (f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu) \simeq \ker \left(\operatorname{colim} X_\nu \xrightarrow{\operatorname{colim} f_\nu} \operatorname{colim} Y_\nu \right). \quad (2-16)$$

Доказательство. Согласно упр. 2.17 на стр. 29 копредел фильтрующейся диаграммы Z является фактором дизъюнктного объединения $\coprod Z_\nu$ по эквивалентности, отождествляющей элементы $z_\nu \in Z_\nu$ и $z_\mu \in Z_\mu$, когда есть пара стрелок $\nu \rightarrow \eta \leftarrow \mu$, переводящих эти элементы в один и тот же элемент из Z_η . Пусть $\varphi = \operatorname{colim} f_\nu$. Эта предельная стрелка переводит класс $[x_\nu]$ элемента $x_\nu \in X_\nu$ в класс элемента $f_\nu(x_\nu) \in Y_\nu$.

Упражнение 2.21. Убедитесь, что класс результата не зависит от выбора представителя в классе $[x_\nu]$.

Сопоставляя классу $[x_\nu] \in \operatorname{colim} \ker (f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu)$ из левой части (2-16) класс этого же элемента $x_\nu \in \ker f_\nu \subset X_\nu$, но уже в копределе $\operatorname{colim} X_\nu$, мы получим класс, лежащий в $\ker \varphi$. Это задаёт гомоморфизм из левой части (2-16) в правую. Чтобы построить обратный гомоморфизм, рассмотрим класс $[x_\nu] \in \ker \varphi$. Раз $[f_\nu(x_\nu)] = [0]$ в $\operatorname{colim} Y_\nu$, найдутся такие стрелки $\nu \rightarrow \eta \leftarrow \mu$, что $f_\nu(X(\nu \rightarrow \eta)x_\nu) = Y(\nu \rightarrow \eta)f_\nu(x_\nu) = Y(\mu \rightarrow \eta)0 = 0$ в Y_η . Тем самым, элемент $x_\eta = X(\nu \rightarrow \eta)x_\nu \in \ker f_\nu$. Сопоставление классу $[x_\nu] \in \ker \varphi$ класса $[x_\eta] \in \operatorname{colim} \ker (f_\nu)$ задаёт гомоморфизм из правой части (2-16) в левую. Остаётся убедиться, что он определён корректно и обратен предыдущему. \square

Упражнение 2.22. Сделайте это, а также докажите, что в категории $\mathcal{S}et$ стрелка

$$\varphi : \operatorname{colim} X_\nu \rightarrow \operatorname{colim} Y_\nu,$$

являющаяся копределом такого естественного преобразования $f : X \rightarrow Y$ фильтрованных диаграмм $X, Y : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{S}et$, в котором все стрелки $f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu$ инъективны (соотв. сюръективны, биективны), тоже инъективна (соотв. сюръективна, биективна).

§3. Абелевы категории и пучки

3.1. Линейные категории. Пусть R — произвольное кольцо с единицей. Категория \mathcal{L} называется R -линейной слева, если бифунктор $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(*, *)$ принимает значения в категории $R\text{-Mod}$ левых R -модулей и все композиции

$$\text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$$

билинейны над R . Например, сама категория $R\text{-Mod}$ R -линейна, категория векторных пространств над полем \mathbb{k} линейна над \mathbb{k} , а категория абелевых групп \mathbb{Z} -линейна. Всякая R -линейная категория автоматически \mathbb{Z} -линейна: каждое множество стрелок $\text{Hom}(X, Y)$ в R -линейной категории является аддитивной абелевой группой, и сложение морфизмов дистрибутивно композиции:

$$(\varphi_1 + \varphi_2) \circ (\psi_1 + \psi_2) = \varphi_1 \circ \psi_1 + \varphi_1 \circ \psi_2 + \varphi_2 \circ \psi_1 + \varphi_2 \circ \psi_2.$$

Функтор между R -линейными категориями называется R -линейным, если он действует на стрелки R -линейными гомоморфизмами. Все функторы между R -линейными категориями далее будут по умолчанию предполагаться R -линейными.

Предостережение 3.1. Сложение морфизмов в (малой) R -линейной категории \mathcal{L} не следует путать с формальным сложением в алгебре $K[\mathcal{L}]$ из прим. 1.3 на стр. 4: между множествами $\text{Mor } \mathcal{L}$ и $K[\mathcal{L}]$ может не случиться даже биекции.

3.1.1. Прямые суммы. Из равенства $\varphi \circ 0 = \varphi \circ (0 + 0) = \varphi \circ 0 + \varphi \circ 0$ вытекает, что в R -линейной категории $\varphi \circ 0 = 0$ для нулевого морфизма $0 \in \text{Hom}(X, Y)$ и любой стрелки φ с началом в Y . По той же причине $0 \circ \psi = 0$ для стрелок ψ с концом в X .

Упражнение 3.1. Докажите равносильность друг другу следующих трёх условий на эндоморфизм $\varepsilon \in \text{Hom}(X, X)$ в R -линейной категории: а) $\varepsilon = \text{Id}_X$ б) $\varphi \circ \varepsilon = \varphi$ для всех стрелок φ с началом в X в) $\varepsilon \circ \varphi = \varphi$ для всех стрелок φ с концом в X и проверьте, что мономорфность¹ (соотв. эпиморфность) произвольного морфизма означает, что он не является левым (соотв. правым) делителем нуля².

Лемма 3.1

В R -линейной категории каждое произведение $X \times Y$ является одновременно и копроизведением, а каждое копроизведение $X \otimes Y$ — произведением, причём между каноническими морфизмами π_X, π_Y произведения в множители и каноническими морфизмами ι_X, ι_Y множителей в копроизведение выполняются соотношения:

$$\iota_X \pi_X + \iota_Y \pi_Y = \text{Id}, \quad \pi_X \iota_X = \text{Id}_X, \quad \pi_Y \iota_Y = \text{Id}_Y, \quad \pi_X \iota_Y = 0, \quad \pi_Y \iota_X = 0, \quad (3-1)$$

Наоборот, всякий объект $X \oplus Y$, включающийся в коммутативную диаграмму

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota_X} \\ \xleftarrow{\pi_X} \end{array} X \oplus Y \begin{array}{c} \xleftarrow{\iota_Y} \\ \xrightarrow{\pi_Y} \end{array} Y$$

стрелки которой удовлетворяют соотношениям (3-1), является одновременно произведением и копроизведением объектов X и Y .

¹См. н° 1.1.1 на стр. 4.

²Т. е. $\varphi \psi = 0 \Rightarrow \psi = 0$ (соотв. $\psi \varphi = 0 \Rightarrow \psi = 0$).

Доказательство. Пусть есть произведение $X \times Y$. Морфизмы $\iota_X \stackrel{\text{def}}{=} \text{Id}_X \times 0 : X \rightarrow X \times Y$ и $\iota_Y \stackrel{\text{def}}{=} 0 \times \text{Id}_Y : Y \rightarrow X \times Y$ включаются в коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \\ \pi_X \downarrow & \swarrow \iota_X & \uparrow 0 \\ X & \xleftarrow{\text{Id}_X} & X \end{array} \quad \text{И} \quad \begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \\ \pi_X \downarrow & \swarrow \iota_Y & \uparrow \text{Id}_Y \\ X & \xleftarrow{0} & Y \end{array}$$

и удовлетворяют последним четырём соотношениям (3-1). Из них вытекает, что

$$\pi_X(\iota_X \pi_X + \iota_Y \pi_Y) = \pi_X \quad \text{и} \quad \pi_Y(\iota_X \pi_X + \iota_Y \pi_Y) = \pi_Y.$$

Но по универсальному свойству произведения стрелка $\varphi : X \times Y \rightarrow X \times Y$, для которой $\pi_X \varphi = \pi_X$ и $\pi_Y \varphi = \pi_Y$ ровно одна — это $\varphi = \text{Id}_{X \times Y}$, что доказывает первое соотношение из (3-1).

УПРАЖНЕНИЕ 3.2. Докажите соотношения (3-1) в случае, когда существует копроизведение $X \oplus Y$.

Из соотношений (3-1) следует, что для любой пары стрелок $\alpha : X \rightarrow Z$ и $\beta : Y \rightarrow Z$ стрелка $\gamma : X \oplus Y \rightarrow Z$ со свойствами $\gamma \iota_X = \alpha$ и $\gamma \iota_Y = \beta$ единственна и равна $\gamma = \gamma \circ \text{Id}_{X \oplus Y} = \gamma(\iota_X \pi_X + \iota_Y \pi_Y) = \alpha \pi_X + \beta \pi_Y$, а для любой пары стрелок $\alpha' : W \rightarrow X$ и $\beta' : W \rightarrow Y$ стрелка $\gamma' : W \rightarrow X \oplus Y$ со свойствами $\pi_X \gamma' = \alpha'$ и $\pi_Y \gamma' = \beta'$ также единственна и равна $\gamma' = \text{Id}_{X \oplus Y} \circ \gamma' = (\iota_X \pi_X + \iota_Y \pi_Y) \gamma' = \iota_X \alpha' + \iota_Y \beta'$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 (ПРЯМЫЕ СУММЫ)

Объект $X \oplus Y$, удовлетворяющий условиям лем. 3.1, называется *прямой суммой* объектов X и Y . Аналогично по индукции определяется прямая сумма $\mathcal{X} = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$ любого конечного набора объектов и канонические морфизмы

$$\iota_\nu : X_\nu \rightarrow \mathcal{X}, \quad \pi_\nu : \mathcal{X} \rightarrow X_\nu, \quad \varepsilon_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \iota_\nu \pi_\nu : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X},$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} \pi_\nu \iota_\mu &= 0 \text{ при } \nu \neq \mu, & \pi_\nu \iota_\nu &= \text{Id}_{X_\nu}, \\ \varepsilon_\nu \varepsilon_\mu &= 0 \text{ при } \nu \neq \mu, & \varepsilon_\nu^2 &= \varepsilon_\nu, & \sum_\nu \varepsilon_\nu &= \text{Id}_{\mathcal{X}}, \end{aligned} \quad (3-2)$$

эквивалентным тому, что $\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = X_1 \otimes X_2 \otimes \dots \otimes X_n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. (БЕСКОНЕЧНЫЕ (КО)ПРОИЗВЕДЕНИЯ) Прямой суммой $\bigoplus_\nu X_\nu$ бесконечного семейства объектов X_ν называется их копроизведение (если существует). Бесконечная прямая сумма не совпадает с произведением $\prod_\nu X_\nu$: например, в категории $\mathcal{A}b$ произведение состоит из всевозможных семейств векторов $\{v_\nu\}$, $v_\nu \in X_\nu$, с покомпонентным сложением, а прямая сумма образована такими семействами $\{v_\nu\}$, в которых лишь конечное число элементов $v_\nu \neq 0$. В силу универсальных свойств (ко)произведений имеются функториальные по X и Y изоморфизмы

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_\nu X_\nu, Y\right) \simeq \prod_\nu \text{Hom}(X_\nu, Y) \quad \text{и} \quad \text{Hom}\left(Y, \prod_\nu X_\nu\right) = \prod_\nu \text{Hom}(Y, X_\nu). \quad (3-3)$$

Для каждого i набор стрелок $\pi_{vi} : X_i \rightarrow X_v$, нулевых при $v \neq i$ и тождественной для $v = i$, по-прежнему задаёт морфизмы $\pi_i : \bigoplus_v X_v \rightarrow X_i$, такие что $\pi_v \iota_v = \text{Id}_{X_v}$ при всех v , и $\pi_v \iota_\mu = 0$ при $\mu \neq v$. Произведение стрелок π_v задаёт морфизм

$$\sigma : \bigoplus_v X_v \rightarrow \prod_v X_v. \quad (3-4)$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.3. Убедитесь, что все ι_v и σ инъективны, а π_v сюръективны.

Если все объекты X_v являются одинаковыми копиями одного объекта X , занумерованными множеством N , мы обозначаем их прямую сумму через $N \otimes X \stackrel{\text{def}}{=} \prod_v X_v$, а произведение — через $X^N \stackrel{\text{def}}{=} \prod_v X_v$.

ПРИМЕР 3.1 (МАТРИЧНЫЙ ФОРМАЛИЗМ)

Прямым вычислением с использованием соотношений (3-2) проверяется, что для конечных прямых сумм $\mathcal{X} = \bigoplus_v X_v$ и $\mathcal{Y} = \bigoplus_\mu Y_\mu$ в R -линейной категории имеется канонический изоморфизм R -модулей $\text{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \simeq \bigoplus_{\mu, v} \text{Hom}(X_v, Y_\mu)$, сопоставляющий мор-

физму $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ матрицу $\Phi = (\varphi_{\mu v})$ из морфизмов $\varphi_{\mu v} = \pi_\mu \circ \varphi \circ \iota_v : X_v \rightarrow Y_\mu$. Из матрицы Φ морфизм $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ восстанавливается по формуле $\varphi = \sum_{\mu v} \iota_\mu \circ \varphi_{\mu v} \circ \pi_v$.

При этом матрица композиции $\varphi \circ \psi$ равна произведению матриц $\Phi \cdot \Psi$.

ПРИМЕР 3.2 (ПРЯМАЯ СУММА МОРФИЗМОВ)

Во всякой категории с (ко)произведениями любой набор морфизмов $\gamma_v : X_v \rightarrow Y_v$ канонически задаёт морфизм произведений $\prod X_\alpha \rightarrow \prod Y_\alpha$ и морфизм копроизведений $\coprod X_\alpha \rightarrow \coprod Y_\alpha$, которые отвечают, соответственно, наборам стрелок

$$\gamma_v \circ \pi_v : \prod X_\alpha \rightarrow Y_v \quad \text{и} \quad \iota_v \circ \gamma_v : X_v \rightarrow \coprod Y_\alpha,$$

где $\pi_v : \prod X_\alpha \rightarrow X_v$ и $\iota_v : X_v \rightarrow \coprod Y_\alpha$ — канонические морфизмы произведения в сомножители и сомножителей в копроизведение. Для конечных прямых сумм в R -линейных категориях эти два морфизма совпадают и называются *прямой суммой* морфизмов γ_v . Прямая сумма морфизмов обозначается $\bigoplus \gamma_v$. В терминах прим. 3.1 она изображается диагональной матрицей со стрелками γ_v по диагонали и нулями в остальных местах.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. (КАНОНИЧНОСТЬ СЛОЖЕНИЯ МОРФИЗМОВ) Если в R -линейной категории \mathcal{L} есть прямые суммы $X \oplus X$ и $Y \oplus Y$, то сложение в группе $\text{Hom}(X, Y)$ канонически определяется композициями в категории \mathcal{L} , поскольку для любых стрелок $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi+\psi} & Y \\ \Delta_X \downarrow & & \uparrow \nabla_Y \\ X \oplus X & \xrightarrow{\varphi \times \psi} & Y \oplus Y \end{array} \quad (3-5)$$

в которой диагональный морфизм $\Delta_X \stackrel{\text{def}}{=} \text{Id} \times \text{Id} : X \rightarrow X \times X$, кодиагональный морфизм $\nabla_Y \stackrel{\text{def}}{=} \text{Id} \otimes \text{Id} : Y \otimes Y \rightarrow Y$ и морфизм $\varphi \times \psi : X \times X \rightarrow Y \times Y$ не связаны с аддитивной структурой и имеются в в любой категории \mathcal{L} , где есть произведения $X \times X$ и $Y \times Y = Y \otimes Y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2 (нулевой объект и нулевые морфизмы)

Объект $0 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ категории \mathcal{C} называется *нулевым*, если он одновременно начальный и конечный. Такой объект единствен с точностью до единственного изоморфизма (если существует). Морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ в категории с нулевым объектом называется *нулевым*, если он распадается в композицию $X \rightarrow 0 \rightarrow Y$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.4. Убедитесь, что в R -линейной категории нулевой морфизм является нулевым элементом аддитивной группы $\text{Hom}(X, Y)$.

3.1.2. Ядра и коядра. В категории \mathcal{C} с нулевым объектом уравнитель стрелки $\varphi : X \rightarrow Y$ и нулевого морфизма называется *ядром* φ и обозначается $\ker \varphi$. Если он существует, то вместе с такой универсальной стрелкой $\kappa : \ker \varphi \rightarrow X$, что $\varphi \kappa = 0$ и

$$\forall \psi \quad \varphi \psi = 0 \Rightarrow \exists! \psi' : \psi = \kappa \psi',$$

которую мы тоже будем называть *ядром*, и единствен с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с κ . В \mathbb{Z} -линейной категории ядро представляет предпучок $Z \mapsto \ker \varphi_Z^*$, сопоставляющий объекту Z ядро гомоморфизма абелевых групп $\varphi_Z^* : \text{Hom}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}(Z, Y)$, задающего действие над этим объектом естественного преобразования $\varphi_* : h_X \rightarrow h_Y$ левого умножения на φ .

Коуравнитель φ с нулевым морфизмом называется *коядром*, обозначается $\text{coker } \varphi$. Если он существует, то с такой стрелкой $\zeta : Y \rightarrow \text{coker } \varphi$, что $\zeta \varphi = 0$ и

$$\forall \psi \quad \psi \varphi = 0 \Rightarrow \exists! \psi' : \psi = \psi' \zeta,$$

которая также называется *коядром*, и единствен с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с ζ . В \mathbb{Z} -линейной категории коядро копредставляет функтор $Z \mapsto \ker \varphi_Z^*$, где гомоморфизм $\varphi_Z^* : \text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$ задаёт действие над Z естественного преобразования $\varphi^* : h^Y \rightarrow h^X$ правого умножения на φ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.5. Убедитесь, что в любой \mathbb{Z} -линейной категории:

- а) $\varphi = 0 \iff \kappa = \text{Id}_X \iff \zeta = \text{Id}_Y$
- б) стрелка $\kappa : \ker \varphi \rightarrow X$ мономорфна, а стрелка $\zeta : Y \rightarrow \text{coker } \varphi$ — эпиморфна
- в) φ мономорфен $\iff \ker \varphi = 0$; φ эпиморфен $\iff \text{coker } \varphi = 0$.

Ядро канонической стрелки $\zeta : Y \rightarrow \text{coker } \varphi$ называется *образом* морфизма φ и обозначается $\text{im } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \ker \zeta$. Коядро канонической стрелки $\kappa : \ker \varphi \rightarrow X$ называется *кообразом*¹ морфизма φ и обозначается $\text{coim } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \text{coker } \kappa$. Если морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ имеет ядро, коядро, образ и кообраз, то в силу универсальных свойств двух последних

$$\text{Hom}(\text{coim } \varphi, \text{im } \varphi) \simeq \{ \alpha : \text{coim } \varphi \rightarrow Y \mid \zeta \alpha = 0 \} \simeq \{ \beta : X \rightarrow Y \mid \zeta \beta = 0 \text{ и } \beta \kappa = 0 \}.$$

¹В категории модулей кообраз $\varphi : X \rightarrow Y$ это фактор по ядру: $\text{coim } \varphi = X / \ker \varphi$.

Стрелка $\bar{\varphi} : \text{coim } \varphi \rightarrow \text{im } \varphi$, переводимая этими изоморфизмами в исходную стрелку $\varphi : X \rightarrow Y$, это единственный морфизм, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \text{coker } \varphi & \xleftarrow{\zeta} & Y & \xleftarrow{\kappa'} & \text{im } \varphi \\ & & \uparrow \varphi & & \uparrow \bar{\varphi} \\ \text{ker } \varphi & \xrightarrow{\kappa} & X & \xrightarrow{\zeta'} & \text{coim } \varphi \end{array} \quad (3-6)$$

в которой κ, κ' — канонические морфизмы из ядер, а ζ, ζ' — в коядра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3

Диаграмма (3-6) называется *каноническим разложением* морфизма φ .

ПРИМЕР 3.3 (ФИЛЬТРОВАННЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ)

Рассмотрим категорию $F\mathcal{A}b$, объектами которой являются абелевы группы

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

профильтованные возрастающими подгруппами $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$, а морфизмами — такие гомоморфизмы абелевых групп $\varphi : A \rightarrow B$, что $\varphi(A_n) \subset B_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Эта категория аддитивна, и у каждого морфизма $\varphi : A \rightarrow B$ есть ядро и коядро, как группы совпадающие с ядром и коядром в $\mathcal{A}b$, и имеющие фильтрации, индуцированные с A и B : $\text{ker } \varphi = \bigcup A'_n$, где $A'_n = A_n \cap \text{ker } \varphi$, и $\text{coker } \varphi = \bigcup B'_n$, где B'_n — образ подгруппы $B_n \subset B$ в факторе $B/\varphi(A)$. Обозначим через $A[1]$ фильтрованную группу с компонентами $A[1]_p = A_{p+1}$. Отображение $s : A \rightarrow A[1]$, тождественно действующее на элементы группы, является морфизмом фильтрованных групп и имеет нулевые ядро и коядро, т. е. одновременно инъективно и сюръективно, но не обратимо, если $A \neq 0$. В каноническом разложении (3-6) морфизма s стрелка $\bar{s} = s$ тоже не изоморфизм:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longleftarrow & A[1] & \xleftarrow{\text{Id}_{A[1]}} & A[1] \\ & & \uparrow s & & \uparrow s \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\text{Id}_A} & A. \end{array}$$

3.2. Абелевы категории. Категория \mathcal{A} называется *аддитивной*, если она \mathbb{Z} -линейна, и в ней имеются нулевой объект и прямые суммы любых двух¹ объектов. Аддитивная категория \mathcal{A} называется *абелевой*, если любая стрелка φ в ней имеет ядро и коядро, причём канонический морфизм $\bar{\varphi}$ в её разложении (3-6) является изоморфизмом, т. е. образ любого морфизма канонически изоморфен его кообразу². отождествляя кообраз с образом при помощи этого изоморфизма, мы получаем для каждой стрелки $\varphi : X \rightarrow Y$ *пятичленное разложение*

$$\text{ker } \varphi \hookrightarrow X \xrightarrow{\zeta'} \text{im } \varphi \hookrightarrow Y \xrightarrow{\zeta} \text{coker } \varphi, \quad (3-7)$$

¹А значит — и любого конечного множества.

²В начальном курсе алгебры этот факт обычно называют «теоремой о строении гомоморфизма» и доказывают для гомоморфизмов групп, колец и модулей над кольцами.

где κ' мономорфен, ζ' эпиморфен, $\zeta'\kappa = \varphi$ и $\text{im } \varphi = \ker \zeta = \text{coim } \kappa$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.6. Покажите, что во всякой абелевой категории \mathcal{A} :

- а) ядро, коядро и образ являются функторами из категории $\mathcal{A}r(\mathcal{A})$ диаграмм вида¹
 $\bullet \rightarrow \bullet$ в категорию \mathcal{A}
- б) пятичленное разложение (3-7) является функтором из $\mathcal{A}r(\mathcal{A})$ в категорию диаграмм вида $\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet$
- в) φ обратим $\iff \ker \varphi = 0$ и $\text{coim } \varphi = 0$
- г) каждый мономорфизм является ядром своего коядра, а каждый эпиморфизм — коядром своего ядра.

Поскольку (ко)ядро разности $\alpha - \beta$ является (ко)уравнителем стрелок α и β , в абелевой категории существуют (ко)пределы всех конечных диаграмм², в том числе плоские (ко)произведения³.

УПРАЖНЕНИЕ 3.7. Убедитесь, что $\lim(A \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} B) = \ker(A \oplus B \xrightarrow{\alpha\pi_A - \beta\pi_B} D)$, а $\text{colim}(X \xleftarrow{\xi} C \xrightarrow{\eta} Y) = \text{coim}(C \xrightarrow{\iota_X\xi - \iota_Y\eta} X \oplus Y)$, и покажите, что в декартовом и кодекартовом квадратах

$$\begin{array}{ccc}
 A \times B & \xrightarrow{\alpha} & A \\
 \beta \downarrow & & \downarrow \beta' \\
 B & \xrightarrow{\alpha'} & D
 \end{array}
 \quad \text{и} \quad
 \begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\xi} & X \\
 \eta \downarrow & & \downarrow \eta' \\
 Y & \xrightarrow{\xi'} & X \otimes_C Y
 \end{array}
 \quad (3-8)$$

β изоморфно отображает $\ker \alpha$ на $\ker \alpha'$ и эпиморфность β' влечёт эпиморфность β , а ξ' изоморфно отображает $\text{coim } \eta$ на $\text{coim } \eta'$ и мономорфность ξ влечёт мономорфность ξ' .

ПРИМЕР 3.4

Для любого кольца R категория $R\text{-Mod}$ левых R -модулей, категория $R\text{-FMod}$ свободных левых R -модулей и категория $R\text{-mod}$ конечно представимых⁴ левых R -модулей абелевы: ядра, коядра и образы в них суть обычные ядра, коядра и образы R -линейных отображений, а совпадение образа и кообраза проверяется в теореме о строевании R -линейного гомоморфизма, утверждающей, что образ канонически изоморфен фактору по ядру. В частности, абелевы категория всех абелевых групп и категория конечно порождённых абелевых групп. Категория фильтрованных абелевых групп из [прим. 3.3](#) аддитивна и имеет (ко)ядра всех стрелок, однако не является абелевой, т. к. в ней есть стрелки φ с $\text{im } \varphi \neq \text{coim } \varphi$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.8. Убедитесь, что в категории топологических абелевых групп и их не прерывных гомоморфизмов тоже есть ядра, коядра и прямые суммы, но она не является абелевой.

¹Т. е. категории функторов $\text{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{A})$, где категория $\mathcal{N} = \{\bullet \rightarrow \bullet\}$ имеет 2 объекта и одну нетождественную стрелку.

²См. зам. 2.1. на стр. 28.

³Т. е. декартовы и кодекартовы квадраты, см. диаграммы (2-11) и (2-12) на стр. 25–26.

⁴Модуль называется *конечно представимым*, если он изоморфен фактору свободного модуля конечного ранга по конечно порождённому подмодулю.

Категории множеств, топологических пространств, групп и коммутативных колец не являются даже \mathbb{Z} -линейными, т. к. в них $X \times Y \neq X \otimes Y$.

Замечание 3.3. (короткий список аксиом абелевой категории) Данное выше определение абелевой категории не является логически минимальным и выбрано нами постольку, поскольку все абелевы категории, с которыми мы будем иметь дело в этом курсе, изначально линейны, и в них выполняется теорема о строении гомоморфизма. Общепринятое в логике и теории категорий «минималистское» определение таково: (произвольная) категория \mathcal{C} называется *абелевой*, если в ней

(A0) есть нулевой объект¹ 0

(A1) у каждой пары объектов есть произведение и копроизведение

(A2) у каждого морфизма есть ядро и коядро

(A3) каждый мономорфизм² является ядром некоторой стрелки, а каждый эпиморфизм — коядром некоторой стрелки

Аксиомы самодвойственны: их выполнение в категории \mathcal{C} равносильно их выполнению в \mathcal{C}^{opp} . Вывод нашего определения из этих аксиом намечен в следующем ниже упражнении и подробно изложен во второй главе книги: *P. Freyd. «Abelian Categories»*.

Упражнение 3.9* (не трудное, но довольно трудоёмкое). Пользуясь только предыдущими аксиомами (A0) – (A3), покажите, что в категории \mathcal{C}

а) сопоставления стрелке её ядра и коядра корректно задают взаимно обратные биекции между множествами под- и фактор объектов³ каждого объекта

б) любая одновременно мономорфная и эпиморфная стрелка обратима

в) у любых двух подобъектов любого объекта есть максимальная нижняя грань в смысле порядка из [упр. 1.1](#) на [стр. 5](#) (она называется *пересечением* этих двух подобъектов)

г) любые две стрелки имеют уравнитель и коуравнитель (в частности в \mathcal{C} есть все послойные (ко)произведения)

д) образ и кообраз любого морфизма канонически изоморфны

е) для каждой пары объектов X, Y канонический морфизм $X \otimes Y \rightarrow X \times Y$, задаваемый стрелками $\text{Id}_X \times 0 : X \rightarrow X \times Y$ и $0 \times \text{Id}_Y : Y \rightarrow X \times Y$, обратим, и обратный морфизм задаёт посредством диаграммы из форм. (3-5) на [стр. 36](#) структуру абелевой группы на $\text{Hom}(X, Y)$, что в свою очередь вводит \mathbb{Z} -линейную структуру на категории \mathcal{C}

ж) образ любого морфизма канонически изоморфен кообразу.

¹См. [опр. 3.2](#) на [стр. 37](#).

²См. [н° 1.1.1](#) на [стр. 4](#).

³См. [опр. 1.1](#) на [стр. 5](#).

3.2.1. Точные последовательности. Пара стрелок $\dots \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{\psi} \dots$ называется *точной*, если $\ker \psi = \operatorname{im} \varphi$. Более длинная цепочка стрелок называется *точной*, если каждая пара её последовательных стрелок точна. Например, точность последовательности $0 \rightarrow X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ означает, что $\varphi = \ker \psi$, а точность последовательности $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \rightarrow 0$ означает, что $\psi = \operatorname{coker} \varphi$. Точные последовательности вида

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0 \quad (3-9)$$

называются *точными тройками*. Точность тройки (3-9) равносильна равенствам $\alpha = \ker \beta$ и $\beta = \operatorname{coker} \alpha$. В этой ситуации C называется *фактором* A по B и обозначается A/B . Точные тройки, изоморфные в категории диаграмм вида $0 \rightarrow * \rightarrow * \rightarrow * \rightarrow 0$ диаграмме прямой суммы $0 \rightarrow A \xrightarrow{\iota_A} A \oplus B \xrightarrow{\pi_B} B \rightarrow 0$ называются *расщепимыми*.

УПРАЖНЕНИЕ 3.10. Покажите, что для расщепимости точной тройки (3-9) необходимо и достаточно существования такого морфизма $\beta' : B \rightarrow A$, что $\beta' \alpha = \operatorname{Id}_A$ или такого морфизма $\alpha' : C \rightarrow B$, что $\beta \alpha' = \operatorname{Id}_C$, и приведите пример нерасщепляющейся точной тройки в категории конечных абелевых групп.

3.2.2. Точные функторы. Функтор $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ (соотв. $F : \mathcal{A}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{B}$) между абелевыми категориями называется *точным слева*, если он переводит ядра (соотв. коядра) в ядра или, что то же самое, — точные последовательности вида $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ (соотв. $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$) в точные последовательности $0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C)$ (соотв. в $0 \rightarrow F(C) \rightarrow F(B) \rightarrow F(A)$). Двойственным образом, F называется *точным справа*, если он переводит коядра (соотв. ядра) в коядра, или — точные последовательности вида $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ (соотв. $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$) в точные последовательности $F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0$ (соотв. в $F(C) \rightarrow F(B) \rightarrow F(A) \rightarrow 0$). Функтор называется *точным*, если он точен и справа и слева.

УПРАЖНЕНИЕ 3.11. Убедитесь, что для точности функтора необходимо и достаточно, чтобы он переводил точные тройки в точные тройки, и в этом случае он сохраняет точность любых последовательностей.

ПРИМЕР 3.5 (ПРЕДСТАВИМЫЕ ФУНКТОРЫ)

Из определения ядра тавтологически следует, что всякий копредставимый функтор $h^A : X \mapsto \operatorname{Hom}(A, X)$ (соотв. представимый функтор $h_A : X \mapsto \operatorname{Hom}(X, A)$) переводит ядра (соотв. коядра) в ядра. Тем самым, все (ко)представимые функторы точны слева.

ПРИМЕР 3.6 (СОПРЯЖЁННЫЕ ФУНКТОРЫ)

Так как (ко)ядро является (ко)пределом диаграммы, по [предл. 2.6](#) на стр. 32 правые сопряжённые функторы точны слева, а левые — справа. В частности, пределы точны слева, а копределы — справа, так что [сл. 2.5](#) на стр. 32 справедливо для диаграмм в любой абелевой категории¹.

ПРИМЕР 3.7 (ТЕНЗОРНОЕ УМНОЖЕНИЕ)

По [сл. 2.3](#) для любых колец R и S с единицами функтор $\operatorname{Mod}\text{-}R \rightarrow \operatorname{Mod}\text{-}S$, $X \mapsto X \otimes_R N$, тензорного умножения на любой R - S -бимодуль N точен справа.

¹Причём для конечных диаграмм существования (ко)пределов можно не требовать — они существуют автоматически.

УПРАЖНЕНИЕ 3.12. В категории абелевых групп приведите примеры, показывающие, что (ко)представимый функтор может быть не точен справа, а тензорное умножение на фиксированную абелеву группу N может быть не точно слева.

3.3. Проективные и инъективные объекты. Объект Q абелевой категории \mathcal{A} называется *проективным* (соотв. *инъективным*), если функтор $h^Q : X \mapsto \text{Hom}(Q, X)$ (соотв. функтор $h_Q : X \mapsto \text{Hom}(X, Q)$) точен справа.

УПРАЖНЕНИЕ 3.13. Покажите, что прямая сумма (даже бесконечная, коли существует) проективных объектов проективна, а прямое произведение (даже бесконечное) инъективных объектов инъективно.

ЛЕММА 3.2

Проективность объекта P абелевой категории \mathcal{A} равносильна каждому из свойств:

- (P1) любая стрелка $\varphi : P \rightarrow X$ поднимается вдоль любого эпиморфизма¹ $\pi : Y \twoheadrightarrow X$
 (P2) любой эпиморфизм $\pi : Z \twoheadrightarrow P$ расщепляется: существует такой изоморфизм $\gamma : Z \simeq \ker \pi \oplus P$, что $\pi = \pi_P \gamma$.

Инъективность объекта I абелевой категории \mathcal{A} равносильна каждому из свойств:

- (I1) любая стрелка $\varphi : X \rightarrow I$ продолжается на любое расширение² $\iota : X \hookrightarrow Y$
 (I2) любое вложение $\iota : I \hookrightarrow Z$ расщепляется: $\iota = \gamma \iota_I$ для некоторого изоморфизма $\gamma : I \oplus \text{coker } \iota \simeq Z$.

Доказательство. Условие (P1) означает эпиморфность морфизмов

$$h^P(\pi) = \pi_* : h^P(Y) \rightarrow h^P(X)$$

для всех сюръекций $\pi : Y \twoheadrightarrow X$, в чём и заключается точность справа функтора h^P . Из (P1) следует, что тождественный морфизм Id_P можно поднять вдоль любого эпиморфизма $\pi : Z \twoheadrightarrow P$ до такой стрелки $\iota : P \rightarrow Z$, что $\pi \iota = \text{Id}_P$, а это по [упр. 3.10](#) и означает расщепимость точной тройки $0 \rightarrow \ker \pi \hookrightarrow Z \twoheadrightarrow P \rightarrow 0$. Наоборот, если любой эпиморфизм на P расщепляется, то построив пару стрелок $Y \twoheadrightarrow X \leftarrow P$ до декартова квадрата

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X P & \xrightarrow{\pi'} & P \\ \varphi' \downarrow & \swarrow \iota & \downarrow \varphi \\ Y & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

в котором морфизм π' сюръективен, коль скоро сюръективен³ π , мы можем поднять стрелку φ стрелкой $\psi = \varphi' \iota$, где $\iota : P \hookrightarrow Y \times_X P$ расщепляет π' . Эквивалентность условий (I1), (I2) инъективности объекта I доказывается обращением стрелок. \square

УПРАЖНЕНИЕ 3.14. Проведите эти рассуждения.

¹Т. е. $\exists \psi : P \rightarrow Y : \varphi = \pi \psi$.

²Т. е. $\exists \psi : Y \rightarrow I : \psi \iota = \varphi$.

³См. [упр. 3.7](#) на стр. 39.

3.3.1. Проективные и инъективные модули. В категории $\text{Mod-}R$ правых модулей над произвольным кольцом R с единицей свободный модуль R ранга 1 проективен, поскольку имеется естественный изоморфизм функторов $h^R \simeq \text{Id}$, который действует над модулем M преобразованием $\text{Hom}(R, M) \simeq M$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$. По упр. 3.13 все свободные модули $E \otimes R$ тоже проективны, а по лем. 3.2 любой проективный модуль P изоморфен прямому слагаемому свободного модуля: каждый модуль M является образом эпиморфизма $S(M) \otimes R \twoheadrightarrow M$, где $S(M)$ — множество векторов модуля M , и для проективного M этот эпиморфизм расщепляется.

УПРАЖНЕНИЕ 3.15. Убедитесь в обратном: если модуль $P \oplus Q = E \otimes R$ свободен, то и P и Q проективны.

Инъективность модуля I означает возможность в нём деления на любые необратимые элементы кольца:

ЛЕММА 3.3

Правый R -модуль I инъективен, если и только если для любого правого идеала $\mathfrak{q} \subset R$ и любого R -линейного справа гомоморфизма $q : \mathfrak{q} \rightarrow I$ имеется такой вектор $e_q \in I$, что $q(x) = e_q \cdot x$ для всех $x \in \mathfrak{q}$, т. е. в I имеется частное $q(x)/x = e_q$.

Доказательство. Импликация \Rightarrow вытекает из лем. 3.2: продолжим q до R -линейного справа гомоморфизма $q' : R \rightarrow I$ и возьмём $e_q = q'(1)$. Для доказательства обратной импликации рассмотрим произвольное расширение модулей $N \subset M$ и продолжим любой R -линейный гомоморфизм $\varphi : N \rightarrow M$ на M при помощи леммы Цорна: подмодули $N \subseteq N' \subseteq M$, на которые φ продолжается, образуют чум по включению, в котором каждая линейно упорядоченная цепочка мажорируется своим объединением. Поэтому существует максимальный по включению подмодуль $L \supseteq N$ с таким гомоморфизмом $\psi : L \rightarrow I$, что $\psi|_N = \varphi$. Если имеется вектор $t \in M \setminus L$, то подмодуль L' , порождённый L и t , строго больше L , и для завершения доказательства достаточно продолжить ψ на $L' \simeq L \oplus R / \ker \pi_m$, где $\pi_m : L \oplus R \twoheadrightarrow L'$, $(\ell, x) \mapsto \ell + tx$. Ядро

$$\ker \pi_m = \{(\ell, x) \mid tx = -\ell \in L\}$$

изоморфно правому идеалу $\mathfrak{f} = \{x \in R \mid tx \in L\}$ и R -линейно отображается в I по правилу $x \mapsto \psi(tx)$. Берём вектор $e = \psi(tx)/x \in I$, такой что $\psi(tx) = e \cdot x$ для всех $x \in \mathfrak{f}$, и задаём продолжение $\psi' : L' \rightarrow I$ правилом $\psi'(\ell + tx) = \psi(\ell) + e \cdot x$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 3.16. Убедитесь в корректности последнего правила и проверьте, что \mathbb{Z} -модули \mathbb{Q} и \mathbb{Q}/\mathbb{Z} инъективны, причём второй замечателен тем, что для любого \mathbb{Z} -модуля A и любого элемента $a \in A$ есть гомоморфизм $\varphi : A \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\varphi(a) \neq 0$.

3.4. (Ко)порождающие объекты. Объект G абелевой категории \mathcal{A} называется *генератором*¹ (соотв. *когенератором*) категории \mathcal{A} , если функтор $h^G : X \mapsto \text{Hom}(G, X)$ (соотв. функтор $h_G : X \mapsto \text{Hom}(X, G)$) строг, т. е. переводит разные стрелки в разные².

¹(Ко)генераторы также называют *(ко)порождающими объектами* категории \mathcal{A} .

²Или, эквивалентно, ненулевые — в ненулевые.

Например, свободный модуль R ранга 1 порождает категорию $\mathcal{M}od-R$, ибо функтор $h^R \simeq \text{Id}$ не только строг, но и вполне строг.

УПРАЖНЕНИЕ 3.17. Покажите, что абелева категория с генератором умеренно мощна¹.

Для произвольных объектов G, X рассмотрим прямую сумму

$$\text{Hom}(G, X) \otimes G \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\varphi: G \rightarrow X} \varphi \otimes G$$

одинаковых копий G , занумерованных стрелками $\varphi \in \text{Hom}(G, X)$, и отображим слагаемое $\varphi \otimes G$ в X при помощи стрелки $\varphi: G \rightarrow X$. Получим морфизм

$$c: \text{Hom}(G, X) \otimes G \rightarrow X, \quad (3-10)$$

который называется *канонической свёрткой*. Двойственным образом, рассмотрим для объектов Y, C прямое произведение

$$C^{\text{Hom}(Y, C)} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\varphi: Y \rightarrow C} C^\varphi$$

одинаковых копий C , занумерованных стрелками $\varphi: Y \rightarrow C$, и отображим Y в сомножитель C^φ при помощи стрелки $\varphi: Y \rightarrow C$. Получим морфизм

$$c': Y \rightarrow C^{\text{Hom}(Y, C)} \quad (3-11)$$

который называется *канонической косвёрткой*.

ЛЕММА 3.4

Кополная абелева категория \mathcal{A} тогда и только тогда порождается объектом G , когда для любого $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ каноническая свёртка (3-10) эпиморфна. Полная абелева категория тогда и только тогда копорождается объектом C , когда для любого $Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$ каноническая косвёртка (3-11) мономорфна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем второе. Применим к морфизму (3-11) сохраняющий ядра функтор h^X с произвольным $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$. Получим точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(X, \ker c') \rightarrow \text{Hom}(X, Y) \xrightarrow{c'_*} \text{Hom}(X, C)^{\text{Hom}(Y, C)}$$

морфизм c'_* которой переводит стрелку $\varphi: X \rightarrow Y$ в график отображения

$$\varphi^*: \text{Hom}(Y, C) \rightarrow \text{Hom}(X, C), \quad \psi \mapsto \psi\varphi.$$

Тем самым, инъективность c'_* равносильна инъективности действия функтора

$$h_C: \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(h_C(Y), h_C(X)).$$

Если $\ker c' = 0$, отображение c'_* инъективно для всех X, Y , т. е. функтор h_C строг. Наоборот, если h_C строг, то $\text{Hom}(X, \ker c') = 0$ для всех X , и беря $X = \ker c'$, заключаем, что $\ker c' = 0$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 3.18. Докажите первую часть лем. 3.4 и покажите, что любой модуль является коядром гомоморфизма свободных модулей.

¹См. опр. 1.1 на стр. 5.

СЛЕДСТВИЕ 3.1

Инъективная абелева группа \mathbb{Q}/\mathbb{Z} копорождает категорию абелевых групп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Косвёртка $c' : \mathcal{A} \rightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$ инъективна по [упр. 3.16](#). \square

УПРАЖНЕНИЕ 3.19. Убедитесь, что абелева группа $I_R = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ со структурой правого R -модуля, задаваемой левым действием R на себе (соотв. со структурой левого R -модуля, задаваемой правым действием R на себе), является инъективным когенератором категории $\text{Mod-}R$ (соотв. категории $R\text{-Mod}$).

3.4.1. Компактные объекты. Объект K козамкнутой абелевой категории \mathcal{A} называется *компактным*, если функтор $h^K : Z \mapsto \text{Hom}(K, Z)$ коммутирует с бесконечными копределами. Поскольку любой копредел является коуравнителем пары стрелок между прямыми суммами¹, компактность равносильна тому, что h^K переводит прямые суммы в прямые суммы или, эквивалентно, что образ вложения (3-4)

$$\sigma_* : \text{Hom}(K, \bigoplus_{\nu} X_{\nu}) \hookrightarrow \text{Hom}(K, \prod_{\nu} X_{\nu}) \simeq \prod_{\nu} \text{Hom}(K, X_{\nu})$$

лежит в $\bigoplus_{\nu} \text{Hom}(K, X_{\nu}) \subset \prod_{\nu} \text{Hom}(K, X_{\nu})$. Например, проективный генератор R категории R -модулей компактен.

УПРАЖНЕНИЕ 3.20. Покажите, что компактность проективного модуля равносильна его конечной порождённости.

3.5. Категории модулей. Выше мы уже видели, что абелева категория $\text{Mod-}R$ правых модулей² над произвольным кольцом R с единицей полна и кополна, обладает инъективным когенератором и компактным проективным генератором. Последнее свойство выделяет категории модулей среди прочих абелевых категорий.

ТЕОРЕМА 3.1

Козамкнутая абелева категория \mathcal{A} с компактным проективным генератором P точно эквивалентна³ категории $\text{Mod-}R$ правых R -модулей над кольцом $R = \text{End}_{\mathcal{A}}(P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функтор $h^P : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ принимает значение в $\text{Mod-}R$: правое действие $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, P)$ на абелевой группе $h^P(X) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, X)$ задаётся правым умножением стрелок на f . В силу проективности P функтор h^P точен. Проверим, что он по-существу сюръективен и вполне строг⁴. Из [лем. 3.4](#) вытекает, что любой объект $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ представляется в виде коядра морфизма между прямыми суммами подходящих множеств I, J одинаковых копий генератора P :

$$I \otimes P \xrightarrow{\varphi} J \otimes P \rightarrow X \rightarrow 0. \quad (3-12)$$

Морфизм φ задаётся некоторой матрицей Φ формата $I \times J$ с элементами

$$\varphi_{ij} \in \text{Hom}(j \otimes P, i \otimes P) \simeq \text{Hom}(P, P) = R,$$

¹См. доказательство [предл. 2.4](#) на стр. 27.

²Равно как и категория $R\text{-Mod}$ левых R -модулей.

³Т. е. имеется эквивалентность категорий, переводящая точные тройки в точные тройки.

⁴См. [лем. 1.1](#) на стр. 13.

имеющей при каждом j лишь конечное число ненулевых φ_{ij} . Применяя к (3-12) функтор h^P и пользуясь компактностью P получаем для $h^P(X)$ представление в виде коядра морфизма свободных R -модулей

$$I \otimes R \xrightarrow{\varphi_*} J \otimes R \rightarrow h^P(X) \rightarrow 0, \quad (3-13)$$

который задаётся правым умножением строки $(x_i) \in I \otimes R$ на матрицу Φ . Так как каждый R -модуль является коядром гомоморфизма свободных R -модулей, функтор h^P по-существу сюръективен. Для любого $Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$ группа $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ является ядром стрелки $h_Y(\varphi)$, получающейся применением $h_Y : Z \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(Z, Y)$ к диаграмме (3-12), а группа $\text{Hom}_R(h^P(X), h^P(Y))$ является коядром стрелки $h_{h^P(Y)}(\varphi_*)$, получающейся применением $h_{h^P(Y)} : M \mapsto \text{Hom}_R(Z, h^P(Y))$ к диаграмме (3-12). Эти стрелки совпадают друг с другом, представляя собою гомоморфизм $h^P(Y) \rightarrow h^P(Y)$ прямых произведений одинаковых копий группы $h^P(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Y)$, задаваемый транспонированной матрицей Φ^t . Тем самым, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \simeq \text{Hom}_R(h^P(X), h^P(Y))$. \square

ТЕОРЕМА 3.2 (Эквивалентность Мориты)

Следующие три свойства колец R и S с единицами эквивалентны друг другу:

- (1) категории $\text{Mod-}R$ и $\text{Mod-}S$ точно эквивалентны
- (2) $R \simeq \text{Hom}_S(P, P)$ для некоторого конечно порождённого проективного S -модуля P , являющегося генератором категории $\text{Mod-}S$
- (3) существует такой R - S бимодуль T , что тензорное умножение $\text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}S$, $M \mapsto M \otimes_R T$, является точной эквивалентностью категорий.

Доказательство. Если выполнено (1), то по теор. 3.1, применённой к $\mathcal{A} = \text{Mod-}S$, в $\text{Mod-}S$ имеется компактный проективный генератор P с $\text{Hom}_S(P, P) = R$, что даёт (2), поскольку компактный проективный модуль конечно порождён¹. Если выполнено (2), положим² $T \stackrel{\text{def}}{=} P$ и покажем, что функторы

$$\text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}S, M \mapsto M \otimes_R P, \quad \text{и} \quad \text{Mod-}S \rightarrow \text{Mod-}R, N \mapsto \text{Hom}(P, N),$$

квазиобратны друг другу. Так как эти функторы сопряжены³:

$$\text{Hom}_S(M \otimes_R P, N) \simeq \text{Hom}_R(N, \text{Hom}_S(P, N)),$$

имеется естественное преобразование⁴ $\text{Hom}_S(P, N) \otimes_R P \simeq N$, $\varphi \otimes p \mapsto \varphi(p)$, и естественное преобразование $M \simeq \text{Hom}_S(P, M \otimes_R P)$, переводящее $m \in M$ в семейство

¹См. упр. 3.20 на стр. 45.

²Отметим, что на правом S -модуле P имеется каноническая структура левого модуля над кольцом $R = \text{End}_S(P)$.

³См. предл. 2.3 на стр. 21.

⁴См. формулу (2-2) на стр. 18.

гомоморфизмов $\varphi_m : P \rightarrow M \otimes_R P$, $p \mapsto m \otimes p$. Если P является проективным генератором, то оба эти преобразования — изоморфизмы. \square

УПРАЖНЕНИЕ 3.21. Убедитесь в этом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4 (эквивалентность Мориты)

Кольца R и S , удовлетворяющие условиям [теор. 3.2](#), называются *Морита-эквивалентными*, а функторы $M \mapsto M \otimes_R P$ и $N \mapsto \text{Hom}(P, N)$ называются *эквивалентностями Мориты*.

УПРАЖНЕНИЕ 3.22. Покажите, что категория R -модулей точно эквивалентна категории модулей над кольцом матриц $\text{Mat}_{n \times n}(R)$ любого конечного размера.

ТЕОРЕМА 3.3 (ПРОСТАЯ ТЕОРЕМА МИТЧЕЛА О ВЛОЖЕНИИ)

Если абелева категория \mathcal{B} полна и имеет проективный генератор¹, то любая её малая полная точная² абелева подкатегория \mathcal{A} допускает точное вполне строгое вложение в категорию правых модулей над некоторым кольцом с единицей.

Доказательство. Обозначим через P проективный генератор категории \mathcal{B} , а через J — произведение множеств $\text{Hom}(P, X)$ по всем $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$. Тогда $Q = J \otimes P$ тоже является генератором \mathcal{B} , и для каждого $X \in \mathcal{A}$ существует сюръективный морфизм $\psi_X : Q \twoheadrightarrow X$. Положим $R = \text{End}_{\mathcal{B}}(Q)$ и как в доказательстве [теор. 3.1](#) проверим, что точный строгий³ функтор $h^Q : \mathcal{A} \rightarrow \text{Mod-}R$, $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Q, X)$, вполне строг. Для этого представим произвольный $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ как коядро гомоморфизма $\varphi = \psi_{\ker \psi_X}$:

$$Q \xrightarrow{\varphi} Q \xrightarrow{\psi_X} X \rightarrow 0.$$

Применение точного функтора h^Q задаёт $h^Q(X)$ как коядро левого умножения

$$R \xrightarrow{\varphi_*} R \rightarrow h^Q(X) \rightarrow 0$$

на элемент $\varphi \in R$. Применяя к этой диаграмме $\text{Hom}_{\text{Mod-}R}(*, h^Q(Y))$, а к предыдущей — $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(*, Y)$, получаем для $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ и $\text{Hom}_{\text{Mod-}R}(h^Q(X), h^Q(Y))$ одинаковое представление в виде ядра правого умножения на φ в модуле $h^Q(Y)$. \square

¹Не обязательно компактный!

²Т. е. такая, что точные тройки из \mathcal{A} точны и в \mathcal{B} .

³Ибо Q — проективный генератор.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Транзитивность очевидна, рефлексивность — взять $\xi = \text{Id}$, кососимметричность: в силу возможности сокращать слева (соотв. справа), равенства $\varphi = \psi\xi = \varphi\xi'\xi$ (соотв. $\varphi = \xi\psi = \xi\xi'\psi$) влекут $\xi'\xi = \text{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \text{Id}$), а равенства $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$ (соотв. $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$) влекут $\xi\xi' = \text{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \text{Id}$)

Упр. 1.6. Типичный ответ: « $\ln|x| + C$, где C — произвольная константа» неверен¹. На самом деле C является сечением *постоянного пучка* \mathbb{R}^\sim над несвязным открытым множеством $\mathbb{R} \setminus 0$.

Упр. 1.12. Элементу $a \in F(A)$ отвечает естественное преобразование

$$f_X : \text{Hom}(A, X) \rightarrow F(X),$$

посылающее стрелку $\varphi : A \rightarrow X$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \rightarrow F(X)$ на элементе a . Обратное отображение сопоставляет естественному преобразованию f_* значение отображения $f_A : h^A(A) \rightarrow F(A)$ на элементе $\text{Id}_A \in h^A(A)$. Проверяется это с помощью построенной по произвольной стрелке $\varphi : A \rightarrow X$ диаграммы

$$\begin{array}{ccc} h^A(A) = \text{Hom}(A, A) & \xrightarrow{h^A(\varphi)} & \text{Hom}(A, X) = h^A(X) \\ f_A \downarrow & & \downarrow f_X \\ F(A) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(X), \end{array} \quad (3-14)$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ , так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)(f_A(\text{Id}_A))$.

Упр. 2.3. Отображения $\text{Hom}_{\text{Mod-}B}(B, Y) \rightarrow Y$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$, и $Y \rightarrow \text{Hom}_{\text{Mod-}B}(B, Y) \rightarrow Y$, $y \mapsto (\varphi : b \mapsto yb)$, являются взаимно обратными A -линейными справа изоморфизмами.

Упр. 2.5. Отображения $x \otimes_B b \mapsto xb$ и $x \mapsto x \otimes_B 1$ являются взаимно обратными A -линейными справа изоморфизмами между $X \otimes_B B$ и X .

Упр. 2.8. Непрерывному отображению $f : |X| \rightarrow Y$ из $\text{Hom}_{\text{Top}}(|X|, Y)$ биективно соответствует естественное по $[n] \in \text{Ob } \Delta$ преобразование $f_n : X_n \rightarrow \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta^n, Y)$ из $\text{Hom}_{pS_n}(X, S(Y))$, сопоставляющее точке $x \in X_n$ композицию

$$f \circ \iota|_{x \times \Delta^n} : \Delta^n \rightarrow |X| \rightarrow Y,$$

где $\iota|_{x \times \Delta^n} : \Delta^n \rightarrow |X|$ это ограничение отображения факторизации²

$$\iota : \bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n \rightarrow |X|$$

на правильный симплекс $\{x\} \times \Delta^n \subset X_n \times \Delta^n$ (убедитесь, что f_n функториально зависит от комбинаторного симплекса $[n]$). Обратная биекция сопоставляет естественному

¹И в былые годы абитуриентам мехмата случалось получать за такой ответ двойку на устном вступительном экзамене по математике.

²Непрерывного в силу определения фактор топологии.

по $[n] \in \text{Ob } \Delta$ набору отображений $f_n : X_n \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y)$ отображение $|X| \rightarrow Y$, переводящее класс точки $(x, s) \in X_n \times \Delta^n$ по модулю соотношений $(X(\varphi)x, s) = (x, \varphi s)$ в значение непрерывного отображения $f_n(x) : \Delta^n \rightarrow Y$ в точке $s \in \Delta^n$ (убедитесь, что это значение не зависит от выбора представителя (x, s) в его классе эквивалентности). Естественное преобразование $t_Y : |S(Y)| \rightarrow Y$ переводит класс пары

$$(g : \Delta^n \rightarrow Y, t \in \Delta^n) \in S_n(Y) \times \Delta^n = \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y) \times \Delta^n,$$

представляющей точку из фактор пространства $|S(Y)|$, геометрической реализации симплициального множества $S(Y)$, в точку $g(t) \in Y$ (убедитесь, что отображение t_Y корректно определено, непрерывно и функториально по топологическому пространству Y). Действие естественного преобразования $s_X : X \rightarrow S(|X|)$ над комбинаторным симплексом $[n] \in \text{Ob } \Delta$ переводит точку $x \in X_n$ в сингулярный симплекс

$$\iota|_{x \times \Delta^n} : \Delta^n \rightarrow |X|$$

топологического пространства $|X|$ (убедитесь, что он функториален по $[n] \in \text{Ob } \Delta$ и предпучку $F \in \text{Ob } \mathcal{F}un(\Delta^{\text{opp}}, \mathcal{S}et)$).

Упр. 2.10. Начальное множество и начальное топологическое пространство пусты, конечное множество и конечное топологическое пространство это одна точка. Начальный и конечный объекты категории групп это единичная группа¹. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей начальный и конечный объект это нуль.

Упр. 2.11. В категории групп нулевым объектом является единичная группа. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей нулевой объект это нулевая абелева группа.

Упр. 2.15. Гомоморфизмы коммутативных колец $A \leftarrow K \rightarrow A$ наделяют A и B структурами K -алгебр, и копроизведение $A \otimes_K B$ это тензорное произведение K -алгебр, т. е. фактор свободного K -модуля с базисом $A \times B$ (произведение в категории множеств) по подмодулю, порождённому всевозможными разностями

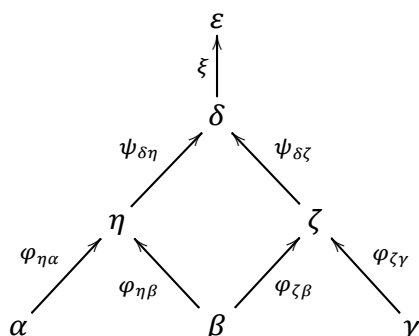
$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \kappa_1 b_1 + \kappa_2 b_2) - \sum_{i,j=1}^2 \lambda_i \kappa_j (a_i, b_j)$$

с $\lambda_i, \kappa_i \in K, a_i \in A, b_j \in B$ (ср. с н° 2.2). Произведение на классах эквивалентности задаётся покомпонентно: $(a_1 \otimes_K b_1) \cdot (a_2 \otimes_K b_2) = (a_1 a_2) \otimes_K (b_1 b_2)$.

Упр. 2.17. По упр. 2.16 копредел $\text{colim}_{\rightarrow} X$ является фактором дизъюнктного объединения $\coprod_{v \in \text{Ob } \mathcal{F}} X_v$ по наименьшему отношению эквивалентности, обеспечивающему равенства $x = X(v \rightarrow \mu)x$ для всех стрелок $v \rightarrow \mu$ из $\text{Mor } \mathcal{F}$ и всех $x \in X_v$. При этом элементы $x_v \in X_v$ и $x_\mu \in X_\mu$ заведомо отождествляются, если $X(v \rightarrow \eta)x_v = X(\mu \rightarrow \eta)x_\mu$ для некоторой пары стрелок $v \rightarrow \eta \leftarrow \mu$. Достаточно убедиться, что последнее свойство является отношением эквивалентности. Его рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность. Если x_α эквивалентен x_β , а x_β эквивалентен x_γ ,

¹Т. е. группа, состоящая только из единичного элемента.

то в категории \mathcal{F} имеется (не обязательно коммутативная) диаграмма из таких стрелок



что $X(\varphi_{\eta\alpha})x_\alpha = X(\varphi_{\eta\beta})x_\beta$ и $X(\varphi_{z\beta})x_\beta = X(\varphi_{z\gamma})x_\gamma$ в категории Set , а $\xi\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\beta} = \xi\psi_{\delta z}\varphi_{z\beta}$ в $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\beta, \varepsilon)$. Обозначая стрелку из последнего равенства через \varkappa , имеем

$$X(\varepsilon\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\alpha})x_\alpha = X(\varkappa)x_\beta = X(\varepsilon\psi_{\delta z}\varphi_{z\gamma})x_\gamma.$$

Упр. 2.18. Применяя первое условие Оре¹ к произвольным элементам $s = s_1$ и $q = s_2$ из S получаем ведущие из s_1 и s_2 стрелки λ и t с общим концом $\lambda s_1 = t s_2 \in S$. Применяя второе условие Оре² к паре стрелок $\varphi, \psi \in \text{Hom}_S(s, s')$, где $s' = \varphi s = \psi s$, получаем такую стрелку $u \in \text{Hom}_S(s', ts')$, что $t\varphi = t\psi$.

Упр. 2.19. Так как по предыдущему упр. 2.18 категория S фильтрующаяся, у дробей $s_1^{-1}q_1$ и $s_2^{-1}q_2$ есть общий знаменатель, равный $t = \lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ для подходящих $\lambda_1, \lambda_2 \in R$. Тогда $s_1^{-1}q_1 + s_2^{-1}q_2 = t^{-1}(\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2)$.

Упр. 3.1. Всё вытекает из дистрибутивности: $\varphi\alpha = \varphi\beta \iff \varphi(\alpha - \beta) = 0$.

Упр. 3.3. Инъективность ι_ν и сюръективность π_ν вытекает из равенства $\pi_\nu \iota_\nu = \text{Id}_{X_\nu}$. Инъективность σ редуцируется к инъективности морфизма $X \oplus Y \rightarrow X \oplus Y$ суммы двух объектов при помощи леммы Цорна: рассмотрите чум таких подмножеств $S \subset N$, что отображение $\bigoplus_{\nu \in S} X_\nu \rightarrow \prod_{\nu \in S} X_\nu$ инъективно.

Упр. 3.6. В (а) по предл. 2.1 ядро задаёт правый сопряжённый функтор к функтору $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}r$, $X \mapsto \{X \rightarrow 0\}$, а коядро — левый сопряжённый функтор к функтору $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}r$, $X \mapsto \{X \rightarrow 0\}$ В (в) если φ обратим, то он не делит нуль, откуда $\ker \varphi = 0$ и $\text{coker } \varphi = 0$. Если $\ker \varphi = 0$ и $\text{coker } \varphi = 0$, то по упр. 3.5 диаграмма (3-6) приобретает вид

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longleftarrow & Y \xleftarrow{\text{Id}_Y} Y \\ & & \uparrow \varphi \quad \uparrow \bar{\varphi} \\ 0 & \longrightarrow & X \xrightarrow{\text{Id}_X} X, \end{array}$$

и обратимость $\bar{\varphi}$ влечёт обратимость φ . Если φ мономорфен или эпиморфен, его ка-

¹См. формулу (O₁) на стр. 30.

²См. формулу (O₂) на стр. 30.

каноническое разложение (3-6) имеет, соответственно, вид

$$\begin{array}{ccc}
 \text{coker } \varphi \xleftarrow{\zeta} Y \xleftarrow{\kappa'} \ker \zeta & & 0 \longleftarrow Y \xlongequal{\text{Id}_Y} Y \\
 \uparrow \varphi & \text{или} & \uparrow \varphi \\
 0 \longrightarrow X \xlongequal{\text{Id}_X} X & & \ker \varphi \xrightarrow{\kappa} X \xrightarrow{\zeta'} \text{coker } \kappa, \\
 \uparrow \bar{\varphi} & & \uparrow \bar{\varphi}
 \end{array}$$

и $\bar{\varphi}$ задаёт канонические изоморфизмы $X \simeq \ker \zeta$ и $\text{coker } \kappa \simeq Y$.

Упр. 3.8. Коядро является фактором по замыканию образа. Вложение дискретной группы \mathbb{Q} в \mathbb{R} со стандартной топологией и плотные обмотки торов мономорфны и эпиморфны, но не обратимы.

Упр. 3.10. Если существует β' , то $\iota_A \beta' + \iota_B \beta : B \rightarrow A \oplus C$ является изоморфизмом. Если существует α' , то изоморфизмом является $\alpha \pi_A + \alpha' \pi_B : A \oplus B \rightarrow B$.

Упр. 3.11. Если функтор F сохраняет точность троек, то он переводит каноническое разложение (3-7) любого морфизма φ в каноническое разложение морфизма $F(\varphi)$, в частности — переводит $\text{im } \varphi$ в $\text{im}(F(\varphi))$.

Упр. 3.16. \mathbb{Q} и \mathbb{Q}/\mathbb{Z} очевидно удовлетворяют условиям лем. 3.3 на стр. 43. Гомоморфизм $\varphi : A \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\varphi(a) \neq 0$ сначала строится на порождённом элементом a подмодуле $\mathbb{Z} \cdot a$ (изоморфном либо \mathbb{Z} либо $\mathbb{Z}/(n)$), а потом по инъективности продолжается на весь модуль A .

Упр. 3.17. Подобъекты любого объекта X инъективно вкладываются в множество подгрупп группы $h^P(X) = \text{Hom}(P, X)$.

Упр. 3.18. Для любого $Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$ функтор $h_Y : Z \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, Y)$ переведёт точную последовательность $\text{Hom}(G, X) \otimes G \xrightarrow{c} X \rightarrow \text{coker } c \rightarrow 0$ в точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\text{coker } c, Y) \otimes \text{Hom}(X, Y) \xrightarrow{c^*} \text{Hom}(G, Y)^{\text{Hom}(G, X)},$$

в которой c^* сопоставляет стрелке $\varphi : X \rightarrow Y$ график функции

$$h^G(\varphi) = \varphi^* : \text{Hom}(G, X) \rightarrow \text{Hom}(G, Y), \quad \psi \mapsto \varphi \psi.$$

Инъективность c^* равносильна инъективности $h^G : \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(h^G(X), h^G(Y))$. Если $\text{coker } c = 0$, отображение c^* инъективно и h^G строг. Наоборот, если h^G строг, то $\text{Hom}(\text{coker } c, Y) = 0$ для всех Y , и беря $Y = \text{coker } c$, заключаем, что $Y = 0$.

Упр. 3.19. Воспользуйтесь функториальным по X изоморфизмом $\text{Hom}_R(X, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X \otimes_{\mathbb{Z}} R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.